

Le problème du régime alimentaire de l'étude de cas numéro 1 conduit au programme sous forme canonique suivant:

Le programme primal (P) est :

$$\begin{array}{rccccrc}
 \text{Maximiser} & -4x_1 & -5x_2 & -2x_3 & -3x_4 & & \\
 \text{Sous} & -x_1 & -x_2 & -2x_3 & -x_4 & \leq & -10 \\
 & -2x_1 & -3x_2 & +0x_3 & -x_4 & \leq & -15 \\
 & 0x_1 & -x_2 & -x_3 & -x_4 & \leq & -6 \\
 & x_1 & +0x_2 & +0x_3 & +0x_4 & \leq & 4 \\
 & 0x_1 & +0x_2 & +0x_3 & +x_4 & \leq & 5 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq & 0
 \end{array}$$

Le programme (P) ne contient pas l'origine. On va donc effectuer deux phases de l'algorithme du simplexe.

***** Début de la première phase. *****

Le dictionnaire initial de la première phase est :

$$\begin{array}{rcccccc}
 x_5 = & -10 & +x_1 & +x_2 & +2x_3 & +x_4 & +x_0 \\
 x_6 = & -15 & +2x_1 & +3x_2 & +0x_3 & +x_4 & +x_0 \\
 x_7 = & -6 & +0x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_0 \\
 x_8 = & 4 & -x_1 & +0x_2 & +0x_3 & +0x_4 & +x_0 \\
 x_9 = & 5 & +0x_1 & +0x_2 & +0x_3 & -x_4 & +x_0 \\
 \hline
 w = & 0 & +0x_1 & +0x_2 & +0x_3 & +0x_4 & -x_0
 \end{array}$$

On effectue le premier pivot illegal.

La variable entrante est x_0 . La variable sortante est x_6 .

$$\begin{array}{rcccccc}
 x_5 = & 5 & -x_1 & -2x_2 & +2x_3 & +0x_4 & +x_6 \\
 x_0 = & 15 & -2x_1 & -3x_2 & +0x_3 & -x_4 & +x_6 \\
 x_7 = & 9 & -2x_1 & -2x_2 & +x_3 & +0x_4 & +x_6 \\
 x_8 = & 19 & -3x_1 & -3x_2 & +0x_3 & -x_4 & +x_6 \\
 x_9 = & 20 & -2x_1 & -3x_2 & +0x_3 & -2x_4 & +x_6 \\
 \hline
 w = & -15 & +2x_1 & +3x_2 & +0x_3 & +x_4 & -x_6
 \end{array}$$

La variable entrante est x_1 . La variable sortante est x_7 .

$$\begin{array}{rcccccc}
 x_5 & = & \frac{1}{2} & +\frac{1}{2}x_7 & -x_2 & +\frac{3}{2}x_3 & +0x_4 & +\frac{1}{2}x_6 \\
 x_0 & = & 6 & +x_7 & -x_2 & -x_3 & -x_4 & +0x_6 \\
 x_1 & = & \frac{9}{2} & -\frac{1}{2}x_7 & -x_2 & +\frac{1}{2}x_3 & +0x_4 & +\frac{1}{2}x_6 \\
 x_8 & = & \frac{11}{2} & +\frac{3}{2}x_7 & +0x_2 & -\frac{3}{2}x_3 & -x_4 & -\frac{1}{2}x_6 \\
 x_9 & = & 11 & +x_7 & -x_2 & -x_3 & -2x_4 & +0x_6 \\
 \hline
 w & = & -6 & -x_7 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +0x_6
 \end{array}$$

La variable entrante est x_2 . La variable sortante est x_5 .

$$\begin{array}{rcccccc}
 x_2 & = & \frac{1}{2} & +\frac{1}{2}x_7 & -x_5 & +\frac{3}{2}x_3 & +0x_4 & +\frac{1}{2}x_6 \\
 x_0 & = & \frac{11}{2} & +\frac{1}{2}x_7 & +x_5 & -\frac{3}{2}x_3 & -x_4 & -\frac{1}{2}x_6 \\
 x_1 & = & 4 & -x_7 & +x_5 & -x_3 & +0x_4 & +0x_6 \\
 x_8 & = & \frac{11}{2} & +\frac{3}{2}x_7 & +0x_5 & -\frac{3}{2}x_3 & -x_4 & -\frac{1}{2}x_6 \\
 x_9 & = & \frac{21}{2} & +\frac{1}{2}x_7 & +x_5 & -\frac{3}{2}x_3 & -2x_4 & -\frac{1}{2}x_6 \\
 \hline
 w & = & -\frac{11}{2} & -\frac{1}{2}x_7 & -x_5 & +\frac{3}{2}x_3 & +x_4 & +\frac{1}{2}x_6
 \end{array}$$

La variable entrante est x_3 . La variable sortante est x_0 .

$$\begin{array}{rcccccc}
 x_2 & = & \frac{19}{5} & +\frac{4}{5}x_7 & -\frac{2}{5}x_5 & -\frac{3}{5}x_0 & -\frac{3}{5}x_4 & +\frac{1}{5}x_6 \\
 x_3 & = & \frac{11}{5} & +\frac{1}{5}x_7 & +\frac{2}{5}x_5 & -\frac{2}{5}x_0 & -\frac{2}{5}x_4 & -\frac{1}{5}x_6 \\
 x_1 & = & \frac{9}{5} & -\frac{6}{5}x_7 & +\frac{3}{5}x_5 & +\frac{2}{5}x_0 & +\frac{2}{5}x_4 & +\frac{1}{5}x_6 \\
 x_8 & = & \frac{11}{5} & +\frac{6}{5}x_7 & -\frac{3}{5}x_5 & +\frac{3}{5}x_0 & -\frac{2}{5}x_4 & -\frac{1}{5}x_6 \\
 x_9 & = & 5 & +0x_7 & +0x_5 & +x_0 & -x_4 & +0x_6 \\
 \hline
 w & = & 0 & +0x_7 & +0x_5 & -x_0 & +0x_4 & +0x_6
 \end{array}$$

La valeur de la première phase du simplexe est 0. Le programme (P) admet donc des solutions.

***** Début de la deuxième phase. *****

Le dictionnaire initial est :

$$\begin{array}{rcllcl}
x_2 & = & \frac{19}{5} & +\frac{4}{5}x_7 & -\frac{2}{5}x_5 & -\frac{3}{5}x_4 & +\frac{1}{5}x_6 \\
x_3 & = & \frac{11}{5} & +\frac{1}{5}x_7 & +\frac{2}{5}x_5 & -\frac{2}{5}x_4 & -\frac{1}{5}x_6 \\
x_1 & = & \frac{9}{5} & -\frac{6}{5}x_7 & +\frac{3}{5}x_5 & +\frac{2}{5}x_4 & +\frac{1}{5}x_6 \\
x_8 & = & \frac{11}{5} & +\frac{6}{5}x_7 & -\frac{3}{5}x_5 & -\frac{2}{5}x_4 & -\frac{1}{5}x_6 \\
x_9 & = & 5 & +0x_7 & +0x_5 & -x_4 & +0x_6 \\
\hline
z & = & -\frac{153}{5} & +\frac{2}{5}x_7 & -\frac{6}{5}x_5 & -\frac{4}{5}x_4 & -\frac{7}{5}x_6
\end{array}$$

La variable entrante est x_7 . La variable sortante est x_1 .

$$\begin{array}{rcllcl}
x_2 & = & 5 & -\frac{2}{3}x_1 & +0x_5 & -\frac{1}{3}x_4 & +\frac{1}{3}x_6 \\
x_3 & = & \frac{5}{2} & -\frac{1}{6}x_1 & +\frac{1}{2}x_5 & -\frac{1}{3}x_4 & -\frac{1}{6}x_6 \\
x_7 & = & \frac{3}{2} & -\frac{5}{6}x_1 & +\frac{1}{2}x_5 & +\frac{1}{3}x_4 & +\frac{1}{6}x_6 \\
x_8 & = & 4 & -x_1 & +0x_5 & +0x_4 & +0x_6 \\
x_9 & = & 5 & +0x_1 & +0x_5 & -x_4 & +0x_6 \\
\hline
z & = & -30 & -\frac{1}{3}x_1 & -x_5 & -\frac{2}{3}x_4 & -\frac{4}{3}x_6
\end{array}$$

Une solution optimale de (P) est : $x_1 = 0$, $x_2 = 5$, $x_3 = \frac{5}{2}$, $x_4 = 0$,
La valeur de la fonction objectif en cette solution est : -30 .

Le nombre de pivots effectués est : 1

La solution au problème du régime alimentaire est donc de manger 5 oeufs et 2 baguettes et demi. L'apport énergétique est de 30.

Cette solution est optimale. On peut le **certifier** en faisant la somme de la première contrainte et de la deuxième contrainte elle-même multipliée par un coefficient $4/3$. L'inégalité obtenue majore la fonction objectif, ce qui montre que cette dernière est bornée supérieurement par -30 .