

- TD 1. Connexité. -

- Exercice 1 -

Représenter les graphes dont les ensembles de sommets V et d'arêtes E sont codés ainsi :

- a. *Grappe de Petersen*. L'ensemble des sommets est l'ensemble des paires d'éléments de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Deux sommets sont reliés si leurs paires respectives sont disjointes.
- b. *Echelle de Möbius*. L'ensemble des sommets est $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Deux sommets sont reliés si leur différence est égale à 3, 4 ou 5 modulo 8.

- Exercice 2 -

Dérouler l'algorithme COMPOSANTES sur le graphe G ayant pour ensemble de sommets $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ et pour ensemble d'arêtes $\{12, 65, 46, 31, 23\}$.

- Exercice 3 - Graphes k -réguliers.

- a. Montrer qu'un graphe 1-régulier est un couplage.
- b. Montrer qu'un graphe 2-régulier est une union disjointe de cycles.
- c. Construire tous les graphes 3-réguliers à 6 sommets. Les dessiner dans le plan en minimisant les croisements d'arêtes.
- d. Construire tous les graphes 3-réguliers à 7 sommets.

- Exercice 4 - Nombre d'arêtes.

- a. Quel est le nombre maximal d'arêtes d'un graphe à n sommets ?
- b. Quel est le nombre maximal d'arêtes d'un graphe à n sommets et ayant 2 composantes connexes ?
- c. Quel est le nombre maximal d'arêtes d'un graphe à n sommets et ayant c composantes connexes ?
- d. Quel est le nombre maximal d'arêtes d'un graphe biparti à n sommets ?

- Exercice 5 -

Montrer que si un graphe connexe G n'est pas complet, alors il existe trois sommets distincts de G , u , v et w , tels que $uv \in E(G)$, $vw \in E(G)$ et $uw \notin E(G)$.

- Exercice 6 -

On note $\delta(G)$ le degré minimum d'un sommet du graphe G . Soit G un graphe tel que $\delta(G) \geq \frac{n-1}{2}$. Montrer que G est connexe. Donner un exemple de graphe non connexe avec $\delta(G) \geq \frac{n-2}{2}$.

- Exercice 7 -

Soit G un graphe et x un sommet de G de degré impair. Montrer qu'il existe un chemin de x vers un autre point y de degré impair.

- Exercice 8 -

On veut montrer que dans toute ville V , deux personnes de V au moins ont le même nombre d'amis dans V . Formaliser le problème en termes de graphe. Le résoudre en appliquant le *principe des tiroirs* (pigeonhole principle) : si on place n objets dans m boîtes, avec $m < n$, alors l'une de ces boîtes contient au moins deux objets.

- Exercice 9 -

Ecrire un algorithme prenant en entrée une marche v_1, \dots, v_m dans un graphe et retournant un chemin de v_1 à v_m extrait de cette marche. Plus précisément, on supposera que les sommets de cette marche sont les entiers $V = \{1, \dots, n\}$, que la marche est donnée sous forme d'un tableau $T[1, \dots, m]$, et on se contentera simplement d'écrire le chemin extrait de T . Par exemple, pour une entrée $T = [2, 3, 5, 8, 7, 9, 1, 8, 5, 4, 6, 8, 3, 2, 4, 5, 1]$, on peut trouver les solutions $2, 3, 5, 1$, ou $2, 4, 5, 1$ ou encore $2, 3, 5, 8, 7, 9, 1$.

- Exercice 10 -

- Ecrire un algorithme $CHEMINMAX(G, x)$ prenant en entrée un graphe G codé par listes de voisins et un sommet x de G , et retournant une liste $x = x_0, x_1, \dots, x_k$ formant un chemin *maximal* de G issu de x (i.e. tel que tous les voisins de x_k sont dans $\{x_0, \dots, x_{k-1}\}$).
- Proposer une instance pour laquelle votre algorithme pourrait ne pas retourner un chemin de longueur maximale issu de x .
- Montrer que deux chemins de longueur maximale dans un graphe connexe G ont au moins un sommet en commun.

- Exercice 11 -

Soit G un graphe connexe codé par listes de voisins, i.e. à chaque sommet v est associé la liste $L(v)$ des voisins de v .

Algorithme : PROMENADE

Données : Un graphe connexe $G = (V, E)$. Un sommet v de G .

Résultat : Le message "Terminé".

```

1 début
2    $c(v) \leftarrow 1$ ;
3    $pos \leftarrow v$ ;
4   pour tous les  $x \in V \setminus v$  faire  $c(x) \leftarrow 0$ ;
5   tant que Il existe un sommet  $z$  tel que  $c(z) = 0$  faire
6      $aux \leftarrow$  premier élément de la liste  $L(pos)$ ;
7      $c(aux) \leftarrow 1$ ;
8     Effacer le premier élément de  $L(pos)$  et le réécrire à la fin de  $L(pos)$ ;
9      $pos \leftarrow aux$ ;
10  fin
11  retourner Terminé;
12 fin

```

- Donner un exemple de déroulement de l'algorithme sur le chemin à n sommets et qui prend un temps $O(n)$, puis un autre exemple, sur le même graphe, mais avec un temps en $O(n^2)$ (jouer sur l'affectation initiale des listes de voisins).
- Montrer que PROMENADE termine toujours.

- Exercice 12 -

On propose l'algorithme suivant admettant en entrée un graphe G . Pour un sommet donné v de G , $Voisins(v)$ désigne l'ensemble des voisins de v .

- Que retourne $FONCTION(G)$ lorsque : G est le stable (graphe sans arêtes), le graphe complet, le chemin, et le cycle, tous sur 5 sommets ?
- Interpréter l'entier $FONCTION(G)$. Justifier soigneusement votre réponse.

Algorithme : FONCTION**Données :** Un graphe $G = (V, E)$.**Résultat :** Un entier.

```

1 début
2   si  $|E| = 0$  alors
3     retourner  $|V|$ ;
4   sinon
5     Choisir un sommet  $v$  de  $G$  de degré au moins 1;
6      $n_1 \leftarrow$  FONCTION( $G \setminus v$ );
7      $n_2 \leftarrow 1 +$  FONCTION( $G \setminus (\{v\} \cup \text{Voisins}(v))$ );
8     retourner  $\max(n_1, n_2)$ ;
9   fin
10 fin

```

c. Quelle est la complexité de cet algorithme (dans le pire des cas)?

- Exercice 13 -

Dans cet exercice, G désigne un graphe non orienté codé par un ensemble de sommets V , et un ensemble d'arêtes E . On se donne l'algorithme suivant :

Algorithme : ALGO**Données :** Un graphe $G = (V, E)$.**Résultat :** Un ensemble d'arêtes C .

```

1 début
2    $C \leftarrow \emptyset$ ;
3   pour tous les  $x \in V$  faire  $c(x) \leftarrow 0$ ;
4   pour tous les  $xy \in E$  faire
5     si  $c(x) = 0$  et  $c(y) = 0$  alors
6        $C \leftarrow C \cup \{xy\}$ ;
7        $c(y) \leftarrow 1$ ;
8        $c(x) \leftarrow 1$ ;
9     fin
10  fin
11  retourner  $C$ ;
12 fin

```

- Dérouler ALGO sur les cycles C_5 et C_6 .
- Quelle est la complexité de ALGO?
- Quelle propriété \mathcal{P} possède C ? Justifier.
- Proposer un graphe G , pour lequel l'exécution de ALGO retourne un ensemble C alors qu'il existe un ensemble C' vérifiant \mathcal{P} tel que $|C| < |C'|$.
- * Montrer en revanche que $|C| \geq |C'|/2$. (On dit que ALGO est une *2-approximation* des ensembles vérifiant \mathcal{P} .)

- Exercice 14 -

Un *arbre binaire enraciné* est un arbre qui possède une racine de degré 2 (ou 0 si l'arbre est réduit à sa racine) et dont les autres sommets sont de degré 3 ou de degré 1 (ces derniers éléments sont les *feuilles* de l'arbre).

- Montrer que le nombre de sommets d'un arbre binaire est impair.

- b. Calculer, en fonction de n , le nombre de feuilles d'un arbre binaire à n sommets.
- c. Quel est la méthode optimale (en nombre de découpes) afin de complètement séparer en carrés de chocolat une tablette de taille 4×6 .

- Exercice 15 -

Montrer que :

- a. Un graphe dont les sommets sont de degré au moins 2 contient un cycle.
- b. Un graphe sur n sommets ayant au moins n arêtes contient un cycle.
- c. Un graphe connexe sur n sommets possède au moins $n - 1$ arêtes.
- d. Si G est un graphe connexe, il existe au moins un sommet x tel que le graphe obtenu en supprimant x est connexe.
- e. Un graphe est un arbre si et seulement si il existe un unique xy -chemin entre tous les couples de sommets x et y .

- Exercice 16 -

Calculer le nombre d'arbres distincts sur l'ensemble de sommets $\{1, 2, \dots, n\}$, pour $n = 1, \dots, 5$. Proposer une formule générale.

- Exercice 17 - Codage de Prüfer.

Soit A un arbre avec racine sur un ensemble $X \subseteq \{1, \dots, n\}$. On associe à A une liste $L(A)$ d'éléments de X de la manière suivante :

- si A est réduit à sa racine, $L(A)$ est vide.

- sinon, on trie dans l'ordre croissant les feuilles f_1, \dots, f_k de A et on forme la liste $L' := N(f_1), \dots, N(f_k)$ où $N(f_i)$ est le voisin de f_i . En notant A' l'arbre obtenu en supprimant les feuilles de A , on pose $L(A) = L'.L(A')$ où $.$ est la concaténation.

- a. Calculer $L(A)$ lorsque A est l'arbre sur $\{1, \dots, 9\}$ de racine 8, et dont les arêtes sont $\{48, 38, 14, 24, 64, 93, 51, 71\}$.
- b. Quel arbre A sur $\{1, \dots, 9\}$ est codé par $9, 9, 1, 9, 9, 7, 2, 7$?
- c. Combien y a-t-il de suites possibles codant les arbres avec racine de $\{1, \dots, n\}$?
- d. En déduire que K_n possède n^{n-2} arbres couvrants.

- Exercice 18 -

Soit G le graphe sur $\{1, 2, 3, 4\}$ dont les arêtes sont $\{12, 13, 14, 23, 34\}$.

- a. Ecrire la matrice d'adjacence A_G de G .
- b. On note $D = (d_{i,j})$ la matrice 4×4 diagonale vérifiant que $d_{i,i}$ est le degré de i dans G . Ecrire la matrice $M := A_G - D$.
- c. Enlever une ligne et une colonne quelconque à M , et calculer le déterminant de la matrice 3×3 ainsi obtenue.
- d. Compter le nombre d'arbres couvrants de G .
- e. Le Théorème de Kirchhoff affirme que pour tout graphe, les deux résultats calculés précédemment sont égaux au signe près. Appliquer ce théorème afin de retrouver que K_n possède n^{n-2} arbres couvrants.

- Exercice 19 - Propriété de Helly.

Soit \mathcal{T} un ensemble de sous-arbres d'un arbre T . Montrer que si les arbres de \mathcal{T} s'intersectent deux à deux, alors il existe un sommet x appartenant à tous les arbres de \mathcal{T} .