- TD 5. Plus courts chemins. -

- Exercice 1 - Circuits de poids négatif.

Soit $D = (V, A)$ un graphe orienté et $\omega : A \to \mathbb{R}$ une fonction de poids.

a. Appliquer l'algorithme de Floyd-Warshall au graphe orienté D ayant pour ensemble de sommets $V = \{1, 2, 3, 4\}$, d'arcs $A = \{21, 13, 34, 32, 24\}$ et fonction de poids $\omega(21) = -1$, $\omega(13) = 3$, $\omega(34) = 1$, $\omega(32) = 8$, $\omega(24) = -7$.

b. Même question que précédemment mais après avoir inversé la direction de l'arc 24 (qui devient donc 42), tout en conservant son poids.

c. Comment peut-on détecter la présence d'un circuit de poids négatif après l'exécution de Floyd-Warshall?

- Exercice 2 - Propriétés des chemins orientés.

On suppose ici que D est un graphe orienté muni d'une fonction de poids sur les arcs. On suppose de plus qu'il existe un sommet v duquel on peut atteindre tous les sommets de D par des chemins orientés. Confirmer ou infirmer les assertions suivantes.

a. Si tous les poids des arcs sont distincts, il y a unicité de l'arborescence des plus courts chemins issue de v.

b. Parmi toutes les arborescences des plus courts chemins issues de v, l'une correspond à une arborescence couvrante de poids minimum issue de v.

c. On peut approximer à un facteur fixé près le poids total d'une arborescence des plus courts chemins issue de v par celui d'une arborescence couvrante de poids minimum issue de v.

d. L'algorithme de PRIM appliqué au cas orienté permet de calculer une arborescence couvrante de poids minimum issue de v.

- Exercice 3 - Algorithme.

L'algorithme suivant, dérivé de Floyd-Warshall en changeant l'ordre des boucles sur i et k, calcule-t-il des plus courts chemins lorsque D est sans circuit de poids négatif?

Pour i de 1 à n
  Pour j de 1 à n
    Pour k de 1 à n
      $d[i][j] = min(d[i][j], d[i][k] + d[k][j])$

- Exercice 4 - Coupes.

Soient x et y deux sommets d'un graphe orienté $D = (V, A)$ pour lesquels il existe un chemin orienté de x à y. Un ensemble $C \subseteq A$ est une *xy-coupe* si tous les chemins de x à y contiennent un arc de C

a. Montrer que si C est une xy-coupe, il existe un ensemble X de sommets tel que C contient tous les arcs de X à $V \setminus X$.

b. Montrer que le nombre maximum de xy-coupes disjointes est égal à la longueur minimum d'un xy-chemin.