LinBox: Présentation générale et Solutions génériques pour l'algèbre linéaire

Projet LinBox

Pascal Giorgi

Laboratoire de l'informatique du parallélisme
ENS Lyon - CNRS - INRIA

Introduction

- Projet LinBox :

  - 29 chercheurs (USA, Canada, France) .
    E.Kaltofen [NCSU], D.Saunders [Delaware], M.Giesbrecht [Waterloo], G.Villard [ENSL].
  - Financé par NSF, NSERC, CNRS et ENSL.
  - Site web: *http://www.linalg.org* et *http://www.linalg.net*

- Bibliothèque C++, avec licence GPL, (40000 lignes de code).

Principaux intérêts:

- Algèbre Linéaire.
- Matrices boîtes noires.
- Généricité sur les domaines de calcul.
- Solutions pour différents problèmes d'algèbre linéaire.

Plan de l'exposé

I) Présentation de la bibliothèque LinBox.

II) Généricité Algorithmes/Interfaces.

III) Polynôme minimal: implantation générique.

I) Présentation de la bibliothèque LinBox

Structure de LinBox

- Trois niveaux d'implantation (permettant la réutilisation et la reconfiguration)

- Matrices boîtes noires & domaines de coefficients respectent leurs interfaces.
- Interface= classe C++ virtuelle, template *archetype*:

  - définit l'interface commune aux objets.
  - fournit une instance de code compilé.
  - contrôle l'explosion de code.
  - utilisation optionnelle.

Structure des corps finis (domaine des coefficients)

- Encapsulation des types :Eléments, Générateur aléatoire d'éléments.
- Eléments: aucune information sur le corps d'appartenance.
- Corps: méthodes affectation, égalité, arithmétique, IO pour les éléments:

x = y	:	F.assign(x,y)
x == y	:	F.areEqual(x,y)
x = y + z	:	F.add(x,y,z)
cout<< x	:	F.write(cout,x)

- Intégration : LinBox directement, bibliothèques externes (au travers de wrappers).

Structure des matrices boîtes noires (Blackbox)

- Modèle des Blackbox paramétré par une classe de vecteurs (domaine d'application).
- Domaine de calcul passé comme paramètre ou specifié comme attribut.
- Seule l'application à un vecteur est autorisée :

$x = Ay$: A.apply(x,y)
$x = A^T y$: A.applyTranspose(x,y)

- Récupération des dimensions de la matrice:

A.rowdim()
A.coldim()

Algorithme dans LinBox

- **Basés sur des corps finis** :
  - Algorithmes probabilistes et heuristiques (Vérification, Las-Vegas, Monte-Carlo).
  - Polynôme minimal (Wiedemann/Lanczos, méthodes par blocs).
  - Préconditionnement (Rang , Déterminant).
  - Comparaison avec l'élimination de Gauss.

- **Méthodes disponibles pour les nombres rationnels et les entiers**:
  - Théorème des restes chinois avec les corps finis.
  - Reconstruction P-adique.
  - Forme normale de Smith (GAP package).
  - Systèmes linéaires diophantiens.
- **Implantations disponibles**:
  - Arithmétique spécialisée des corps finis (extensions, tables, polynomiales).
  - Solutions :
    - Système linéaire.
    - Rang.
    - Déterminant.
    - (Polynôme caractéristique).
    - Polynôme minimal.
  - Conditionneurs (Toeplitz, butterfly, creuse, diagonale).
  - Formes normales de matrices.

*

II) Généricité Algorithmes/Interfaces

Intérêts de la généricité ?

- Utilisation de bibliothèques externes efficaces (intégration facile)
- Evolution dynamique de la bibliothèque
- Modularité au niveau des solutions proposées

Performances préservées !

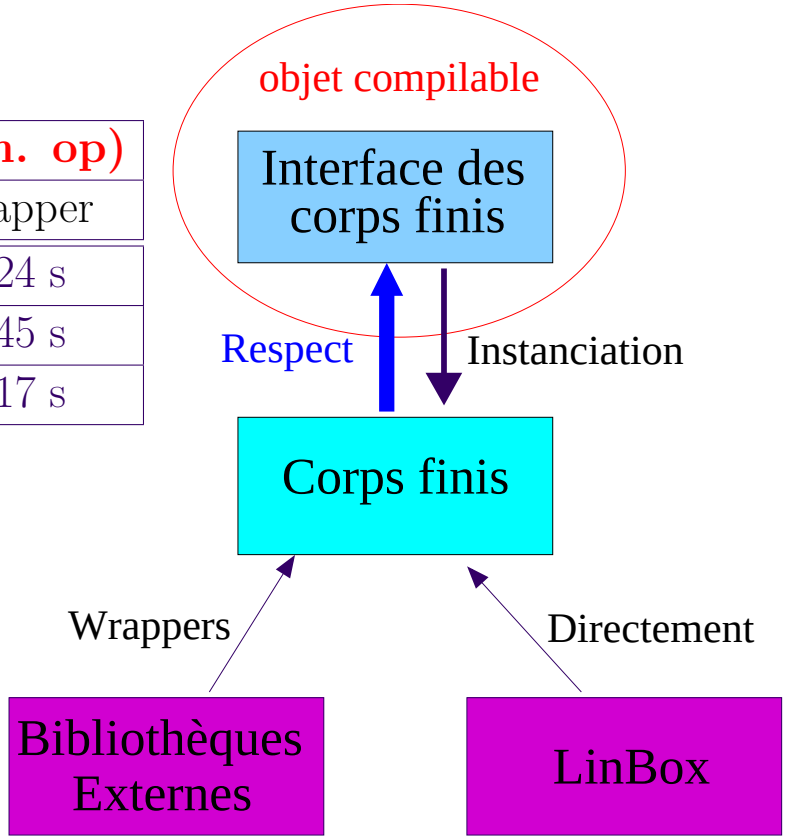
Quelle généricité ?

- Corps Finis : Opérations arithmétiques de base
- Vecteurs : Accès aux données (interface= STL)
- BlackBox : Produits matrices-vecteurs
- Matrices : Opérations de base + ...
- Algorithmes : Objets { Matrices, BlackBox, Vecteurs, Corps Finis }

Interfaces des Corps Finis

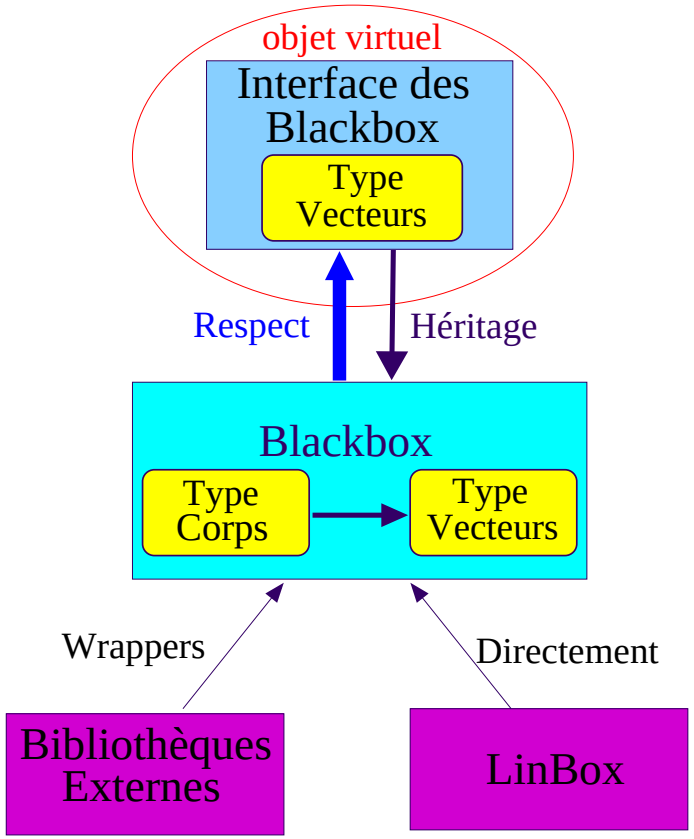
Timings for different LinBox field levels (arith. op)				
Library	Z/pZ	loop	Directly	Wrapper
NTL::ZZ_p	1978146594666	100.000	0.24 s	0.24 s
//	//	1.000.000	2.45 s	2.45 s
NTL::zz_p	553	300.000	0.16 s	0.17 s

- Interface:
  - objet à part entière
  - validations des corps finis
  - évite la réécriture (template)

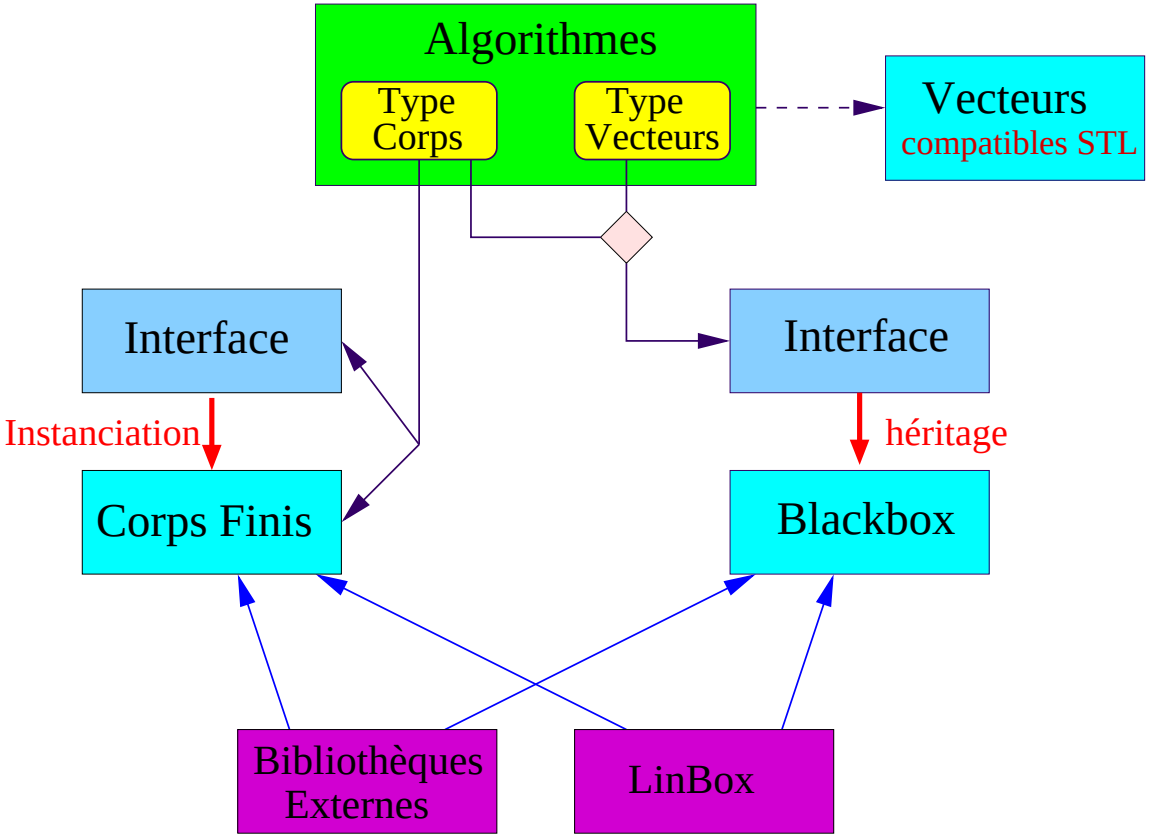


Interfaces des BlackBox

- Interface: purement virtuelle
- Paramétrée par un type de vecteur (compatible STL)
- Vecteurs: définis sur un type d'élément
- LinBox fournit 3 types de vecteurs :
  - Dense vector
  - Sparse sequence vector
  - Sparse map vector



LinBox: Implantation générique des Algorithmes



III) Polynôme minimal : implantation générique

Calcul du polynôme minimal.

Approche Wiedemann pour une matrice $\mathbf{A} \in \mathbf{K}^{\mathbf{n}\times\mathbf{n}}$:

- Etape I: Calcul de la suite $\mathbf{S} = \{\mathbf{UA^iV}\}_{\mathbf{0\le i\le 2n}}$, $\mathbf{U}$ et $\mathbf{V}$ vecteurs aleatoires.
- Etape II: Calcul de $\mathbf{G(x)}$ = polynôme générateur de $\mathbf{S}$ (Berlekamp/Massey).
- Polynôme minimal = polynôme miroir de $\mathbf{G(x)}$ (forte probabilité).

Généricité :

Etape II: Opérations de base sur les éléments de $\mathbf{K}$.

Etape I: Produits Matrice$\times$Vecteur (*Blackbox*).

Polynôme minimal par blocs

Même approche que pour le cas scalaire.

- Etape I: Calcul de la suite $\boldsymbol{S} = \{\mathbf{U}\mathbf{A}^{\mathbf{i}}\mathbf{V}\}_{0 \leq \mathbf{i} \leq \mathbf{N}}$, $\mathbf{U} \in \mathbf{K}^{\mathbf{p} \times \mathbf{n}}$ et $\mathbf{V} \in \mathbf{K}^{\mathbf{n} \times \mathbf{q}}$ des blocs vectoriel aléatoires.
- Etape II: Calcul de $\mathbf{G}(\boldsymbol{\chi})$ = polynôme matriciel générateur de $\boldsymbol{S}$.
- Polynôme minimal = polynôme miroir de $\mathbf{G}(\boldsymbol{\chi})$ (forte probabilité).

Généricité:

- Etape II: Opérations sur des matrices.

Problématique:

- Etape I: Produits Matrice$\times$Bloc vectoriel, Bloc vectoriel$\times$Bloc vectoriel (problème généricité/efficacité).

Solutions: Approche Blackbox (parallélisme)

Soient $\mathbf{A^i}$ une Blackbox et $\mathbf{S_i}$ une matrice.

- Version 1 (basique):
  $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ blocs vectoriels (type vecteur de vecteurs).

  $\mathbf{V} = \mathbf{A^i V}$: produits Blackbox-vecteur.
  $\mathbf{S_i} = \mathbf{UW}$: produits Vecteurs$\times$Vecteurs + construction matrice.

- Version 2 (rapide):
  $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ matrices (extraction colonne)+ synchronisation avec les vecteurs de $\mathbf{A}$.

  $\mathbf{V} = \mathbf{A^i V}$: produits Blackbox$\times$Colonne.
  $\mathbf{S_i} = \mathbf{UW}$: produit de matrices.

Solutions: Approche Matbox (produit de matrices rapide)

- Matbox = extension des Blackbox aux matrices :

  → Seule l'application à une matrice est autorisée.

- Soient A^i une Matbox et U, V, S_i des matrices.

  $V = A^i V$: produit Matbox-matrice.
  $S_i = UW$: produit de matrices.

Conclusion

- LinBox: réponse à une demande des utilisateurs.
- Traitement spécifique de problème concret (forme de Smith, Trefethen).
- La généricité dans LinBox est fortement définie par les interfaces.

Perspective

- Polynôme minimal par blocs: Comparaison avec d'autres implantations (ex: E.Thomé).
- Validaton du modèle matriciel.
- Interfaces génériques (projet Roxane).