Initiation à la combinatoire des mots - GMIN314

Gwenaël Richomme

gwenael.richomme@lirmm.fr

Cours 2

La dernière fois

Lemma

Soient A un alphabet et x, y des mots sur A. Sont équivalents :

1. $xy = yx$,
2. $\exists n, m,\ (n, m) \neq (0, 0)$ *and* $x^n = y^m$.
3. $\exists z$ *un mot et* $\exists p, q,\ x = z^p$ *et* $y = z^q$.

Conséquences

Lemma

Pour tout mot w non vide, il existe un unique mot primitif z tel que $w = z^n$ pour un entier $n \geq 1$.

Conséquences

Lemma

Pour tout mot w non vide, il existe un unique mot primitif z tel que $w = z^n$ pour un entier $n \geq 1$.

$$\sqrt{abaabaabaaba} = aba$$

Conséquences

Lemma

Pour tout mot w non vide, il existe un unique mot primitif z tel que $w = z^n$ pour un entier $n \geq 1$.

$$\sqrt{abaabaabaaba} = aba$$

Lemma

Soient u et v deux mots transposés.
Le mot u est primitif si et seulement si v est primitif.

Exercice à faire pour aujourd'hui

Démontrer le résultat suivant :

Lemma

*Pour des **mots** u, $x \neq \varepsilon$ et $y \neq \varepsilon$, sont équivalents :*

1. $ux = yu$
2. *il existe des mots r et s et un entier $k \geq 0$ tels que*
$$u = (rs)^k r,\ x = sr,\ y = rs$$

Conséquences

- transposition = conjugaison

Conséquences

- transposition = conjugaison
- la conjugaison est une relation d'équivalence

Un peu plus sur les équations

Theorem (Théorème du défaut)

Soit X un ensemble fini de mots.
S'il existe une équation non triviale entre les mots de X,
alors il existe un ensemble Y de cardinal plus petit que celui de X,
tel que pour tout x dans X, $x \in Y^*$.

Theorem (Théorème du défaut)

Soit X un ensemble fini de mots.
S'il existe une équation non triviale entre les mots de X,
alors il existe un ensemble Y de cardinal plus petit que celui de X,
tel que pour tout x dans X, $x \in Y^*$.

Corollary

S'il existe une équation non triviale entre deux mots x et y
alors x et y sont puissances d'un même mot.

Theorem (Lyndon and Schützenberger 1962)

x, y et z mots
$m, n, q \geq 2$ entiers
si $x^m y^n = z^q$ alors x, y et z ont même racine primitive.

Lemma

Soient u, v, w des mots tels que $uv \neq \varepsilon$ et $vw \neq \varepsilon$. Montrer que $uvw = wvu$ si et seulement s'il existe des mots x, y et des entiers n, p, q tels que $u = (xy)^n x$, $v = (yx)^p y$ et $w = (xy)^q x$.

Divers sur les équations

- La "théorie des équations" entre mots =
  un sous-domaine de la combinatoire des mots
  - définition formelle d'une équation à l'aide de morphismes

Divers sur les équations

- La "théorie des équations" entre mots =
  un sous-domaine de la combinatoire des mots
  - définition formelle d'une équation à l'aide de morphismes
- En 1977, G. S. Makanin : décidabilité de
  "est-ce qu'une équation possède une solution ?".
  - complexité exponentielle en espace
  - convenable pour des utilisations pratiques.

Divers sur les équations

- La "théorie des équations" entre mots =
  un sous-domaine de la combinatoire des mots
  - définition formelle d'une équation à l'aide de morphismes
- En 1977, G. S. Makanin : décidabilité de
  "est-ce qu'une équation possède une solution ?".
  - complexité exponentielle en espace
  - convenable pour des utilisations pratiques.
- 1999, W. Plandowski : complexité polynomiale en espace

Divers sur les équations

- La "théorie des équations" entre mots =
  un sous-domaine de la combinatoire des mots
  - définition formelle d'une équation à l'aide de morphismes
- En 1977, G. S. Makanin : décidabilité de
  "est-ce qu'une équation possède une solution ?".
  - complexité exponentielle en espace
  - convenable pour des utilisations pratiques.
- 1999, W. Plandowski : complexité polynomiale en espace
- Problème ouvert pour de nombreuses équations.

Divers sur les équations

- La "théorie des équations" entre mots =
  un sous-domaine de la combinatoire des mots
  - définition formelle d'une équation à l'aide de morphismes
- En 1977, G. S. Makanin : décidabilité de
  "est-ce qu'une équation possède une solution ?".
  - complexité exponentielle en espace
  - convenable pour des utilisations pratiques.
- 1999, W. Plandowski : complexité polynomiale en espace
- Problème ouvert pour de nombreuses équations.
- Pour plus de détails, voir chapitre 12 (V. Diekert) de [25]

Théorème de Fine et Wilf

Theorem

Soient x et y deux mots non vides. Soient p, q deux entiers.
Si x^p et y^q ont un préfixe commun de longueur $\geq$
$$|x|+|y|\text{-pgcd}(|x|,|y|),$$
alors x et y ont la même racine primitive.

Théorème de Fine et Wilf

Theorem

Soient x et y deux mots non vides. Soient p, q deux entiers.
Si x^p et y^q ont un préfixe commun de longueur $\geq$
$$|x|+|y|\text{-pgcd}(|x|,|y|),$$
alors x et y ont la même racine primitive.

Lemma

Cas $\mathrm{pgcd}(|x|,|y|) = 1$
si x^p et y^q ont un préfixe commun de longueur $\geq$ à $|x|+|y|$-1
alors x et y ont la même racine primitive.

Lemme de périodicité

Le corollaire suivant du théorème de Fine et Wilf est souvent appelé *lemme de périodicité* :

Corollary

Si p et q sont deux périodes d'un mot non vide x telles que

$$p + q - \mathrm{pgcd}(p, q) \leq |x|$$

alors $\mathrm{pgcd}(p, q)$ est aussi une période de x.

Optimalité (cf aussi [25])

Optimalité (cf aussi [25])

Définitions

mots de Fibonacci :

$$\begin{cases} f_0 = a, \\ f_1 = ab, \\ f_n = f_{n-1} f_{n-2},\ (n \geq 2). \end{cases}$$

Lemma (Exercice 5.9)

pour tout entier $n \geq 1$, *pgcd*$(|f_n|, |f_{n+1}|)$ = *1*

Lemma (Propriété 5.13)

Pour $n \geq 3$, f_n^2 *et* f_{n-1}^3 *ont un préfixe commun de longueur*

$$|f_{n+1}| - 2 = |f_n| + |f_{n-1}| - 2.$$

Lemma (Propriété 5.7)

Pour tout $n \geq 0$, f_n *est un mot primitif.*

Pourquoi Fibonacci ?

Définitions

mots de Fibonacci :

$$\begin{cases} f_0 = a, \\ f_1 = ab, \\ f_n = f_{n-1} f_{n-2}, \ (n \geq 2). \end{cases}$$

Pourquoi Fibonacci ?

Définitions

mots de Fibonacci :

$$\begin{cases} f_0 = a, \\ f_1 = ab, \\ f_n = f_{n-1}f_{n-2}, \ (n \geq 2). \end{cases}$$

Nombres de Fibonacci

$$\begin{cases} F_0 = 1, \\ F_1 = 2, \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \ n \geq 2. \end{cases}$$

Pourquoi Fibonacci ?

Définitions

mots de Fibonacci :

$$\begin{cases} f_0 = a, \\ f_1 = ab, \\ f_n = f_{n-1}f_{n-2},\ (n \geq 2). \end{cases}$$

Nombres de Fibonacci

$$\begin{cases} F_0 = 1, \\ F_1 = 2, \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}\ \ n \geq 2. \end{cases}$$

Propriétés de base

- Pour tout entier $n \geq 0$, $|f_n| = F_n$.
- Pour tout entier $n \geq 0$, $|f_n|_a = F_{n-1}$.
- Pour tout entier $n \geq 0$, $|f_n|_b = F_{n-2}$.

Partie 1 optimalité

Lemma (Exercice 5.9)

pour tout entier $n \geq 1$, pgcd($|f_n|, |f_{n+1}|$) = 1

Exercice sur les nombres de Fibonacci... hors cadre du cours

Partie 2 optimalité

Définition

Pour $n \geq 1$, notons g_n le préfixe de longueur $F_n - 2$ de f_n.

Partie 2 optimalité

Définition

Pour $n \geq 1$, notons g_n le préfixe de longueur $F_n - 2$ de f_n.

$$g_1 = \varepsilon$$

Partie 2 optimalité

Définition

Pour $n \geq 1$, notons g_n le préfixe de longueur $F_n - 2$ de f_n.

$$g_1 = \varepsilon$$
$$g_2 = a$$

Partie 2 optimalité

Définition

Pour $n \geq 1$, notons g_n le préfixe de longueur $F_n - 2$ de f_n.

$$g_1 = \varepsilon$$
$$g_2 = a$$
$$g_3 = aba$$

Partie 2 optimalité

Définition

Pour $n \geq 1$, notons g_n le préfixe de longueur $F_n - 2$ de f_n.

$$g_1 = \varepsilon$$
$$g_2 = a$$
$$g_3 = aba$$
$$g_4 = abaaba$$

Partie 2 optimalité

Définition

Pour $n \geq 1$, notons g_n le préfixe de longueur $F_n - 2$ de f_n.

$$g_1 = \varepsilon$$
$$g_2 = a$$
$$g_3 = aba$$
$$g_4 = abaaba$$
$$g_5 = abaababaaba$$

Partie 2 optimalité

Définition

Pour $n \geq 1$, notons g_n le préfixe de longueur $F_n - 2$ de f_n.

$$g_1 = \varepsilon$$
$$g_2 = a$$
$$g_3 = aba$$
$$g_4 = abaaba$$
$$g_5 = abaababaaba$$

Lemma

Pour $n \geq 2$, f_n^2 et f_{n-1}^3 ont g_{n+1} comme préfixe commun.

Partie 2 optimalité

Définition

Pour $n \geq 1$, notons g_n le préfixe de longueur $F_n - 2$ de f_n.

$$\begin{aligned} g_1 &= \varepsilon \\ g_2 &= a \\ g_3 &= aba \\ g_4 &= abaaba \\ g_5 &= abaababaaba \end{aligned}$$

Lemma

Pour $n \geq 2$, f_n^2 et f_{n-1}^3 ont g_{n+1} comme préfixe commun.

Conséquence de :

- pour $n \geq 1$, $g_{n+1} = f_n g_{n-1}$ et
- pour $n \geq 2$, $g_{n+1} = f_{n-1} g_n = f_{n-1}^2 g_{n-2}$.

Exercice

Montrer :

- pour $n \geq 2$, n pair, $f_n = g_n ab$
- pour $n \geq 2$, n impair, $f_n = g_n ab$
- pour $n \geq 2$, g_n est un palindrome
- pour $n \geq 1$, $g_{n+1} = f_n g_{n-1}$ et
- pour $n \geq 2$, $g_{n+1} = f_{n-1} g_n = f_{n-1}^2 g_{n-2}$.

Partie 3 optimalité

Lemma (Propriété 5.7)

Pour tout $n \geq 0$, f_n est un mot primitif.

Conséquence de :
Soit φ le morphisme, appelé *morphisme de Fibonacci*, défini par :

$$\varphi \begin{cases} a \mapsto ab \\ b \mapsto a \end{cases}$$

Lemma

Pour tout entier $n \geq 0$, $f_n = \varphi^n(a)$.

Partie 3 optimalité

Lemma (Propriété 5.7)

Pour tout $n \geq 0$, f_n est un mot primitif.

Conséquence de :
Soit φ le morphisme, appelé *morphisme de Fibonacci*, défini par :

$$\varphi \begin{cases} a \mapsto ab \\ b \mapsto a \end{cases}$$

Lemma

Pour tout entier $n \geq 0$, $f_n = \varphi^n(a)$.

Lemma

Montrer que le morphisme φ est injectif.

Parenthèse

Toute suite de mots définie par une relation de récurrence peut être définie à l'aide d'un morphisme.

Voir locally catenative sequences

Partie 3 optimalité (suite)

Lemma

Pour tout $n \geq 0$, f_n est un mot primitif.

Partie 3 optimalité (suite)

Lemma

Pour tout $n \geq 0$, f_n est un mot primitif.

Lemma

Pour tout mot w, w est primitif si et seulement si $\varphi(w)$ est primitif.

Partie 3 optimalité (suite)

Lemma

Pour tout $n \geq 0$, f_n est un mot primitif.

Lemma

Pour tout mot w, w est primitif si et seulement si $\varphi(w)$ est primitif.

(φ préserve les mots primitifs)

Partie 3 optimalité (suite)

Lemma

Pour tout $n \geq 0$, f_n est un mot primitif.

Lemma

Pour tout mot w, w est primitif si et seulement si $\varphi(w)$ est primitif.

(φ préserve les mots primitifs)

Question

Est-ce que tout morphisme préserve les mots primitifs ?