

Module Image, Montpellier, 28 mars 2018

Modèles thermiques, cinématiques et mécaniques pour l'interprétation des images

A. Chrysochoos, S. Le Floch, H. Louche, Y. Monerie, B. Wattrisse

Laboratoire de Mécanique et Génie Civil, CNRS, Université de Montpellier



Une image ?

- **représentation bidimensionnelle** d'un objet
- accessible ou non à l'**observation** visuelle
- prise à un **instant** donné
- sous un **grandissement** donné



recherche Web, mot-clé : « image »

⇒ évolution dans le plan d'une **grandeur** :
intensité lumineuse, « température », ...

Quelques images pour commencer ...

représentation 2D
de la « réalité observée »



peintures rupestres, Lascaux, env. -15000

n 2D \Rightarrow « 3D surfacique »



jeux de miroirs dans « The lady from Shanghai », O. Welles 1947

2D \Rightarrow « 3D volumique »



cliché radiographique, W. Röntgen, 1896

modèle \Rightarrow + information



affiche publicitaire « Stop global warming », Greenpeace

répartition « continue » d'une grandeur :
intensité lumineuse, atténuation RX, ...



Plan

- 1 – quelques mécanismes de génération des images
- 2 – traitement des images
- 3 – modèles « physiquement fondés »
- 4 – liens entre imagerie, inversion et identification
- 5 – prise en compte des biais
- 6 – conclusions



Plan

1 – quelques mécanismes de génération des images

Génération des images

1) en observant **différentes grandeurs** :

– **rayonnements** électromagnétiques :

émis/réfléchis/transmis

RX/UV/visible/IR/THz

imageurs « photoniques »

– flux de **particules** associées à une interaction « **rayonnement/matière** » :

SEM, TEM, XRD, ...

– **interactions** de surface :

AFM

– propriétés de **magnétisation** :

MRI

– propagation **ondes mécaniques** :

échographie, sismographie, ...

2) en utilisant ou non des « **sollicitations** » extérieures

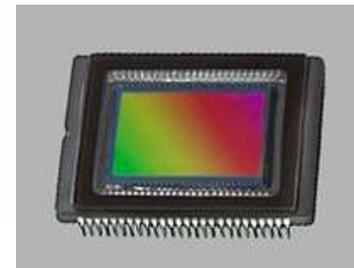
– imagerie « **passive** » : photographie, TIR, ...

– imagerie « **active** » : échographie, TSA, SEM, XRD, CT, MRI, AFM, ...

Imageurs photoniques « monochromes »

très souvent :

- images \Leftarrow conversion/numérisation **rayonnement électromagnétique** (1 gamme de λ : visible, ...)
- \Leftarrow **capteurs photoniques matriciels** (CCD, CMOS)
- \Leftarrow après passage éventuel dans une « **optique** »



\neq technologies capteurs \Rightarrow \neq gammes de λ (RX, UV, IR, THz)

Types d'imagerie photonique

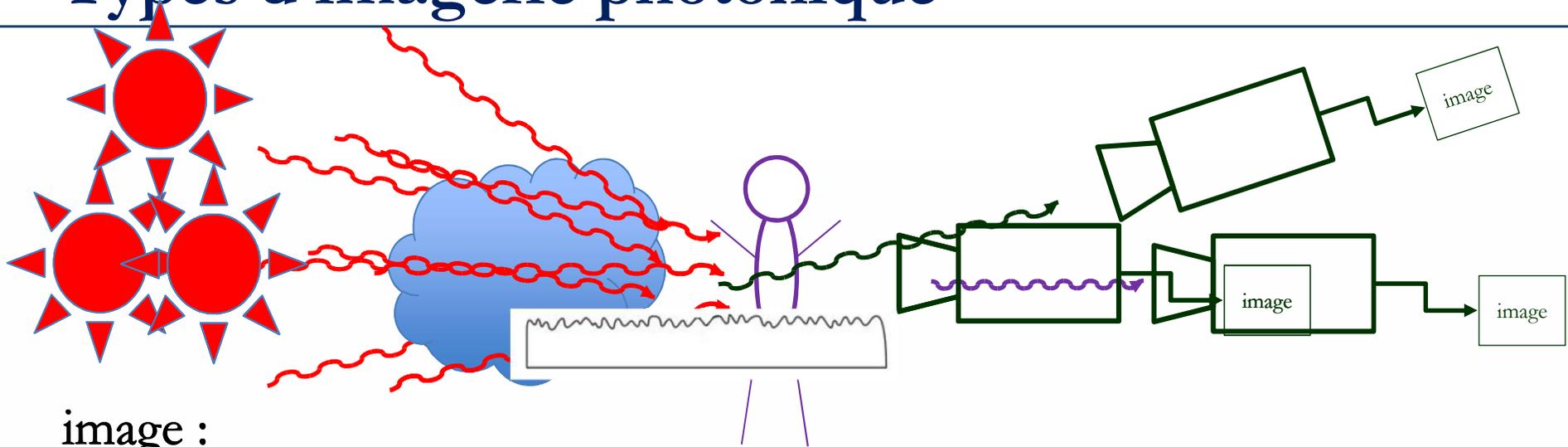


image :

⇐ rayonnement **émis** (source) + **atténué** (atmosphère, ...)

⇐ rayonnement **réfléchi**

⇐ rayonnement **transmis**

⇒ mode d'imagerie en « **transmission** »

– nécessité rayonnement « **suffisamment énergétique** » pour traverser la matière (RX, lumière visible, rayonnement THz, ...)

– possibilité extraire **informations volumiques** (tomographie)



Autres types d'imagerie

possibilité numériser **autres grandeurs** :

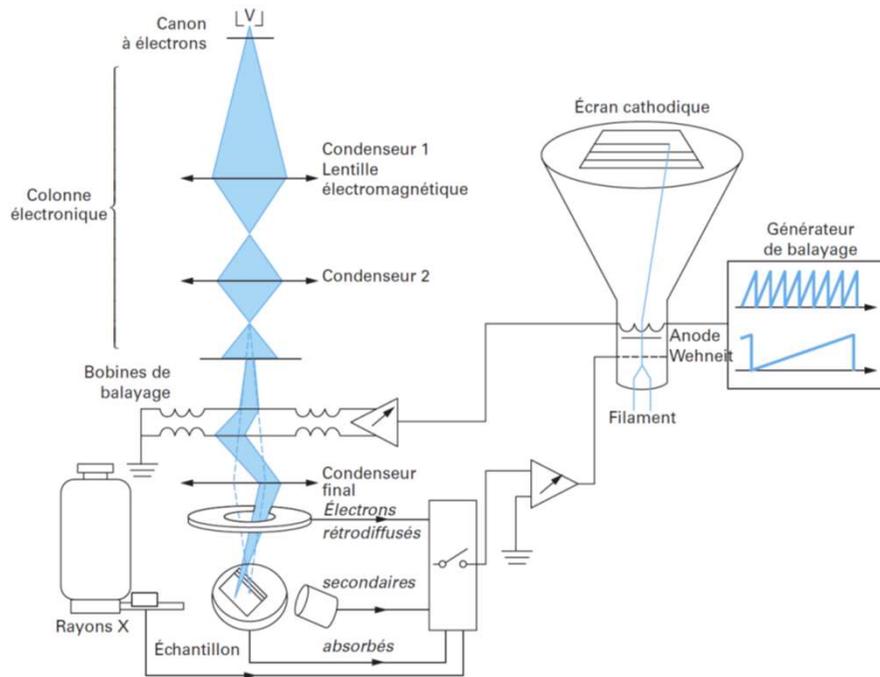
- **particules** associées à une **interaction rayonnement/matière** : SEM, TEM, XRD, ...
- **interactions** de **surface** : AFM
- propriétés de **magnétisation** : IRM
- **ondes mécaniques** : échographie, sismographie, ...
- ...

en général systèmes d'**imagerie « actifs »** :

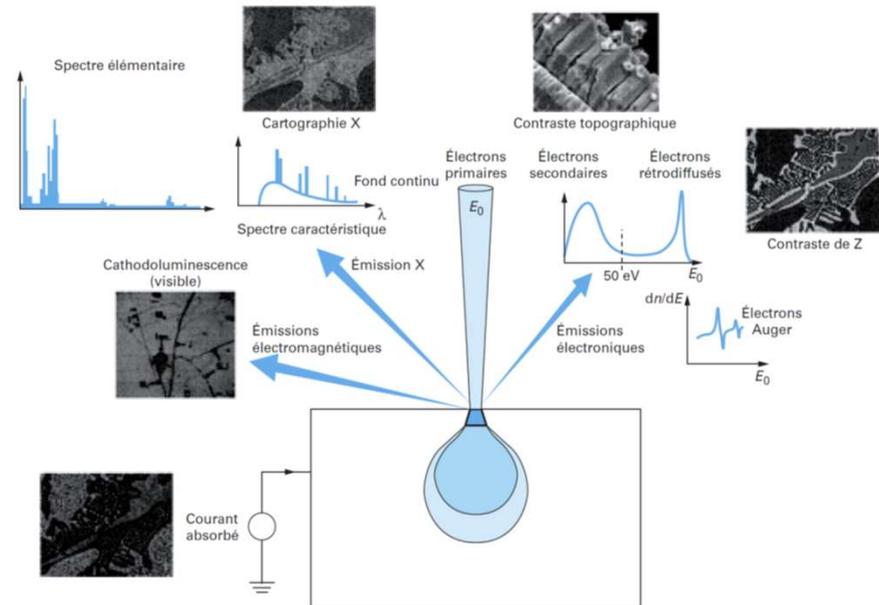
une source d'excitation permettant la génération de l'image

Imagerie électronique

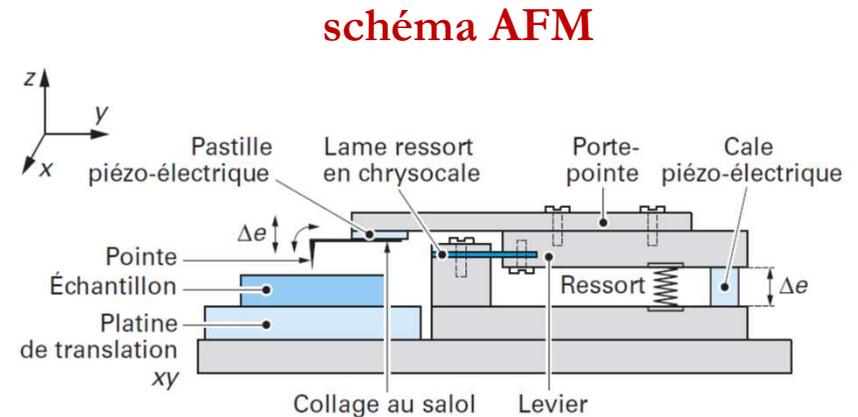
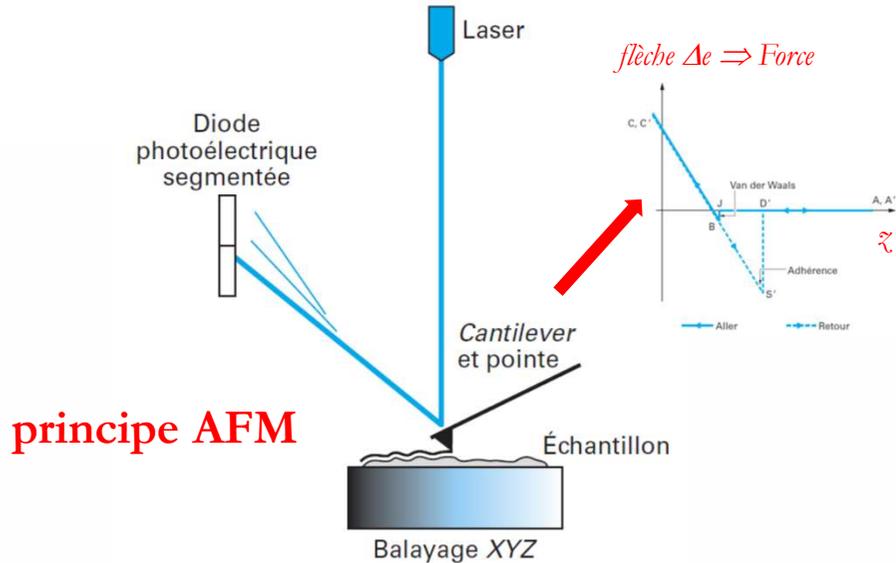
- **génération** du faisceau incident
- **interaction** avec la « surface »
- **analyse** particules/photons émis
 - ⇒ « **grandeur** »
- **balayage** (émission + analyse)
 - ⇒ « **image** »



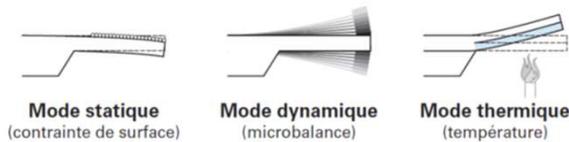
≠ interactions électrons/matière
 ⇒ **≠ types d'imagerie** ...



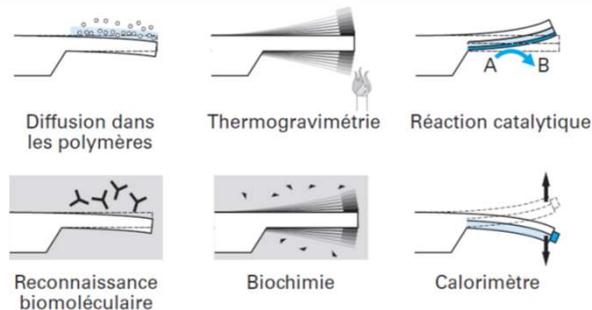
Imagerie d'interactions de surface



modes utilisation AFM



interactions



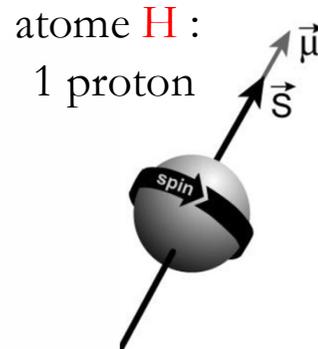
- **génération** de la sollicitation (mode contact, « tapping », frottement, ...)
- **interaction** avec la surface
- **analyse** réponse de la poutre \Rightarrow « **grandeur** »
- **balayage** surface (platines XY) \Rightarrow « **image** »

Imagerie par excitation magnétique nucléaire

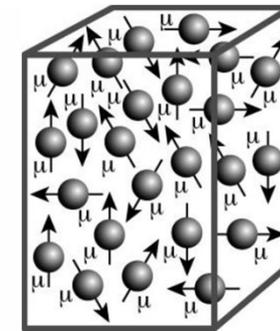


IRM Philips 3T

principe IRM



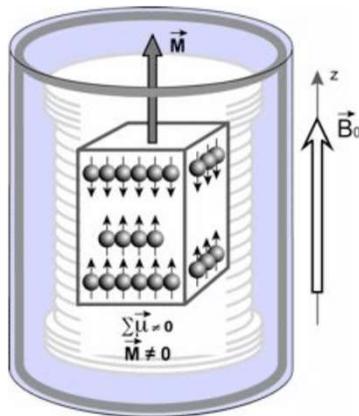
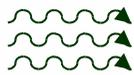
corps humain : %_{at} H \approx 62%
pas aimantation macro



$$\vec{M} = \sum \vec{\mu}_i = \vec{0}$$

\Rightarrow moment magnétique
élémentaire $\vec{\mu}$

onde radio $\vec{B}_1(2\pi f_1 t)$
 f_1 : résonance proton
 $f_1 \approx 42.58\text{MHz}$ sous 1T



$$\vec{M} = \sum \vec{\mu}_i \neq \vec{0}$$

application \vec{B}_0

\Rightarrow dév^t. aimantation macro

antenne de détection

\Rightarrow évolution de \vec{M} (relaxations longi. & transv.)

- **génération** de la sollicitation $\vec{B}_0, \vec{B}_1(2\pi f_1 t)$
- **résonance** atomes H
- **analyse** relaxation de \vec{M}
- **codage** fréquence/phase (gradient \vec{B}_0)

\Rightarrow « **image** »

Formation des images

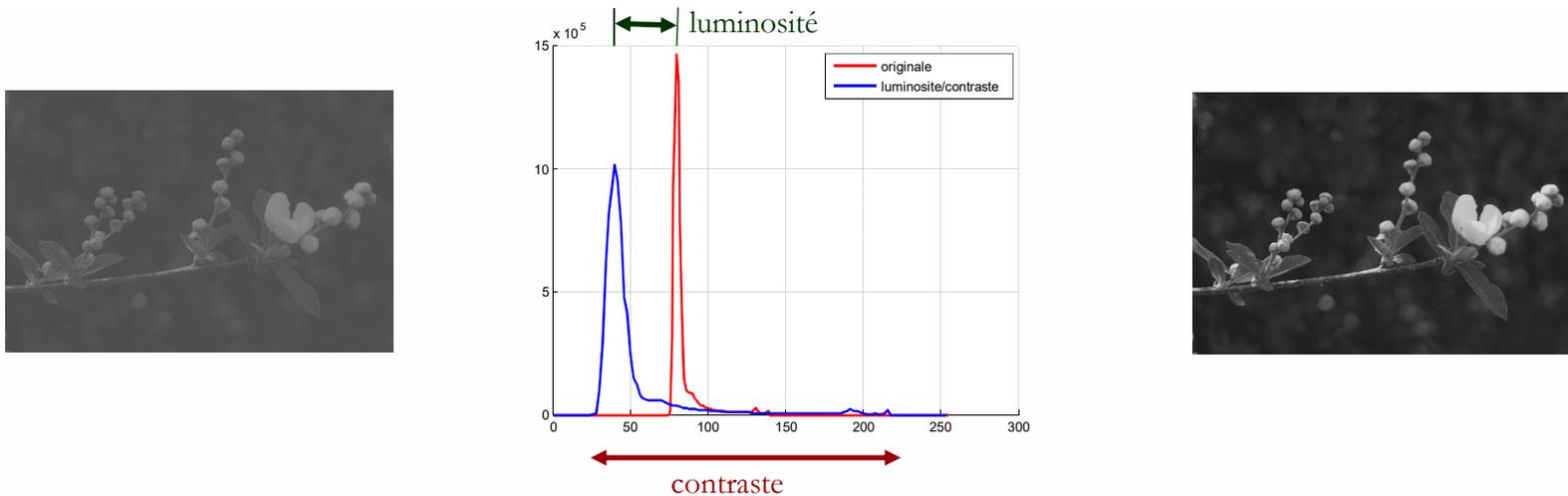
- utilisation de **capteurs matriciels** (cf. CCD, CMOS)
 - ⇒ mode « instantané » (snapshot)
 - numérisation simultanée grandeur observée \forall pixel
 - valeur « instantanée » : moyenne sur temps intégration
- utilisation de **capteurs ponctuels** (cf. MEB, AFM, ...)
 - ⇒ mode « balayage » (« continu » ou « point par point »)
 - numérisation successive grandeur observée
 - durée acquisition = temps balayage

Plan

2 – traitement des images

Opérations sur la donnée brute : « algébriques »

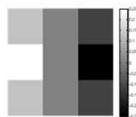
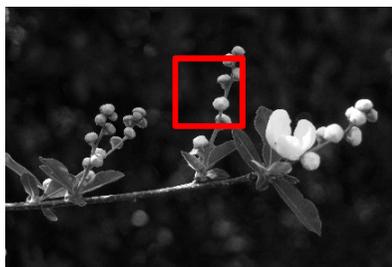
- **corrections histogramme** (contraste, luminosité, ...)



- **filtrage convolutif** : calcul gradient, filtre gaussien, ...

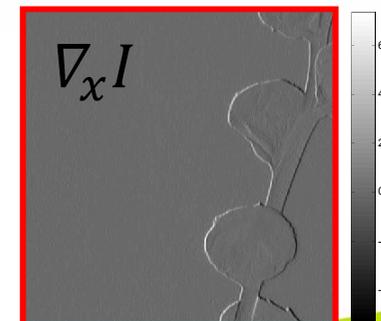
rappel : $f * g(x) = \int f(x - y)g(y)dy$ (N.B. : OK si f et g d'énergie finie)

I



$$F_x = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow F_x * I = \nabla_x I$$

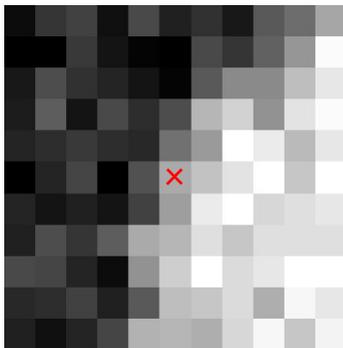


filtre linéaire \Rightarrow inversible !

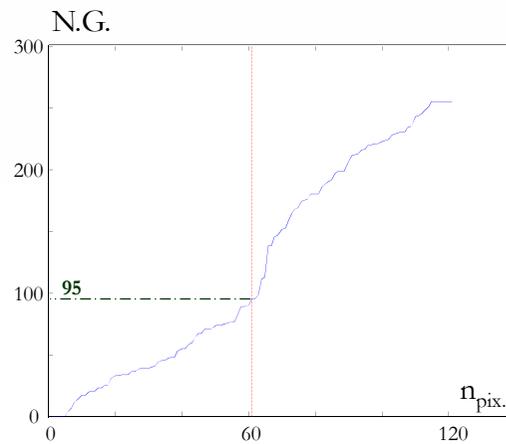
Opérations sur la donnée brute : « classement »

– opérations de classement :

cf. tracé histogramme, **filtre median**



taille : 11 × 11



– préservation **contours**

– filtre **non-linéaire**

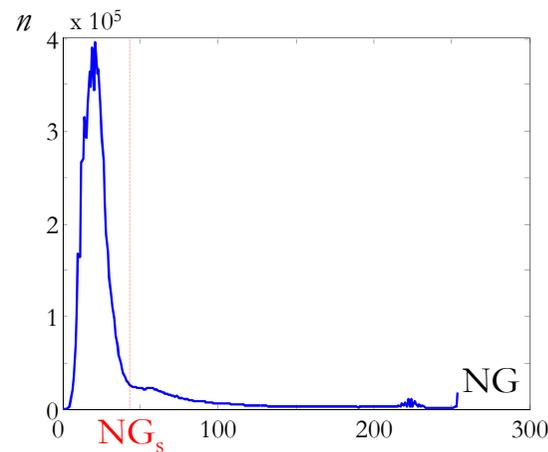
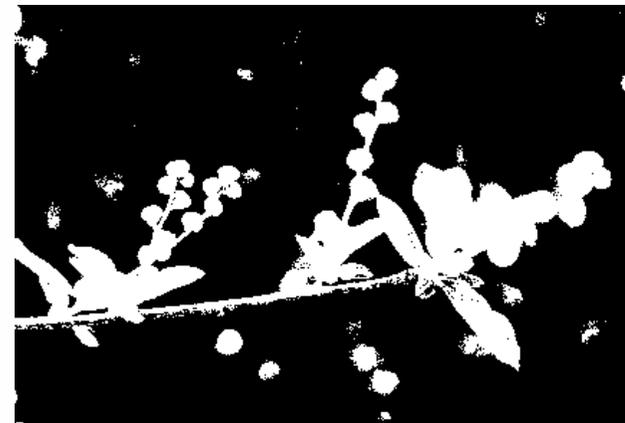
⇒ **non inversible !**

Opérations sur la donnée brute : « booléennes »

- opérations **booléennes** :
seuillages, masquage, ...

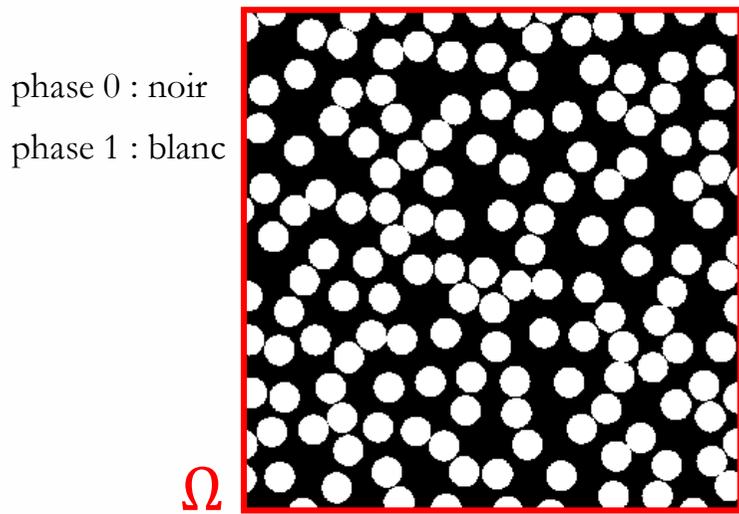


seuillage à NG_s



Opérations sur la donnée brute : « statistiques »

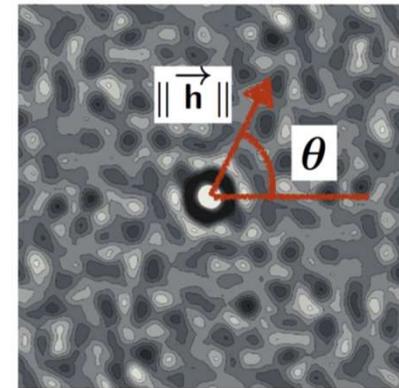
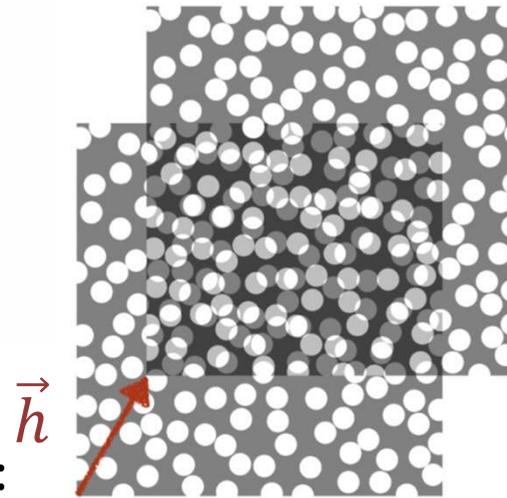
- manipulations **statistiques** :
 estimation : moyenne, espérance, variance, ...



fonction caractéristique des phases
 $\kappa_1(\vec{X})$

fraction volumique : $f_1 = \left\langle \kappa_1(\vec{X}) \right\rangle_{\vec{X} \in \Omega}$

$f_1 \approx 42.7\%$



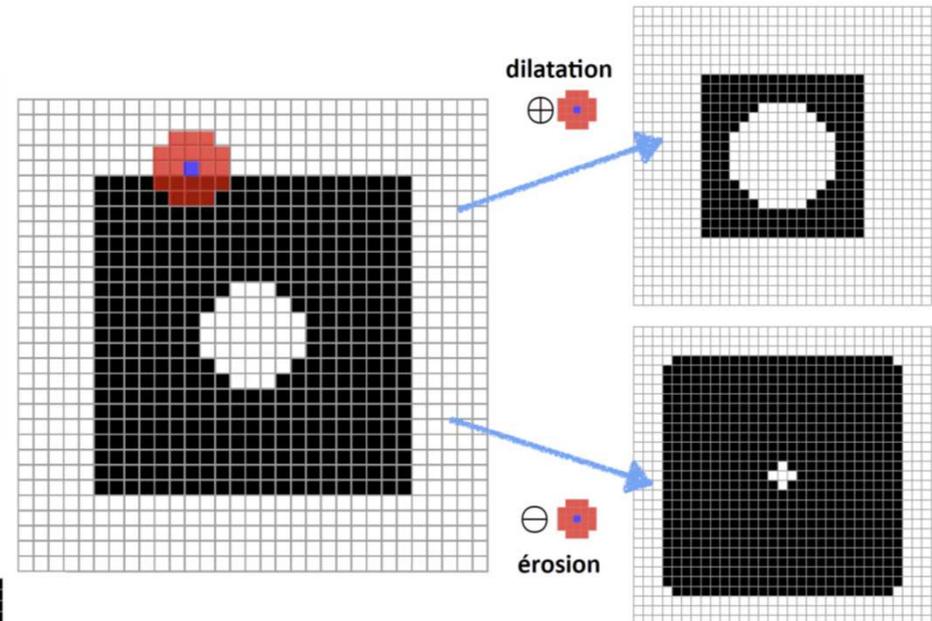
covariance des phases i et j :

$$Cov_{ij}(\vec{h}) = \left\langle \kappa_i(\vec{X}) \kappa_j(\vec{X} + \vec{h}) \right\rangle_{\vec{X} \in \Omega}$$

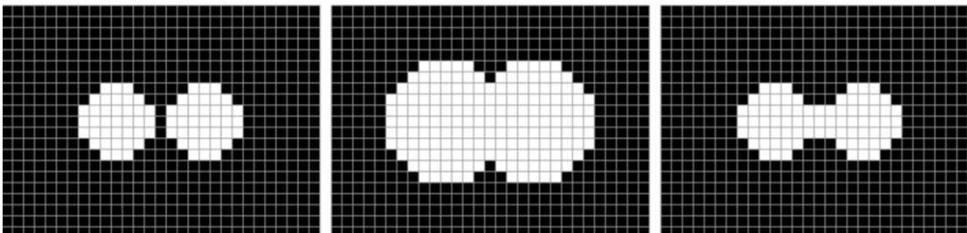
Opérations sur la donnée brute : morphologiques

– morphologie mathématique

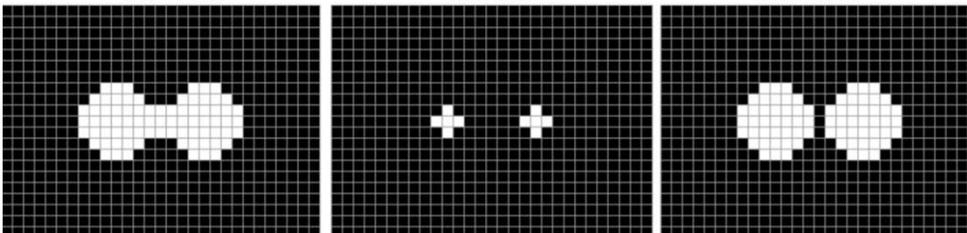
dilatation/érosion



Fermeture = dilatation + érosion



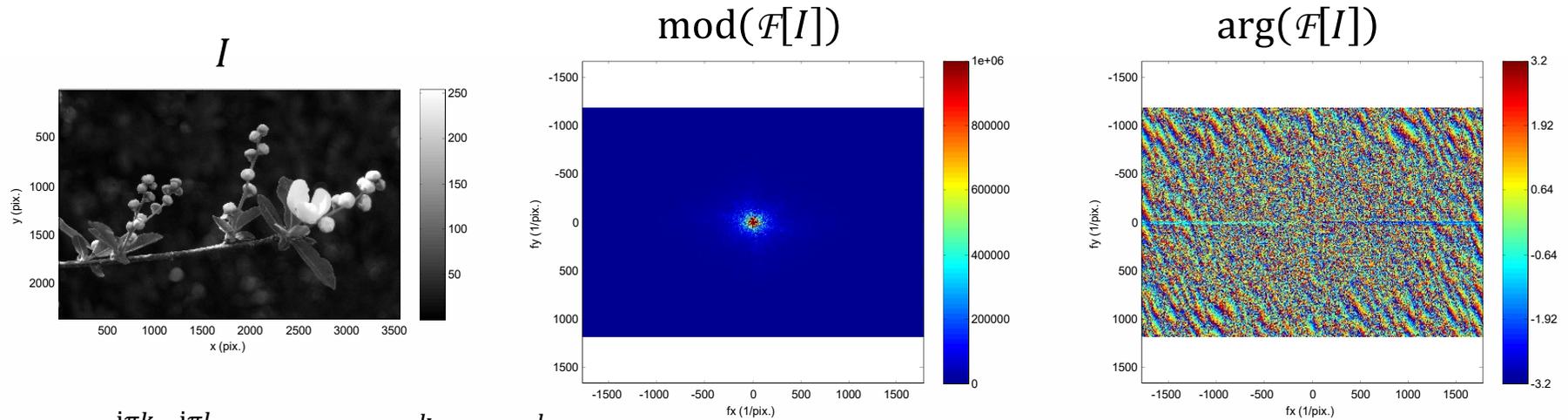
Ouverture = érosion + dilatation



ouverture/fermeture

Opérations sur la donnée brute : transformées

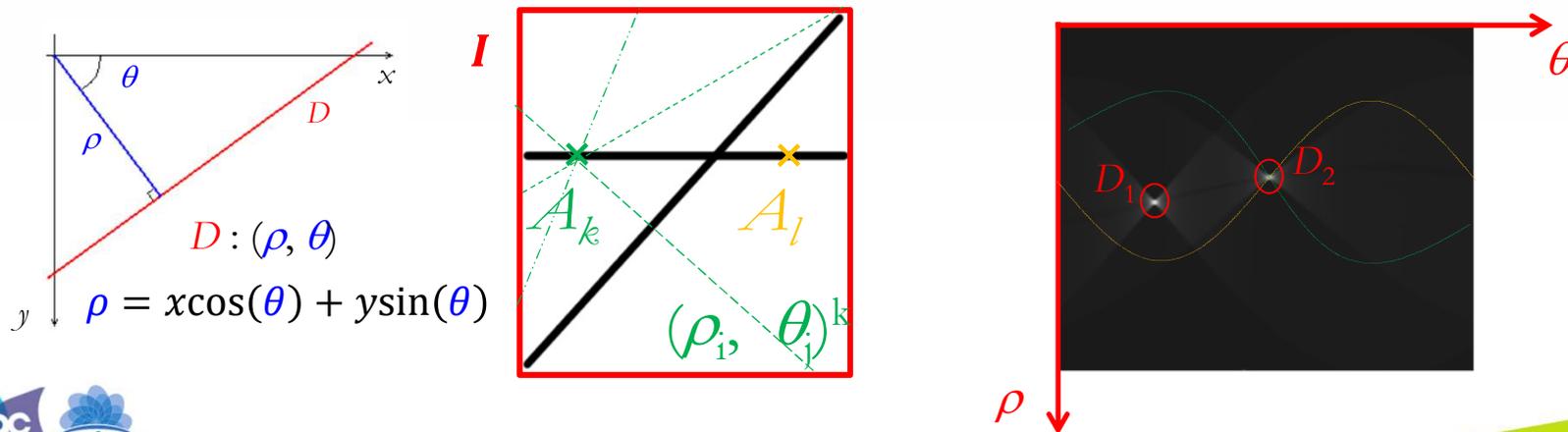
– transformée de Fourier



$$F[I](k, l) = \frac{e^{i\pi k}}{n_k} \frac{e^{i\pi l}}{n_l} \sum_{m,n} I_{mn} e^{-2i\pi m \frac{k}{n_k}} e^{-2i\pi n \frac{l}{n_l}}$$

propriétés T.F. \Rightarrow
simplification calculs : convolution, ...

– transformée de Hough \Rightarrow détection droites, ...



Plan

3 – modèles « physiquement fondés »

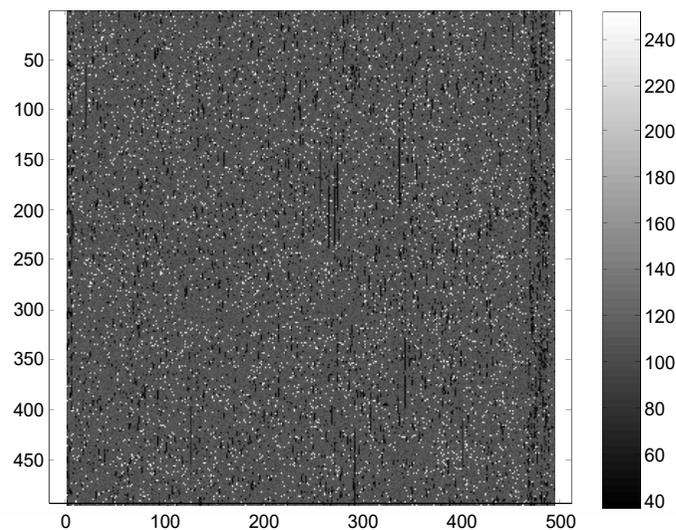
Analyse *via* un modèle

– image : contient une **information très riche**

par ex. : image 1024×1024 pixels codée sur 8 bits

⇒ 1 048 576 caractères ASCII

77 pages de 90 lignes de 150 caractères ...



thèse environ 200 pages
(sans figures ...)

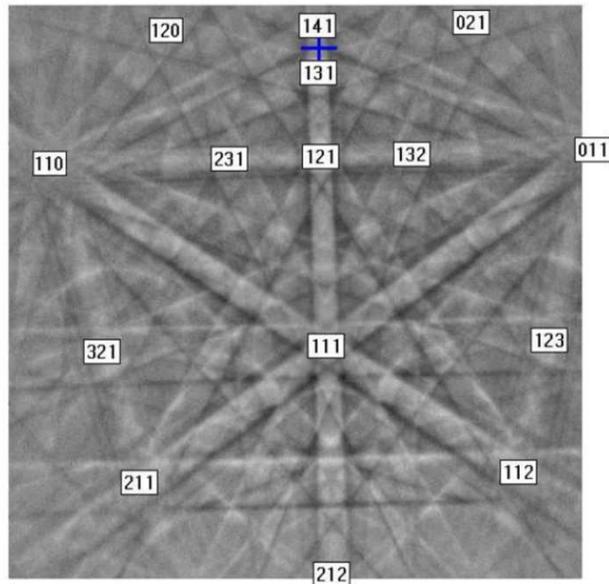
⇒ possibilité d'**extraire** d'**autres grandeurs** d'intérêt

⇐ **modèle** (+ éventuellement inversion ...)

Analyse *via* un modèle : EBSD

analyse EBSD :

– interprétation clichés de diffraction (surface)



modèle de diffraction : loi de Bragg

$$2d_{hkl} \sin(\theta) = n\lambda$$

bande : famille de plans diffractants

intersection bandes : famille d'axes

position bandes : orientation cristallographique

largeur bande : paramètre maille (d_{hkl})

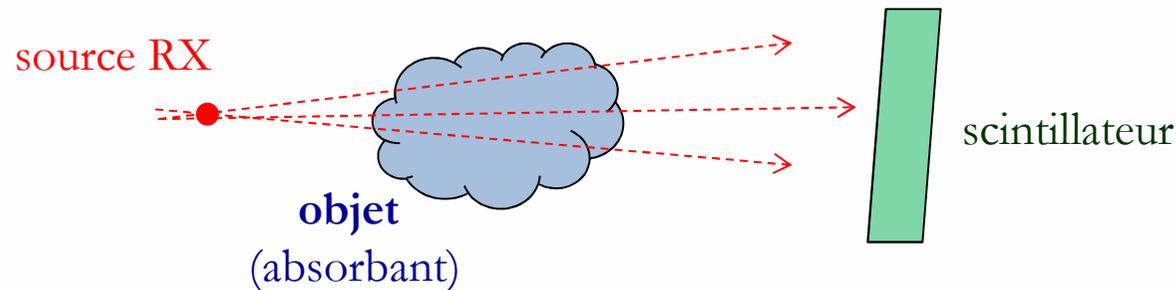
⇒ **maille + orientation** réseau cristallin
(mesure **ponctuelle**)

⇒ **balayage** surface (**cartographie** microstructure)

Analyse *via* un modèle : CT

tomodensitométrie :

⇒ analyse multiples clichés (atténuation rayonnement : RX, ...)



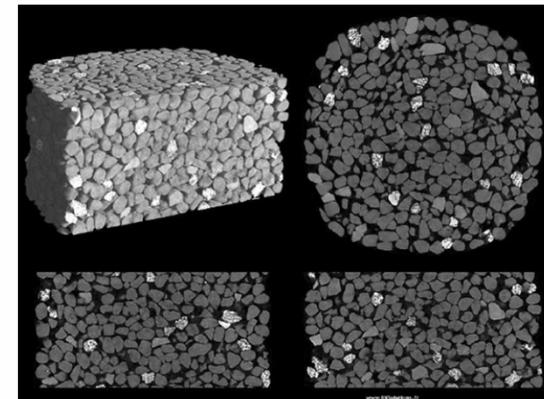
- **propagation** : ligne droite
- **atténuation** : loi de Beer-Lambert

$$dI = -\alpha(s)I(s)ds$$

- **reconstruction** (pb. inverse) :

approches analytiques ⇒ rétroprojection filtrée,
transf. Radon, ...

approches algébriques (itératives) ⇒ méthodes projectives,
statistiques (réduction du bruit), rapides (réduction des vues)



⇒ **reconstruction** $\alpha(x, y, z)$

lié à : densité, phase, ...

Analyse *via* un modèle : sources de chaleur (1)

IRT : thermographie infrarouge

⇒ analyse séquence d'images thermiques

utilisation de l'**équation de la chaleur**

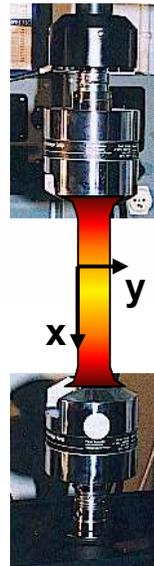
chaleur associée à la variation de température

$$\rho C_{\alpha_j} \dot{T} + \text{div} \vec{q} = w_{ch}$$

pertes de chaleur par conduction

ρ : masse volumique
 C : chaleur spécifique
 T : température absolue
 \vec{q} : vecteur courant de chaleur

conduction isotrope : Fourier



$$w_{ch} = \rho C_{\alpha_j} \dot{T} - k \Delta_{x,y,z} T \quad : \quad \mathbf{3D}$$

fuites latérales (conv. + ray.)
 hypothèse PPT
 T_0 uniforme

$$\bar{w}_{ch} = \rho C \left(\dot{\bar{\theta}} + \frac{\bar{\theta}}{\tau} \right) - k \Delta_{x,y} \bar{\theta} \quad : \quad \mathbf{2D}$$

problème inverse

⇒ résolution directe

⇒ résolution itérative

Analyse *via* un modèle : sources de chaleur (2)

principe de la résolution directe :

⇐ substitution de températures filtrées dans l'équation de la chaleur

bruit thermique :

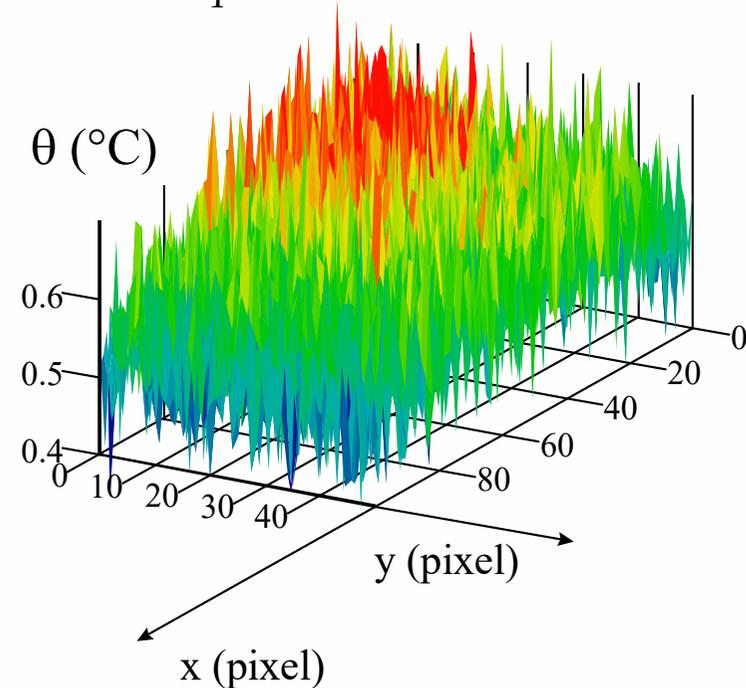
- spectre uniforme
- distribution gaussienne

calcul des sources de chaleur :



$$\frac{d}{dt}, \Delta_{x,y}$$

amplification du bruit (Δ !!)



filtrage des données : obligatoire !!!

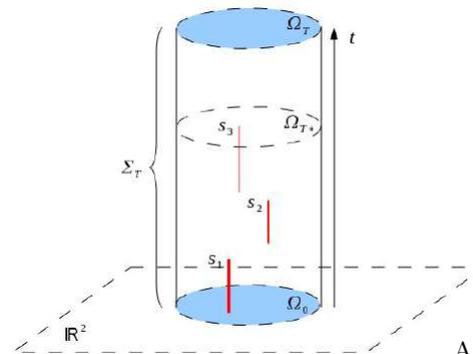
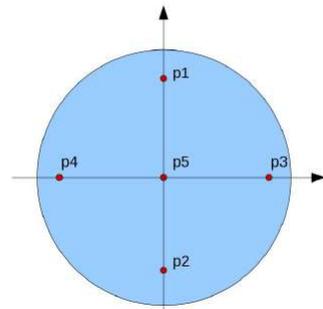
- filtrage convolutif (FFT), filtrage median, ...
- projection sur des bases + troncature :
solution spectrale, moindres carrés, SVD, ...

Analyse *via* un modèle : sources de chaleur (3)

principe de l'analyse inverse :

- frontières avec des **mesures surabondantes** (température, flux)
- **restrictions** des sources (géométrie, distribution, évolution temporelle)

⇒ plusieurs stratégies possibles ...



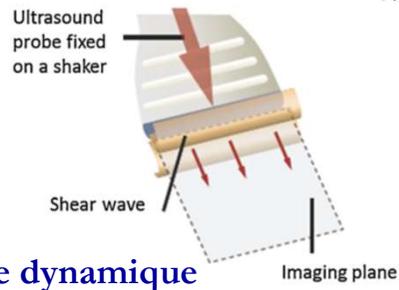
ANR QIRD_THS
(N. Auffray)

... mais en pratique peu d'algorithmes de reconstruction !

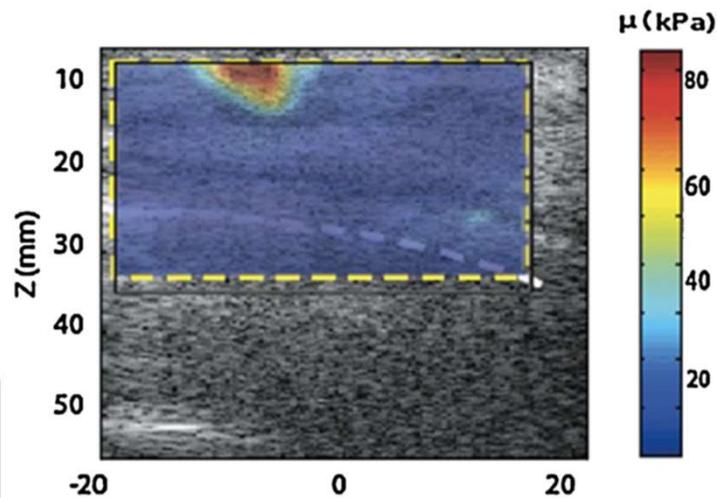
Analyse *via* un modèle : élastographie U.S.

élastographie ultrasonore :

⇒ analyse des propriétés mécaniques (élasticité, ...)
des tissus mous



mode dynamique



détection d'une tumeur du sein
par élastographie US

- **sollicitation** : quasi-statique/dynamique
⇒ déformation tissu
 - **comportement** mécanique :
élasticité isotrope, visco-élasticité, ...
 - **propagation** d'onde :
vitesses ⇒ propriétés élastiques
- ⇒ cartographie **propriétés mécaniques**
du tissu

Analyse *via* un modèle : DIC locale

DIC : corrélation d'images numériques
 ⇒ analyse séquence d'images

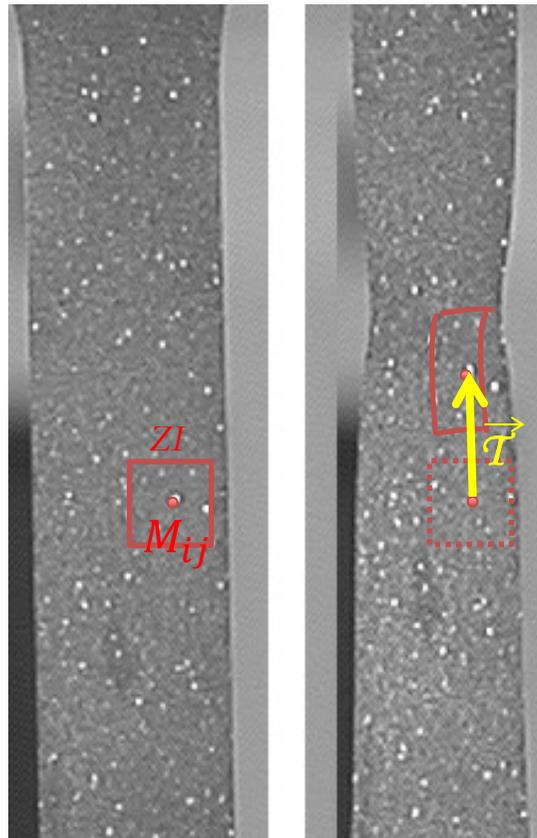


image de référence : I^0

image déformée : I^1

– **conservation** intensité lumineuse :

$$\forall \vec{X}, \in ZI, I^0(\vec{X}) = I^1(\vec{T}(\vec{X}))$$

– modèle de **transformation** géométrique :

$$\vec{f}_u(\underline{p}, \vec{X}) : \text{constant, affine, } \dots \Rightarrow \text{pour décrire } \vec{T}(\vec{X})$$

– **critère** de **vraisemblance** :

$$C(\underline{p}) = \iint_{ZI} \left(I^0(\vec{X}) - I^1(\vec{f}_u(\underline{p}, \vec{X})) \right)^2 d\vec{X}$$

– **optimisation** du critère

⇒ **champ de déplacement**

subi par la surface observée

Analyse *via* un modèle : DIC globale (1)

principe :

maillage de la Zone d'Etude :

choix de fonctions de forme sur \vec{u} :

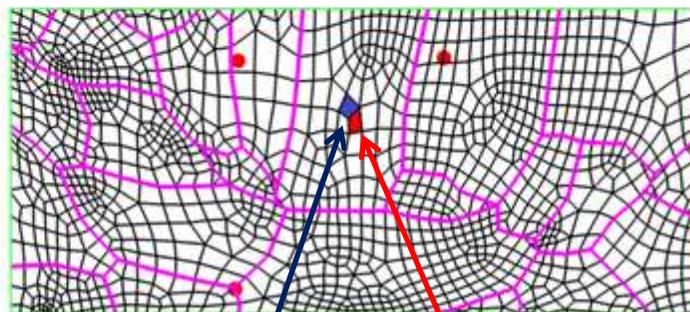
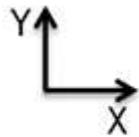


$$\vec{u}_e (X, Y, p^e) = \sum_{k=0}^{d_k} \sum_{l=0}^{d_l} a_{kl}^e X^k Y^l \vec{x} + \sum_{k=0}^{d_k} \sum_{l=0}^{d_l} b_{kl}^e X^k Y^l \vec{y}$$

$$p^e = (a_{kl}^e, b_{kl}^e)$$

$$\vec{u}_i (X, Y, p^i) \Rightarrow p^i$$

$$\vec{u}_j (X, Y, p^j) \Rightarrow p^j$$



élément
i *j*

restrictions cinématiques :

conditions de **continuité** entre les éléments

i et *j*

Analyse *via* un modèle : DIC globale (2)

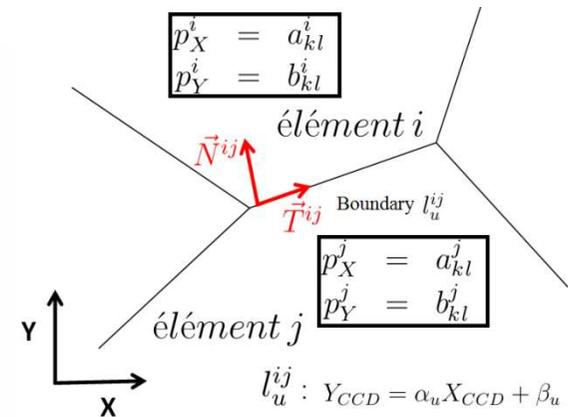
écriture des restrictions :

continuité **normale** du déplacement

$$\vec{u}^i \cdot \vec{N}^{ij} = \vec{u}^j \cdot \vec{N}^{ij} \quad \forall (X, Y) \in l_u^{ij}$$

continuité **tangentielle** du déplacement

$$\vec{u}^i \cdot \vec{T}^{ij} = \vec{u}^j \cdot \vec{T}^{ij} \quad \forall (X, Y) \in l_u^{ij}$$



restrictions cinématiques \Rightarrow équations linéaires en p_X, p_Y

$$[A_U^{ij}] \{P_U^{ij}\} = \{0\}$$

matrice de restriction élémentaire : dépendant de la géométrie

vecteur élémentaire :

$$\begin{pmatrix} p_X^i \\ p_Y^i \\ p_X^j \\ p_Y^j \end{pmatrix}$$

assemblage $\forall i, j$

$$\Rightarrow [A_U] \{P_U\} = \{0\}$$

rang de la matrice A_U^{ij} : inférieur au nombre d'inconnues dans P_U^{ij}
 $\Rightarrow \exists$ **une solution non triviale**

Analyse *via* un modèle : DIC globale (3)

prise en compte des restrictions :

- **choix** : critère, fonction de forme, interpolation, restriction

$$\mathfrak{C}_{SSD} = \left(\sum_e \right) \iint_{S_e} \left[I_0(X, Y) - I_1 \left(X + \mathbf{u}_x^e(X, Y, p_X^e), Y + \mathbf{u}_y^e(X, Y, p_Y^e) \right) \right]^2 dXdY$$

minimisation **sous contrainte** : $\mathbf{P}_U^{\text{optimal}} = \underset{p_X, p_Y}{\operatorname{argmin}} \{ \mathfrak{C}_{SSD} \}$
 avec $[\mathbf{A}_U] \{ \mathbf{P}_U \} = \{ \mathbf{0} \}$

- introduction de « **corrélations à distance** » entre les éléments

- choix souvent effectué :

fonctions de formes « éléments finis » : T3 ou Q4

minimisation d'un **critère linéarisé** (par rapport à \mathbf{P}_U)

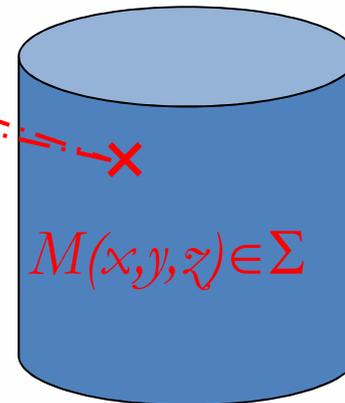
Analyse *via* un modèle : stéréo-DIC locale (1)

principe : triangulation



Correlated Solutions
VIC 3D

en surface :
stéréo-corrélation



$\Rightarrow (u_x, u_y, u_z)$

Analyse *via* un modèle : stéréo-DIC locale (2)

modèle de caméra : modèle sténopé

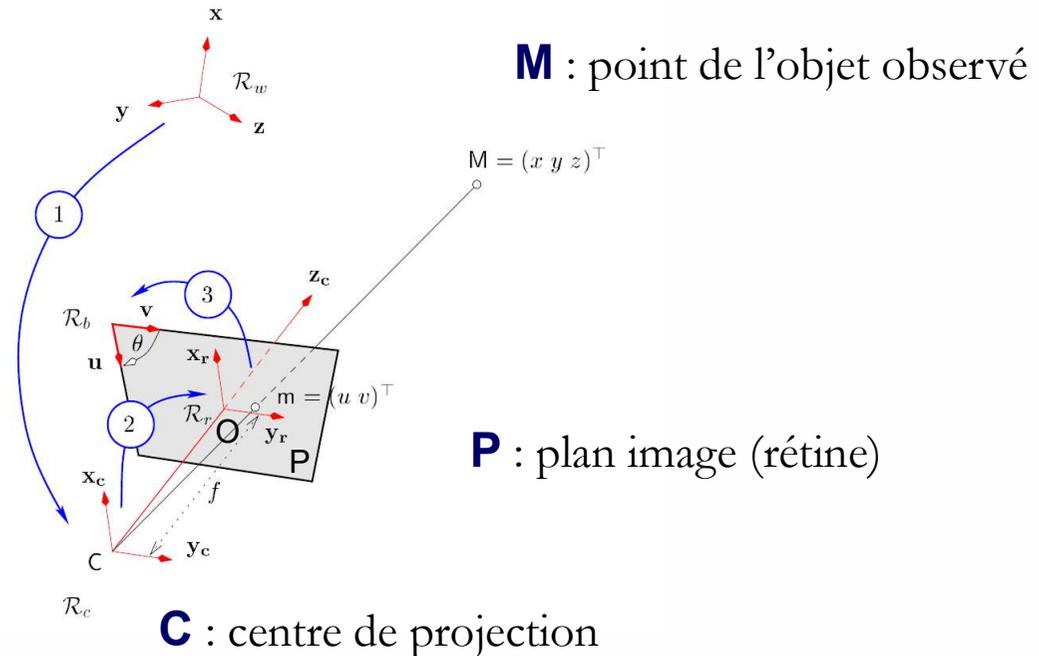
repères :

- \mathcal{R}_w : repère monde
- \mathcal{R}_c : repère caméra
- \mathcal{R}_r : repère image
- \mathcal{R}_f : repère image discrétisée

O : point principal

(OC) : axe optique

OC = f : distance focale



P : plan image (rétine)

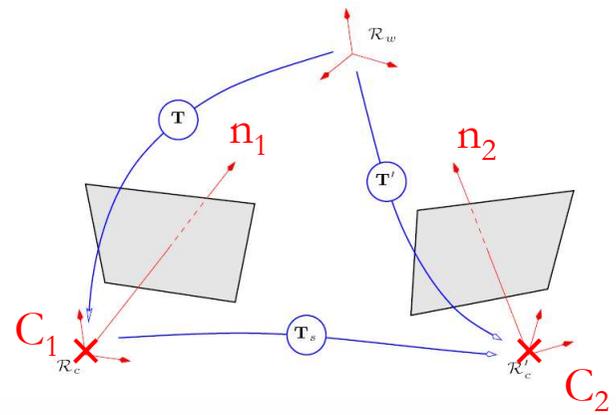
C : centre de projection

(CM) : rayon de projection (ligne de vue)

m : point image de **M** dans **P**

Analyse *via* un modèle : stéréo-DIC locale (3)

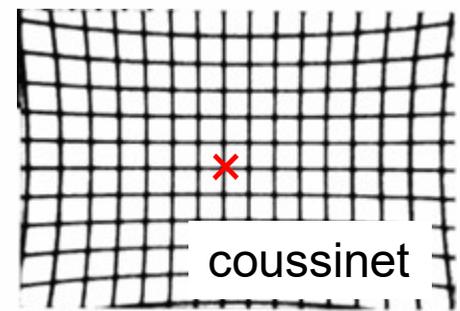
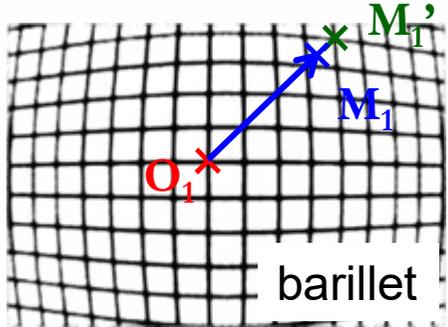
calibration du banc :



1) banc de stéréo-corrélation :

- 2 caméras \Rightarrow 2 focales : f_1 et f_2
- \Rightarrow 2 plans P_1 et P_2
- coord. dans \mathcal{R}_w : C_1 et C_2 ; n_1 et n_2

2) prise en compte des distorsions des images

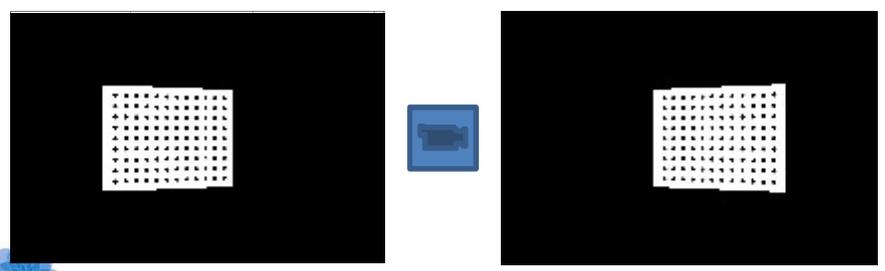


modèle de distorsion :

\vec{OM} tel que : $\vec{OM}' = \vec{OM} + \vec{u}_d(\vec{OM}; d)$

ex : $\vec{u}_d(\vec{OM}; d) = \alpha \|\vec{OM}\|^2 \vec{e}_r$

3) calibration du banc

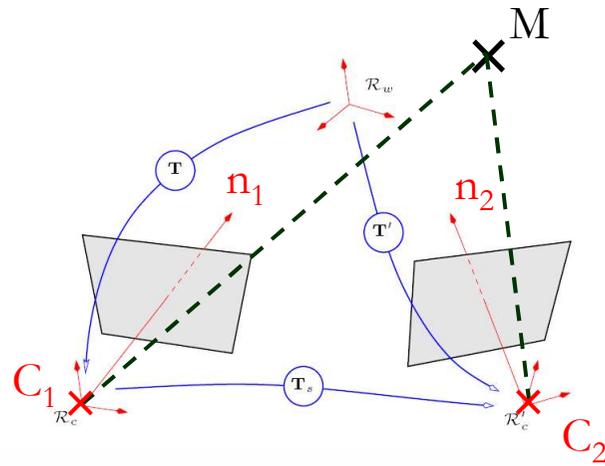


détermination :

- paramètres intrinsèques : $(f_i; f_e), d, O_i, \dots$
- paramètres extrinsèques : C_i, n_i

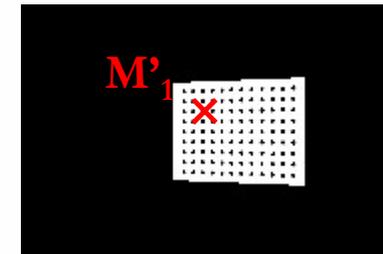
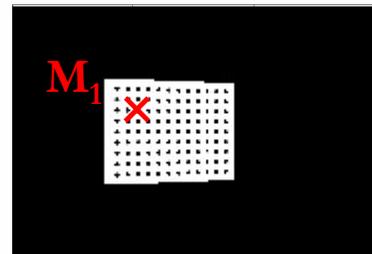
Analyse *via* un modèle : stéréo-DIC locale (4)

appariement + triangulation :



– appariement :

on détermine la position d'un point donné de l'image 1 : $M_1(x_1, y_1)$ dans l'image 2 : $M'_1(x'_1, y'_1)$

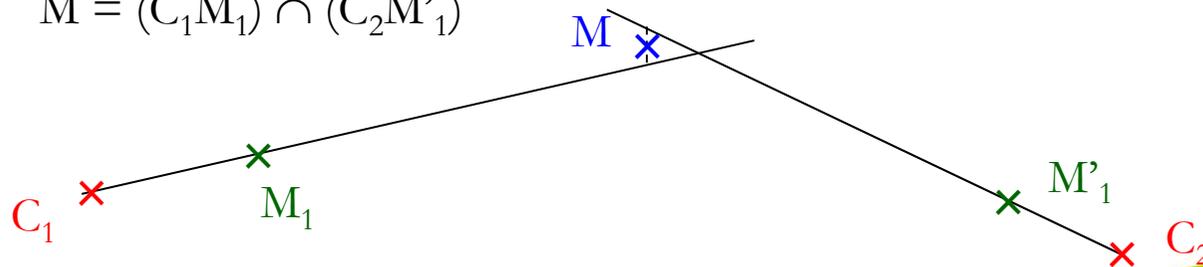


appariement 2D \Leftrightarrow D.I.C. locale

– triangulation :

connaissant (C_i, n_i) et (x_1, y_1) et (x'_1, y'_1) , on détermine la position du point M dans \mathcal{R}_w :

$$M = (C_1 M_1) \cap (C_2 M'_1)$$



Plan

4 – liens entre imagerie, inversion et identification

Inversion/identification et mesures de champs (1)

mesures de champs :

- très souvent issues de **systèmes d'imagerie**
 - développements considérables de l'imagerie : **résolution** (spatiale, temporelle), **performance** capteurs (λ , bruit, ...), nouveaux **imageurs** (3D), ...
 - ... et des systèmes d' **expérimentation multi-physiques**
 - fournissent une très grande **quantité d'information** : typiquement 10^3 à 10^6 voire plus ... **mesures** **indépendantes** et **complémentaires** par image
- ⇒ champ de données expérimentales : **d_e**

Inversion/identification et mesures de champs (2)

objectifs :

⇒ utiliser la **quantité d'information** disponibles pour :
effectuer des **mesures** dans des situations de + en + **complexes**
afin d'obtenir une **quantité d'information fiable** croissante
en un **nombre réduit d'essais**

on cherche en général à **identifier** des **paramètres**

⇒ très souvent, des **constantes matérielles**

utilisation fréquente des mesures de champs :

- **cinématiques** : déplacement/déformation \Leftarrow **DIC** (2D, 2.5D ou 3D)
- **thermiques** \Leftarrow **IRT**

Inversion/identification et mesures de champs (3)

principe :

(i) modélisation du **problème direct** :

géométrie $(\Omega, \partial\Omega)$ + **équations du modèle** (Ω) + **conditions aux limites** $(\partial\Omega)$

(ii) écriture de la **formulation faible** du problème direct

(iii) **discrétisation** :

géométrie + fonctions de forme E.F.

\Rightarrow obtention du **système d'équations** associé au **problème direct discrétisé** : « $K(p, X)U = F(X)$ »

(iv) **résolution** du problème discrétisé :

$$K(p, X)U = F(X) \Rightarrow U = U(p, X)$$

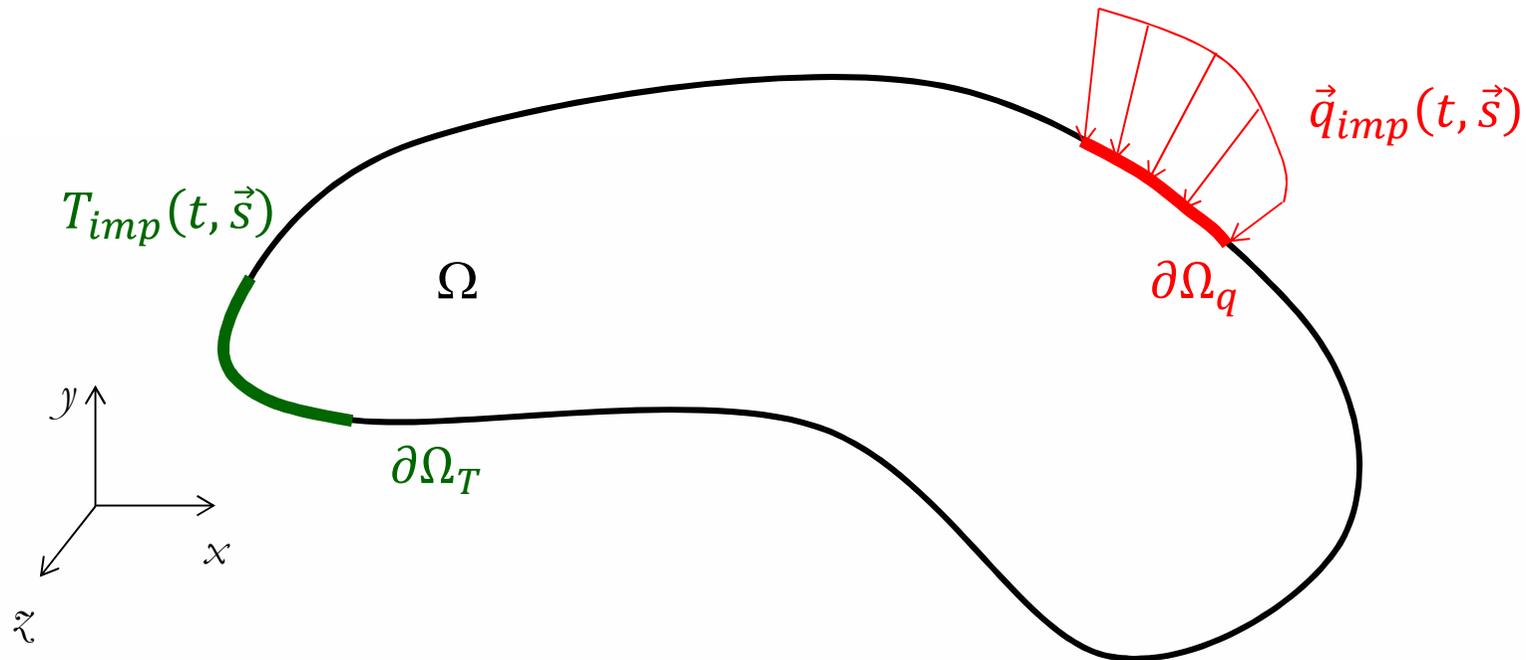
(v) **simulation** des données expérimentales : $d_s(p, X) = \Pi U(p, X)$

avec Π : **opérateur de projection** donnant la partie « mesurée » de la solution directe $U(p, X)$

(vi) **comparaison** des données simulées et expérimentales :

$$\ll d_s(p, X) - d_e \gg$$

Exemple de problème direct : thermique



équations d'équilibre : $\rho C \dot{T}(t, \vec{X}) + \text{div}(\vec{q}(t, \vec{X})) = s(t, \vec{X}) \quad \forall \vec{X} \in \Omega$

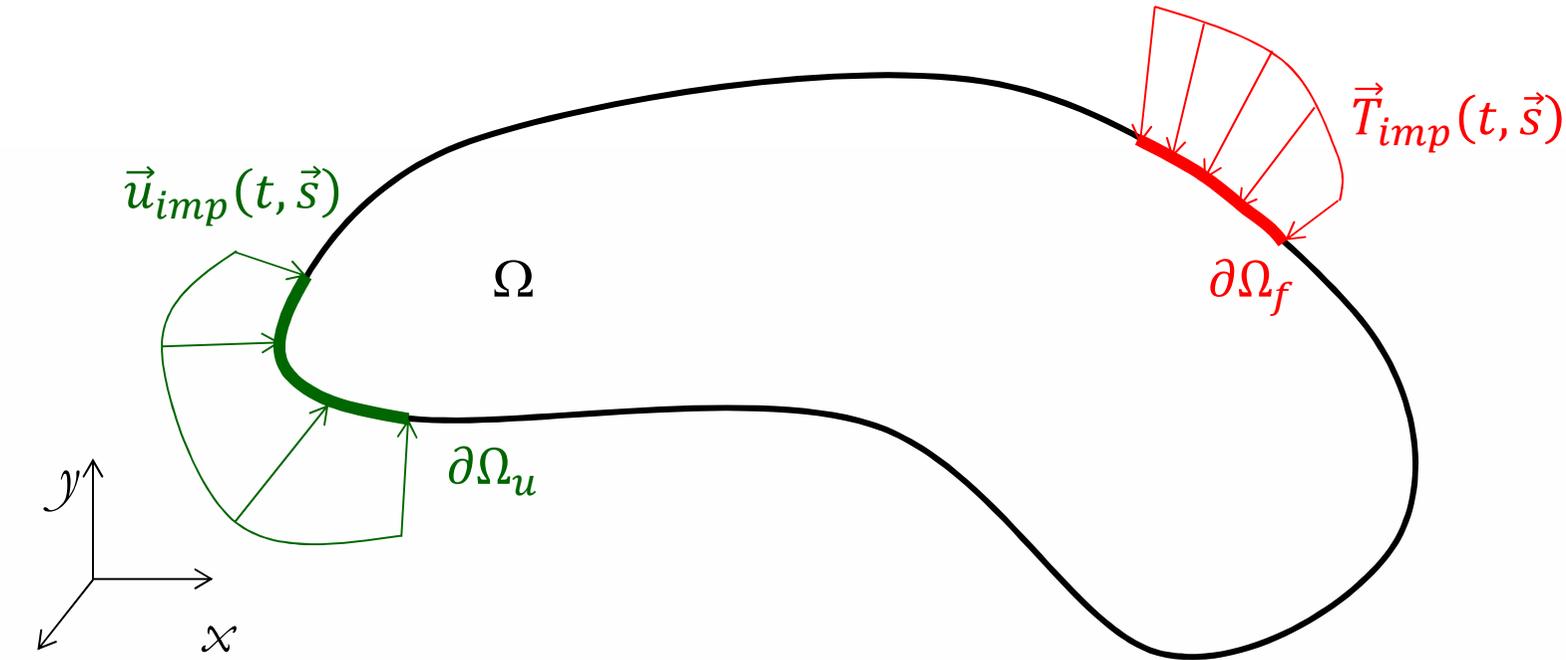
équations de comportement : $\vec{q}(t, \vec{X}) = -\underline{k} \text{grad}(T(t, \vec{X})) \quad \forall \vec{X} \in \Omega$

conditions initiales : $T(t=0, \vec{X}) = T^0(\vec{X}) \quad \forall \vec{X} \in \Omega$

conditions aux limites (de flux : convection, isolation) : $\vec{q}_j(t, \vec{s}) \cdot \vec{n}_j = h(T(t, \vec{s}) - T^a(t, \vec{s})) \quad \forall \vec{s} \in \partial\Omega_q$

conditions aux limites (en température) : $T(t, \vec{s}) = T^{imp}(t, \vec{s}) \quad \forall \vec{s} \in \partial\Omega_T$

Exemple de problème direct : mécanique



équations cinématiques : $\varepsilon_{ij}(t, \vec{X}) = \frac{1}{2}(u_{i,j}(t, \vec{X}) + u_{j,i}(t, \vec{X})) \quad \forall \vec{X} \in \Omega$

équations de conservation : $\sigma_{ij,j}(t, \vec{X}) + \rho f_i(t, \vec{X}) = \rho u_{i,t}(t, \vec{X}) \quad \forall \vec{X} \in \Omega$

équations de comportement : $\sigma_{ij}(t, \vec{X}) = f(\varepsilon_{kl}(t, \vec{X}), \dots) \quad \forall \vec{X} \in \Omega$

conditions initiales : $u_i(t=0, \vec{X}) = u_i^0(\vec{X})$ et $u_{i,t}(t=0, \vec{X}) = v_i^0(\vec{X}) \quad \forall \vec{X} \in \Omega$

$\lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$

conditions aux limites (effort) : $\sigma_{ij}(t, \vec{s}) \cdot n_j = T_i^{imp}(t, \vec{s}) \quad \forall \vec{s} \in \partial\Omega_f$

conditions aux limites (déplacements) : $u_i(t, \vec{s}) = u_i^{imp}(t, \vec{s}) \quad \forall \vec{s} \in \partial\Omega_u$

Caractère « bien posé » du problème direct

problème aux dérivées partielles est **bien posé** (Hadamard) si :

- une **solution existe**
- la **solution** est **unique**
- la **solution** dépend de façon « **continue** » des données

⇒ problème de « mécanique » bien posé si :

$$\partial\Omega_u \neq \emptyset \text{ et } \partial\Omega_u \cap \partial\Omega_f = \emptyset$$

⇒ problème de « thermique » bien posé si :

$$\partial\Omega_T \cap \partial\Omega_q = \emptyset$$

i.e. pas de C.L

« surabondantes »

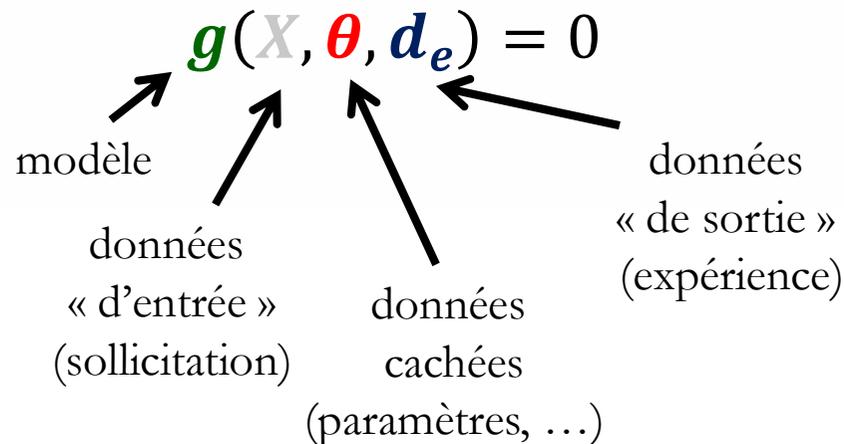
Concept « d'inversion »

extraction d'information (θ) à partir de données expérimentales (d_e)

⇒ basé sur l'utilisation d'un modèle mathématique (g) des phénomènes physiques sous-jacents

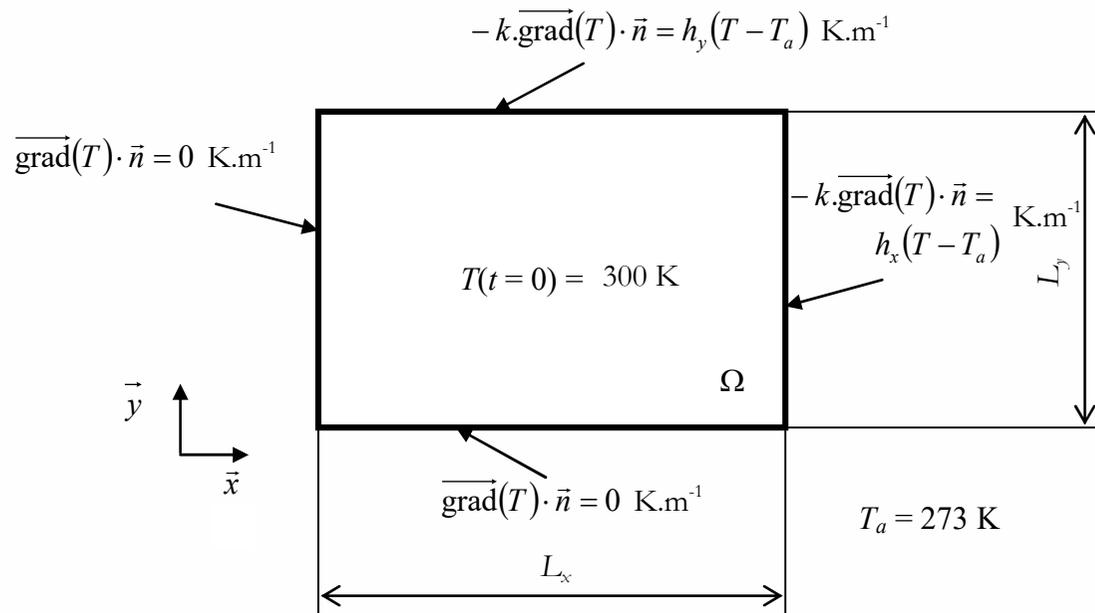
⇒ pour des données d'entrée (X) connues

on écrit (symboliquement) :



Exemple « d'inversion » (1)

$$g(X, \theta, d_e) = 0$$



modèle : g

$$k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = 0$$

données d'entrée : X

C.L., C.I.

données cachées : θ

$$\theta \leftarrow k(\vec{X})$$

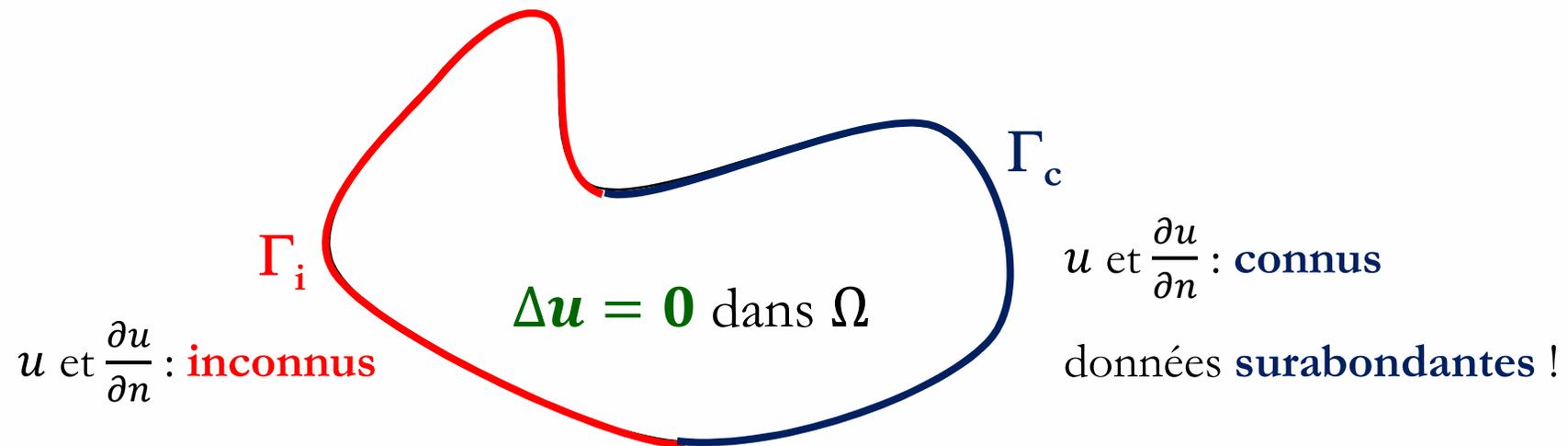
mesures expérimentales : d_e

$$d_e \leftarrow T(\vec{X})$$

\Rightarrow détermination du **champs de conductivité thermique**

Exemple « d'inversion » (2)

$$g(X, \theta, d_e) = 0$$



détermination des **C.L** sur Γ_i **connaissant** :

- le **comportement** du **volume** Ω
- les **C.L. surabondantes** sur Γ_c

\Rightarrow **complétion** de **données**

Caractéristiques de « l'inversion »

– en général, pour être suffisamment représentatifs, les **modèles** doivent être « suffisamment » **élaborés** :

- ⇒ géométries complexes
- ⇒ systèmes EDO/EDP

⇒ utilisation de **solutions analytiques** :
généralement **impossible ...**

⇒ recours à des stratégies de **calcul numérique**

facilitées par les **développements** récent (algorithmique et matériel) de l'**outil numérique**

Problème inverse

- **inversion** : exploitation quantitative de données mesurées dans des situations faisant appel à des **modélisations complexes**
- **inversion** : donne accès à des **mesures indirectes** de quantités (θ) **non** directement **accessible** à la mesure (d_e)
- en général, les modèles physiques (directs) donnent d connaissant θ et X
 \Leftarrow utilisation **méthodes classiques** (stables) pour résoudre des des systèmes d'équations intégrales, d'EDO/EDP, ...

$$d = d(\theta, X) \Rightarrow \text{expression } \mathbf{explicite} !$$

par ex. : $d: \int_{\Omega} k \nabla T \cdot \nabla w \, dV - \int_{\partial\Omega} q^D w \, dS = 0, \forall w$

- on cherche $g(X, \theta, d_e) = 0 \Rightarrow$ expression **implicite** !
 \Rightarrow nécessité d'**inverser le modèle physique** !

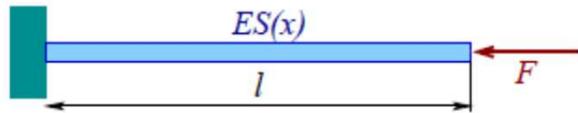
Caractère mal-posé du problème inverse

– en général, l'**inversion** est un problème mathématiquement **mal posé** car :

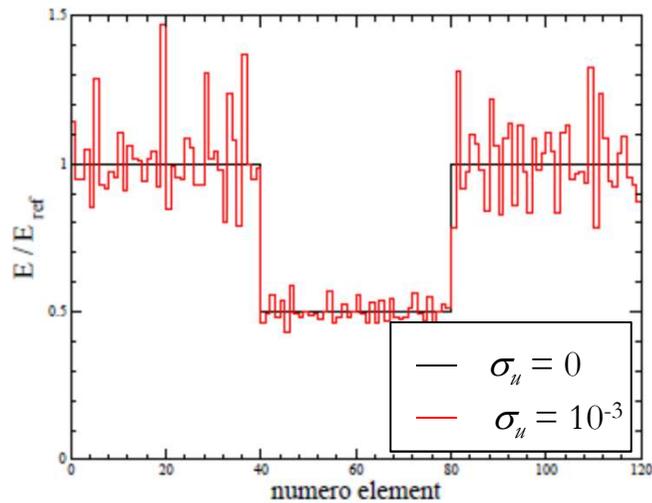
- (i) $\mathbf{g}(X, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{d}_e) = 0$ peut n'avoir aucune solution pour les données disponibles \mathbf{d}_e
- (ii) $\mathbf{g}(X, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{d}_e) = 0$ peut avoir plusieurs solutions pour les données disponibles \mathbf{d}_e
- (iii) de petites variations sur les données disponibles $\delta \mathbf{d}_e$ peuvent avoir des répercussions importantes sur les paramètres cachés $\delta \boldsymbol{\theta}$

inversion \Rightarrow augmentation erreur de mesure

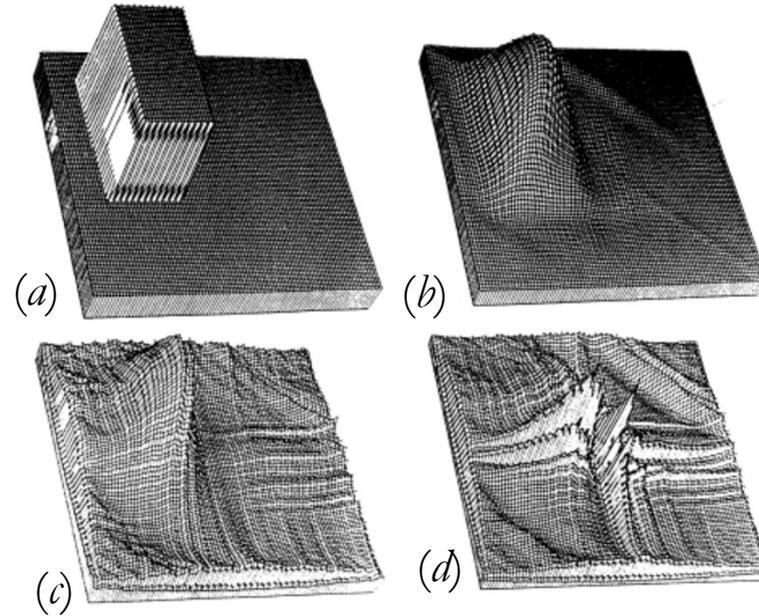
Illustration du caractère mal-posé



– problème direct :
 $ES(x)$ connu et $u(x)$ inconnu
 \Rightarrow bien posé



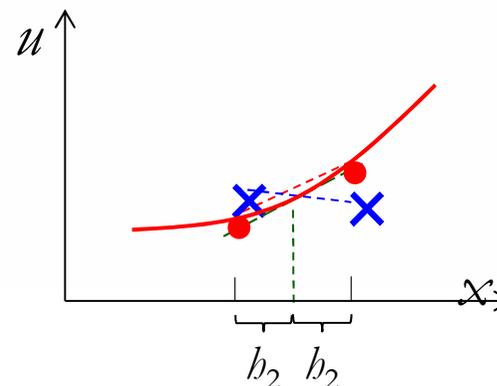
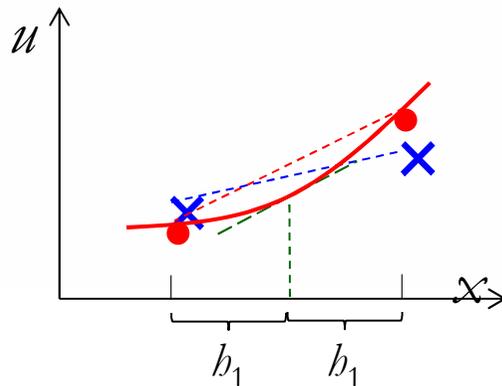
– problème inverse :
 $u(x)$ connu et $ES(x)$ inconnu
 \Rightarrow mal posé



- (a) : conductivité « réelle »
- (b) : conductivité identifiée (0% bruit)
- (c) : conductivité reconstruite (3% bruit, 11 iter.)
- (d) : conductivité reconstruite (3% bruit, 50 iter.)

Bruit expérimental et dérivation

- **grandeur** d'intérêt **pertinente** pour les problèmes d'identification (et particulièrement à partir de mesures de champs) :
 - ⇒ **gradient** de la **variable mesurée**
cf. déformation *vs.* déplacement
- **dérivation numérique** d'un signal discret bruité :



$$h_2 < h_1$$

en présence de **bruit**, un **pas d'échantillonnage fin** **détériore** l'estimation du **gradient**

Reformulation en minimisation

- **problème d'inversion** : trouver $\theta_{inv} \in \Theta$ tel que $g(X, \theta, d_e) = 0$
avec $X \in X$ et $d_e \in D$ connus
 - ⇒ **existence** et **unicité** de solution : **non garantie !**
- en général, on travaille dans des espaces de **dimension finie**
(⇐ discrétisation) et on a : $\dim(D) \neq \dim(\Theta)$
- si, comme c'est souvent le cas, on utilise des **données surdéterminées** :
 $\dim(D) \gg \dim(\Theta)$
 - ⇒ **résolution exacte** des équations surdéterminées : en
général **impossible** (⇐ bruit, erreurs de modèle, ...)
- re-formulation en **minimisation** : $\theta_{opt} = \underset{\theta \in \Theta}{\operatorname{argmin}} \mathcal{J}(\theta)$
avec : $\mathcal{J}(\theta) = \|d(\theta, X) - d_e\|$

Propriétés de \mathcal{J}

$$\theta_{opt} = \underset{\theta \in \Theta}{\operatorname{argmin}} \mathcal{J}(\theta) \quad \text{avec : } \mathcal{J}(\theta) = \|d(\theta, X) - d_e\|$$

- nombreux **choix** possibles pour $\|\cdot\|$
- on choisit souvent $\|\cdot\|_2$ car elle est **dérivable**
- les propriétés de \mathcal{J} n'assurent **pas** l'**unicité** et le caractère **global** de θ_{opt}
- la fonctionnelle \mathcal{J} dépend **implicitement** des paramètres θ au travers du modèle direct d :

$$\text{avec : } \mathcal{J}(\theta) = \mathcal{J}(d(\theta, X)) \quad \text{où : } g(\theta, X, d(\theta, X)) = 0$$

$$\text{alors que : } g(\theta, X, d_e) \neq 0$$

Inversion

– **problème inverse** : quantités recherchées sont de **dimension infinie**

par ex. : champs de propriétés hétérogènes
chargements évolutifs (forces, sources)
forme/topologie du domaine
...

⇒ **discrétisation** du problème

⇒ nombre **important** d'inconnues

⇒ forte **sensibilité** aux **incertitudes**

⇒ **régularisation** nécessaire

Identification

- **problème d'identification** : quantités recherchées sont de **dimension finie** et la dimension est modérée

par *ex.* : paramètres d'un modèle homogène

...

⇒ nombre **modéré** d'inconnues

⇒ **sensibilité** aux **incertitudes** plus faible

⇒ **régularisation** pas toujours nécessaire

N.B. : **inversion et identification** conduisent souvent à la **minimisation d'une fonction coût**

Définition de la fonction coût

on prend : $\mathcal{J}(\theta) = \|d_s(\theta, X) - d_e\|$

cas classiques :

(i) identification par les « **grandeurs mesurées** » :

$$\Rightarrow \mathcal{J}(\theta) = \frac{1}{2} \|\Pi U(\theta, X) - d_e\|_2^2$$

Π : opérateur de **projection** des grandeurs simulées sur la grille de mesure

N.B. :

chargement X supposé **parfaitement connu** et C.L. imposées strictement

$U(\theta, X)$ non linéaire en $\theta \Rightarrow$ **moindres carrés non-linéaires**

R-MEF/U

(ii) identification par les « **flux** » (si mesure grandeur sur tout Ω) :

$$\Rightarrow \mathcal{J}(\theta) = \frac{1}{2} \|K(\theta, X)d_e - F(X)\|_2^2$$

N.B. :

chargement X supposé **parfaitement connu** et C.L. imposées strictement

$K(\theta, X)$ linéaire en θ si comportement linéaire en θ

\Rightarrow **moindres carrés linéaires** possibles

R-MEF/F

(iii) identification par les « **mesures** » et « **flux** » !

Minimisation de la fonction coût

d_k : direction de Newton

on **construit** : $\theta_{k+1} = \theta_k - H_k^{-1} g_k$

... jusqu'à **convergence**

avec : $\theta_k \in \mathbb{R}^n$: estimation courante du minimum de \mathcal{J}

$g_k = \nabla \mathcal{J}|_{\theta_k} \in \mathbb{R}^n$: gradient de \mathcal{J} au point θ_k

$H_k = H[\mathcal{J}]|_{\theta_k} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$: Hessian de \mathcal{J} au point θ_k

d_k la direction de descente au pas k

– si problèmes de **moindres carrés linéaires** :

méthode de **Newton**

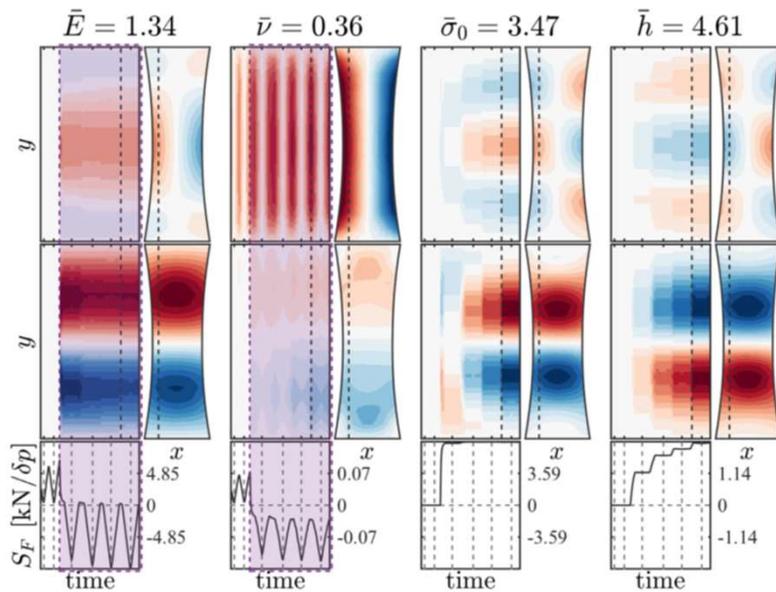
– si problèmes de **moindres carrés non-linéaires** :

méthode de **Gauss-Newton**

méthode de **Levenberg-Marquardt**

Un exemple d'analyse *via* un « modèle intégré »

I-DIC : corrélation d'images numériques intégrée
 \Rightarrow DIC + FEMU-F



- modèle **E.F.** : paramètres « matériau » $\underline{\theta}$
géométrie : forme, dimensions
maillage : éléments, fonctions de formes (\vec{u})
comportement : élasticité, élasto-plasticité
conditions aux limites : bords libres, \vec{u} imposé
- **critère de vraisemblance** :
type SSD : 2 contributions (intensité : I et force F)
normalisation chaque contributions : σ_I, σ_F
- calcul des **sensibilités** :
différences finies : $\delta \vec{u} / \delta \theta_i, \delta F / \delta \theta_i$

\Rightarrow **paramètres** matériaux ($\underline{\theta}^{opt}$)

+ champ de **déplacement** \vec{u}

\Rightarrow très **faible paramétrisation !!!**

Plan

5 – prise en compte des biais

Généralités

- **biais** dans les **images**
 - ⇒ **perturbation analyse** informations extraites
- **origines** des biais : très diverses
 - ⇒ maillons chaîne acquisition (image « brute »)
 - ⇒ différentes étapes de traitement de l'image
- **nature** des biais :
 - ⇒ intimement liée aux opérations effectuées dans chaque maillon/étape
- **étude** des biais :
 - ⇒ analyse de la chaîne de mesure
 - ⇒ analyses statistiques

Proposition de classification des biais

A) biais sur la **grandeur mesurée** : « bruit d'image »

- **quantification** grandeur acquise
- **fluctuations** réponse du « **capteur** » \Rightarrow bruit thermique, bruit quantique, défaut chaîne acquisition/numérisation capteur, ...

B) biais sur la **génération** de l'**image**

- acquisitions « **snapshot** » \Leftarrow défauts **matrice capteurs** (facteur remplissage, imperfection grille, ...)
- acquisitions « **balayage** » \Leftarrow défauts/**instabilités** système **balayage**
- si présence **optique** : **distorsions** (barillet, coussinet, ...), **vignettage**, **non-uniformité**, ...

C) biais sur les **images reconstruites** (déduites d'un modèle)

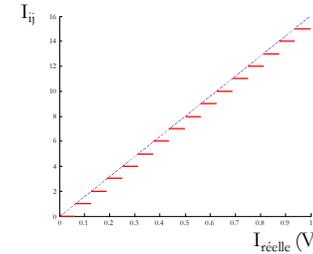
- **propagation** biais sur **grandeur** + **image**
- erreur de **modèle**

\Rightarrow introduction **composante aléatoire** à la **grandeur mesurée**

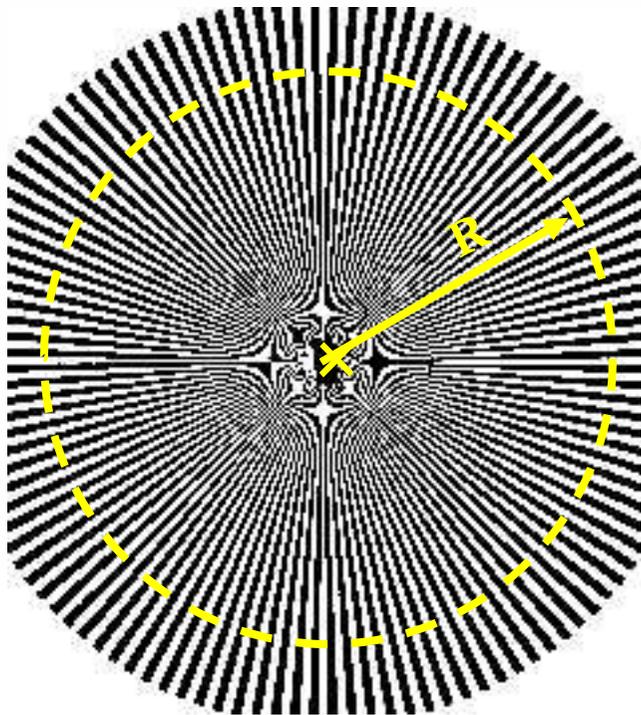
- distributions statistiques + corrélations spatiales déterminées par des séries d'acquisitions dans des conditions « maîtrisées »
- en « limitant » l'erreur de modèle

Biais liés à l'échantillonnage

(i) **erreur de quantification** de la grandeur observée I

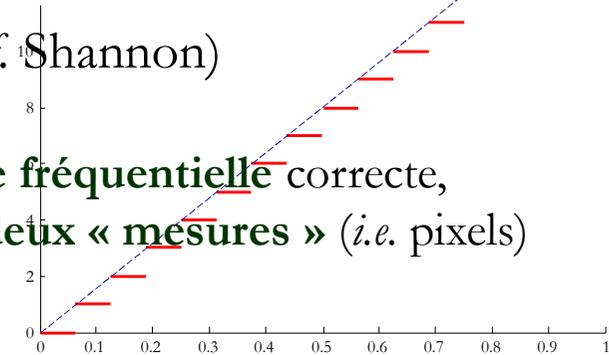


(ii) **limitation et quantification fréquences spatiales** (cf. Shannon)



ici f_s diminue quand R augmente

– pour une **analyse fréquentielle** correcte, il faut au moins **deux « mesures »** (*i.e.* pixels) **par période**



– on doit donc avoir, en terme de fréquence : $I_{réelle} (V)$

$$f_s^{\max} \leq f_e / 2$$

f_e = fréquence d'échantillonnage

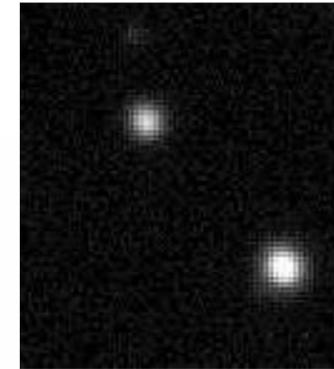
f_s^{\max} = plus haute fréquence accessible du signal

– en pratique, on choisit généralement au **minimum 5 à 6 pixels par période**

Biais imageur photonique

– **blooming** (éblouissement)

– **smearing**



(moins importants dans CMOS)

– **courant d'obscurité** : génération de charges par agitation thermique
 ⇒ refroidissement certains capteurs ...

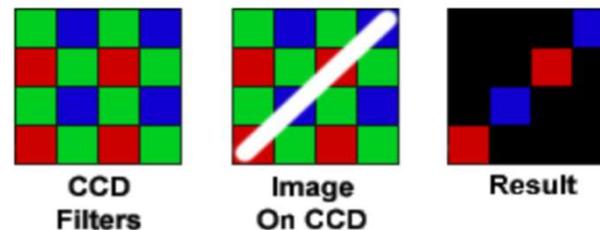
– **bruit de photons** : lié à la statistique (Poisson) suivie par les photons

formule de Schottky : $\sigma_i^2 = \frac{i e}{t_i}$

σ_i^2 : variance sur i
 i : intensité
 e : charge élémentaire
 t_i : temps intégration

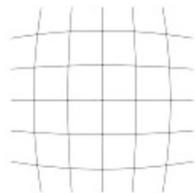
– **aberrations chromatiques** (caméras couleur) : sur frontières
 aliasing chromatique, ...

– ...

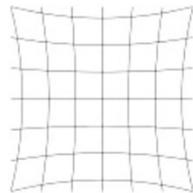


Biais génération image

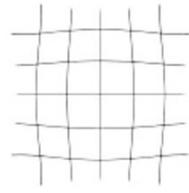
– **aberrations** (géométriques, chromatiques) :



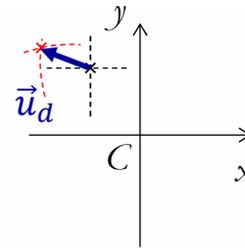
barillet



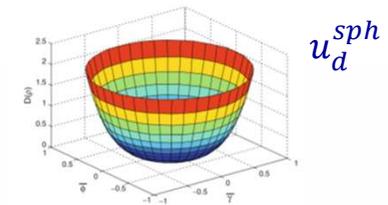
coussinet



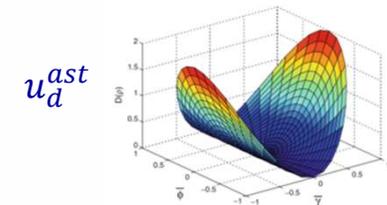
moustache



aberration sphérique



astigmatisme

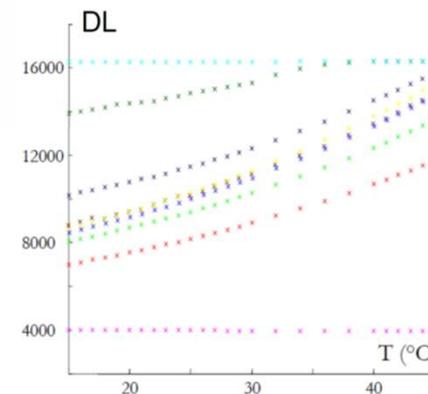
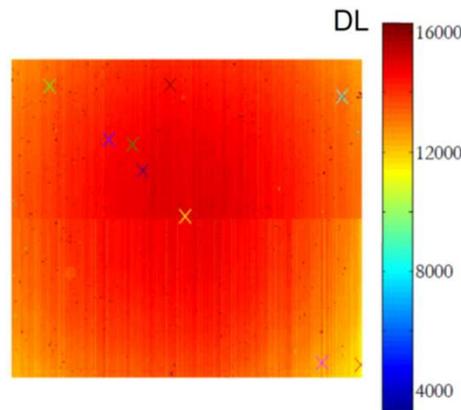
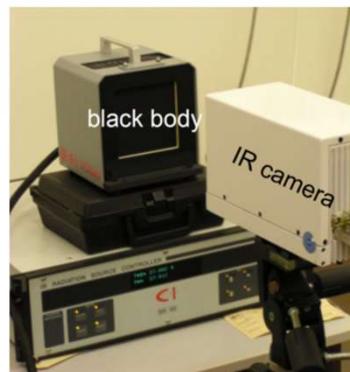


– **modèle paramétrique** : Seidel, ...

– **modèle a priori**

Image correlation for shape, motion and deformation measurements, Sutton *et al*, Springer, 2009

– **vignettage/non-uniformité** :



– **NUC/BPR**
– étalonnage pix.
à pix.

Biais images reconstruites

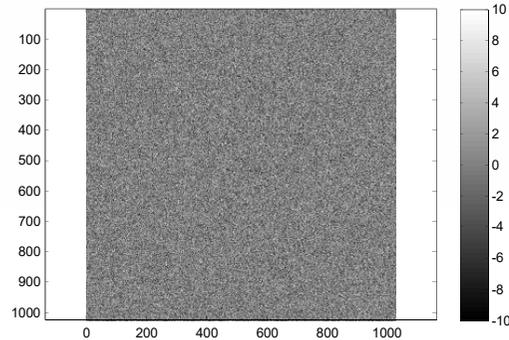
- caractérisation **délicate** ...
- **méthodologie** :
 - propagation des **biais** d'image dans la reconstruction
 - analyse **statistique** de la réponse
- prise en compte des **erreurs de modèle** ?
 - modèles **inadaptés** ou trop **faiblement paramétrés** ...

ex. : DIC



F. Amiot

– effet du **biais** d'image



bruit (photon + quant.)
 \Rightarrow loi normale $(0, \sigma_n)$

$$\Rightarrow \sigma_u = \frac{\sigma_n}{d_{DIC} \sqrt{|\nabla I|^2}}$$

– effet de l'**erreur de modèle**

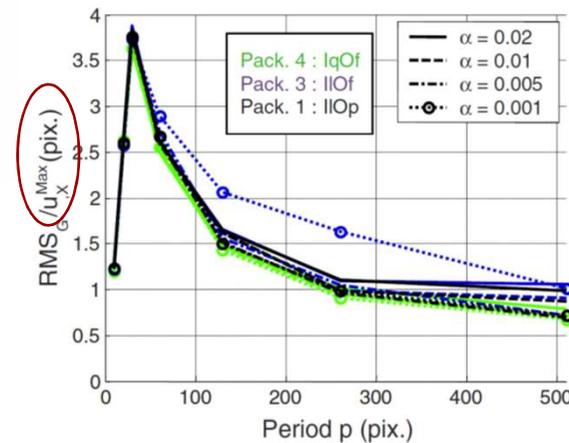
I: images de synthèse

$$\vec{u} = \alpha p \sin\left(\frac{2\pi x}{p}\right) \vec{x}$$

DIC :

$$\vec{f}_u(\underline{p}) = p_1 \vec{x} + p_2 \vec{y}$$

1^{er} terme négligé
 dans $\vec{f}_u(\underline{p})$



Plan

6 – conclusions

Conclusions

- **imagerie**
 - ⇒ grande quantité d'information
 - ⇒ grande variétés de grandeurs
- **chaîne acquisition** « longue » + « multi-physique »
 - ⇒ nombreuses sources de biais
- utilisation de **modèles d'interprétation**
 - ⇒ enrichissement interprétation
 - ⇒ complexification métrologie ...
- **multiplication/couplage** sources imagerie
 - ⇒ thermographie lagrangienne, multi-spectral, ...
 - ⇒ métrologie ...