

Reconstruction tomographique 3D

- Condition d'Orlov et projections tronquées
- Théorème de Radon 3D et RPF 3D
- Algorithmes de ré-arrangement

Tomographie 3D

- Emission radioactive : aléatoire
- Loi binomiale → Loi de poisson

- Rapport signal sur bruit : $\frac{S}{B} = \frac{N}{\sqrt{N}} = \sqrt{N}$

↳ Exploiter les projections obliques (redondantes)

Reconstruction en TEP

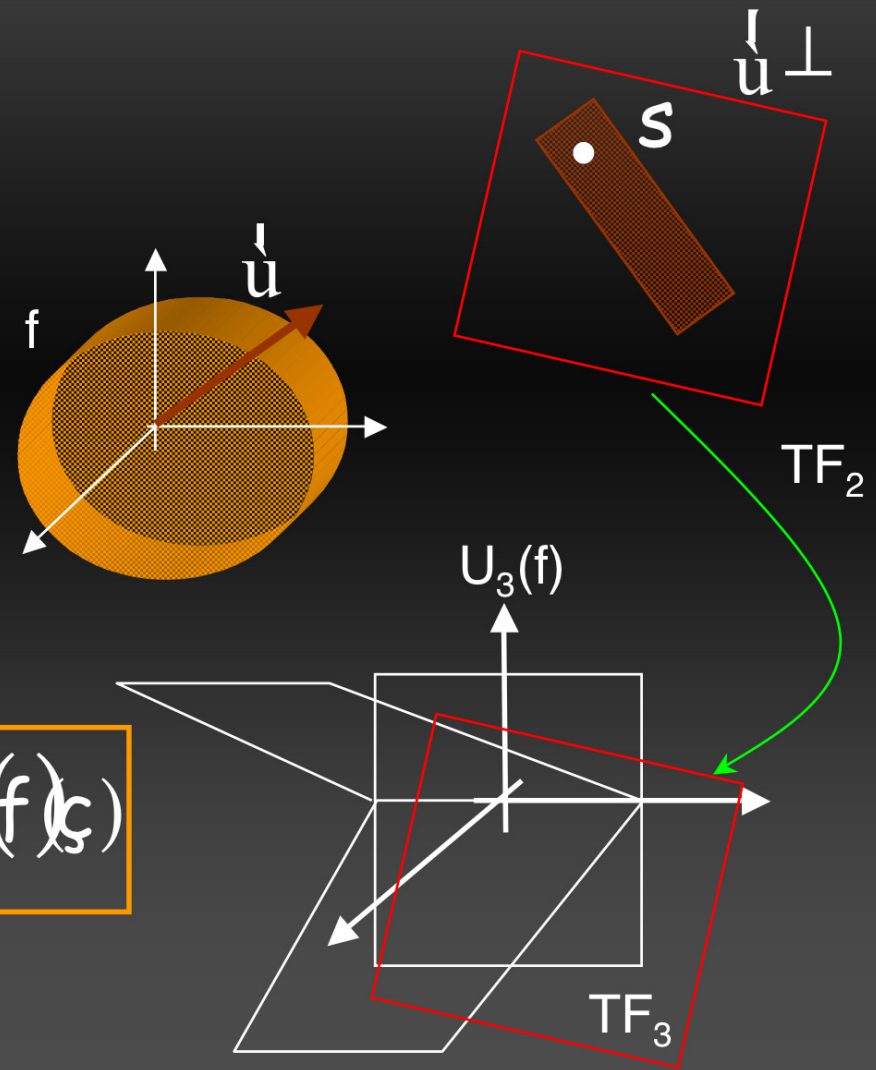
- Reconstruction 2D de données 2D (septa)
 - Faible statistique de comptage
- Réarrangement 2D de données 3D
 - Algorithmes de «rebinning» (single, multi, FORE)
 - S/B $\nearrow$ mais approximation
- Reconstruction 3D de données 3D
 - S/B $\nearrow$ mais temps de calcul $\nearrow\nearrow$

Théorème de Radon 3D

$$\forall \vec{u} \in S, \quad \forall s \in \vec{u}^\perp,$$

$$Pr_{\vec{u}}(s) = \int f(s + t\vec{u}) dt$$

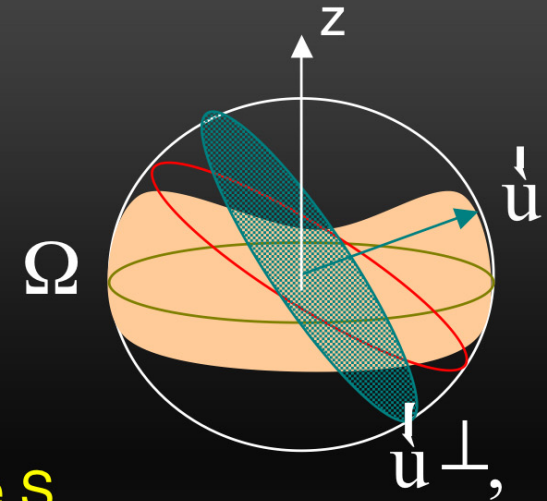
$$\forall \zeta \in \vec{u}^\perp, U_2(Pr_{\vec{u}})(\zeta) = U_3(f)(\zeta)$$



Condition d'Orlov

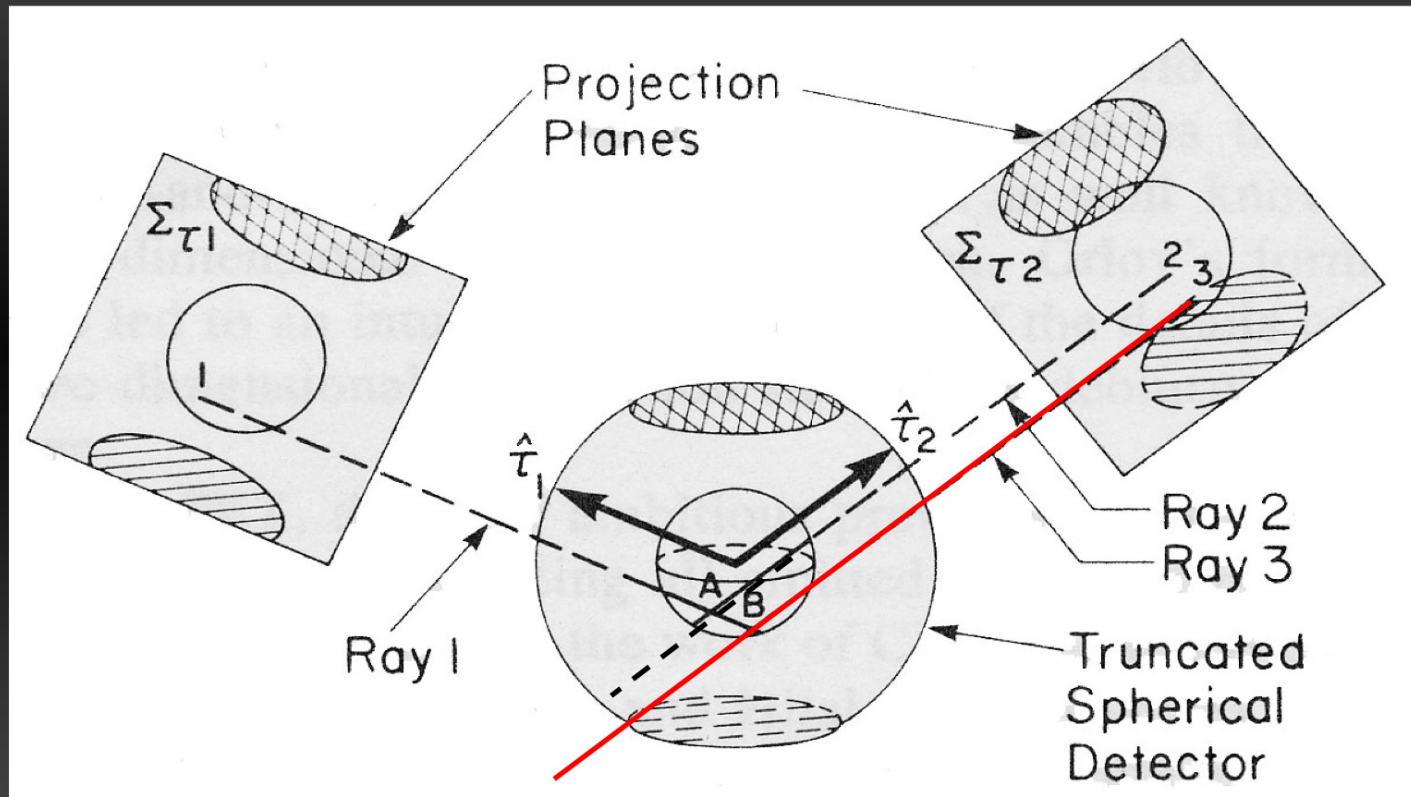
$$\forall \vec{u} \in \Omega \subset S,$$

Si Ω contient au moins un cercle équatorial de S
(ou si Ω intersecte tout cercle équatorial de S)



$$\forall \zeta \in \vec{u}^\perp, U_2\left(\text{Pr}_{\vec{u}}\right)(\zeta) = U_3(f)(\zeta)$$

Projections tronquées



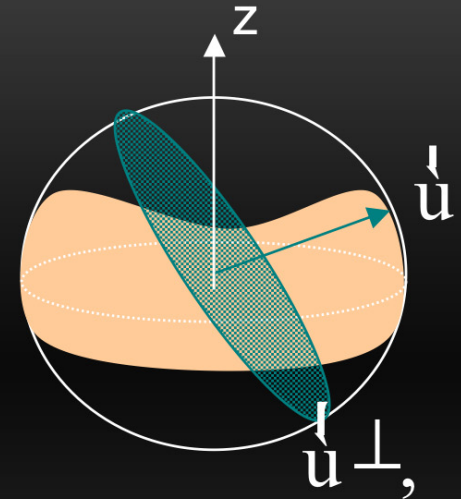
Nécessité d'estimer les projections manquantes
ou de se limiter en obliquité

Conditions de reconstruction

$$\forall \vec{u} \in \Omega \subset S,$$

Si Ω contient au moins un cercle équatorial de S
(ou si Ω intersecte tout cercle équatorial de S)

et si les projections ne sont pas tronquées

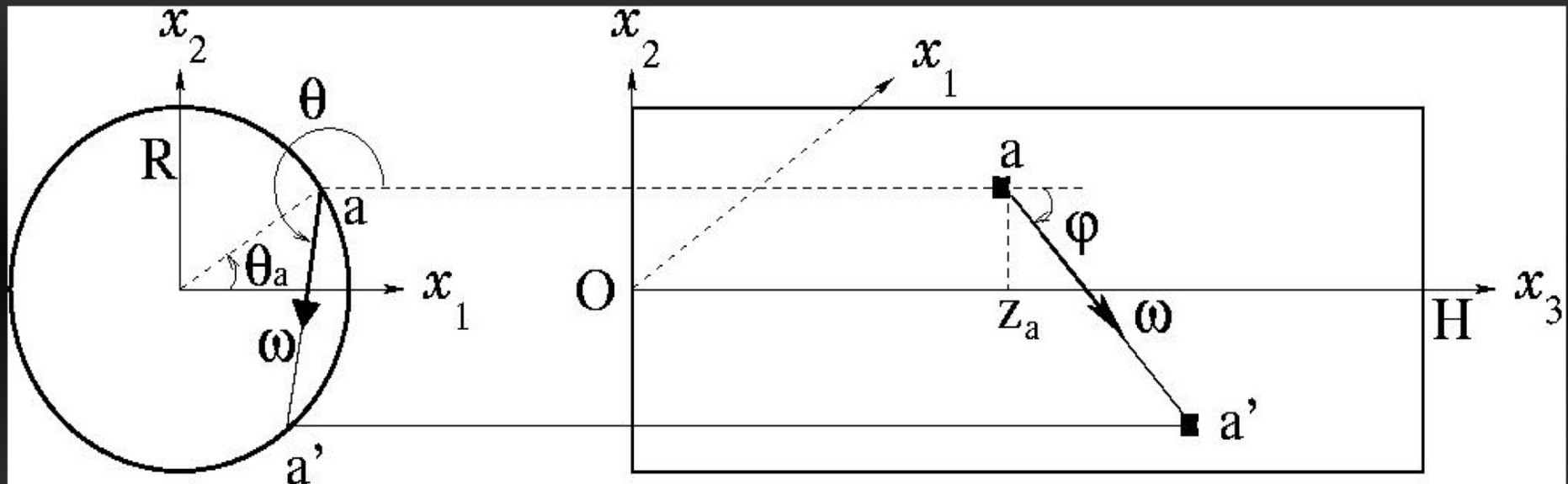


$$\forall \zeta \in \vec{u}^\perp, U_2(P_{\vec{u}}^r)(\zeta) = U_3(f)(\zeta)$$

Interpolation 3D

f

Exemple d'inversion directe 3D



Idée : Projections obliques suivant ω dans le plan fixe (x_1, x_2)

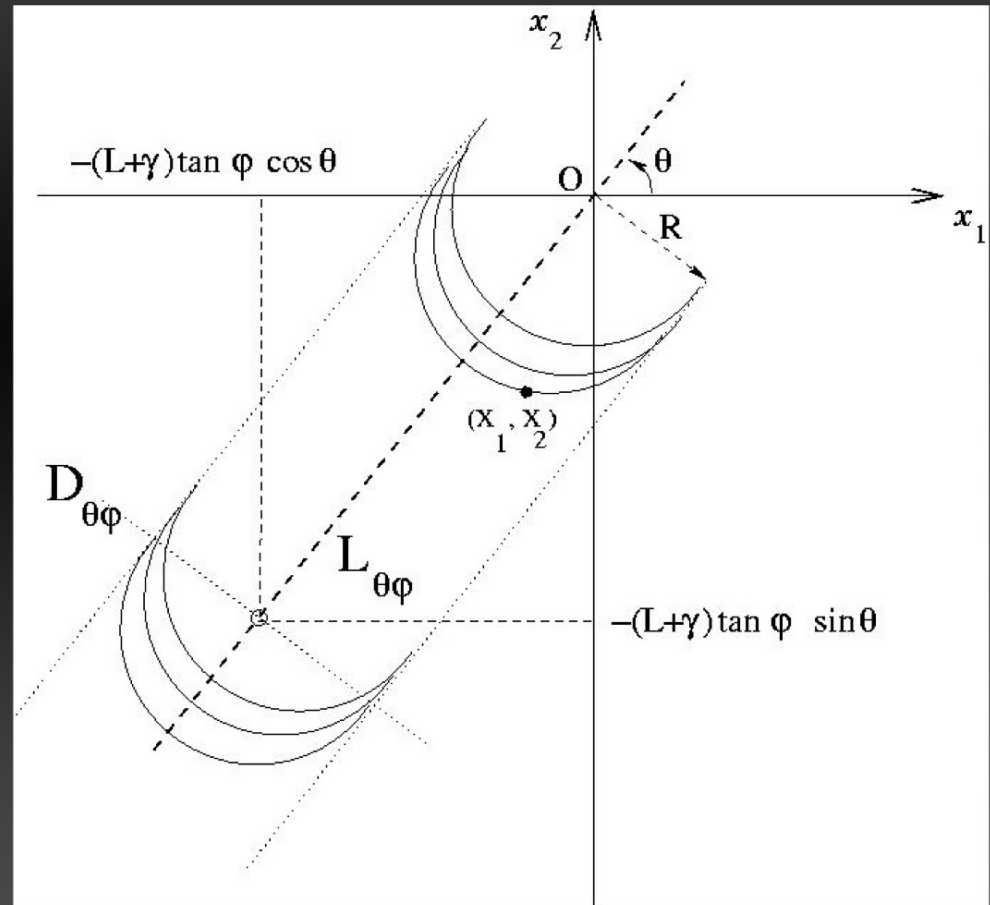
Réf: D. M-Goulart et JF. Crouzet. CRAS Physique 2005

Exemple de travaux en cours (II)

$$x_1 = R \cdot \cos(\tilde{e}_a) - z_a \cdot \operatorname{tg}(\varphi) \cos(\tilde{e})$$

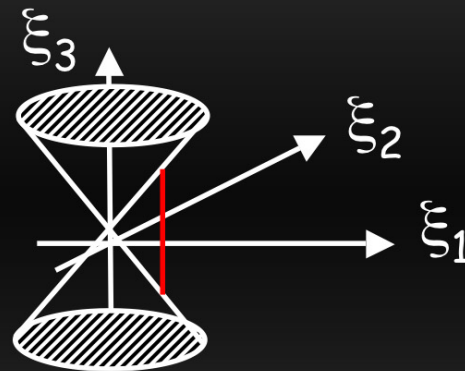
$$x_2 = R \cdot \sin(\tilde{e}_a) - z_a \cdot \operatorname{tg}(\varphi) \sin(\tilde{e})$$

$$h_{\tilde{e}, \varphi}(x_1, x_2) = \operatorname{Proj}(\tilde{e}_a, z_a, \tilde{e}, \varphi)$$



Exemple de travaux en cours (III)

$$\hat{1}_3 = -\operatorname{tg}(\varphi) [\hat{1}_1 \cos(\epsilon) + \hat{1}_2 \sin(\epsilon)] = -\operatorname{tg}(\varphi) \sqrt{\hat{1}_1^2 + \hat{1}_2^2} \cos(\alpha - \epsilon)$$



$$F(\hat{1}_1, \hat{1}_2, \hat{1}_3) = U_2(h_{\epsilon, \varphi})(\hat{1}_1, \hat{1}_2) \cdot \cos(\varphi)$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = U_3^{-1} F(\hat{1}_1, \hat{1}_2, \hat{1}_3)$$

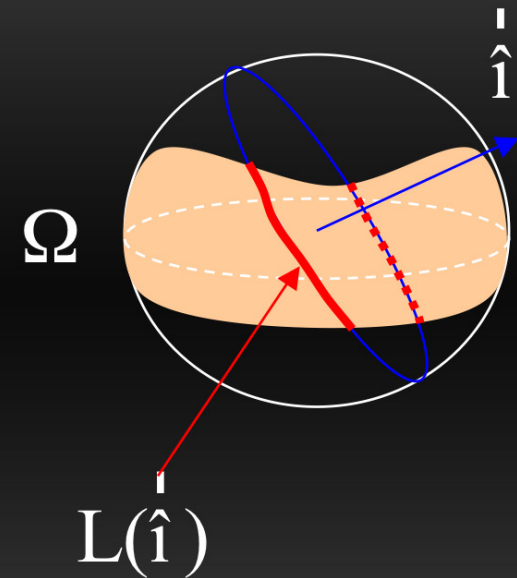
Rétroprojection filtrée 3D (I)

Dans les conditions d'Orlov, avec des projections non tronquées,

$$f(\mathbf{r}) = \int_U P_u^r(\mathbf{s}) d\mathbf{u}$$

$$P_u^r(\mathbf{s}) = \int_{\omega^\perp} P_\omega^r(\mathbf{t}) h_\omega^r(\mathbf{s} - \mathbf{t}) d\mathbf{t}$$

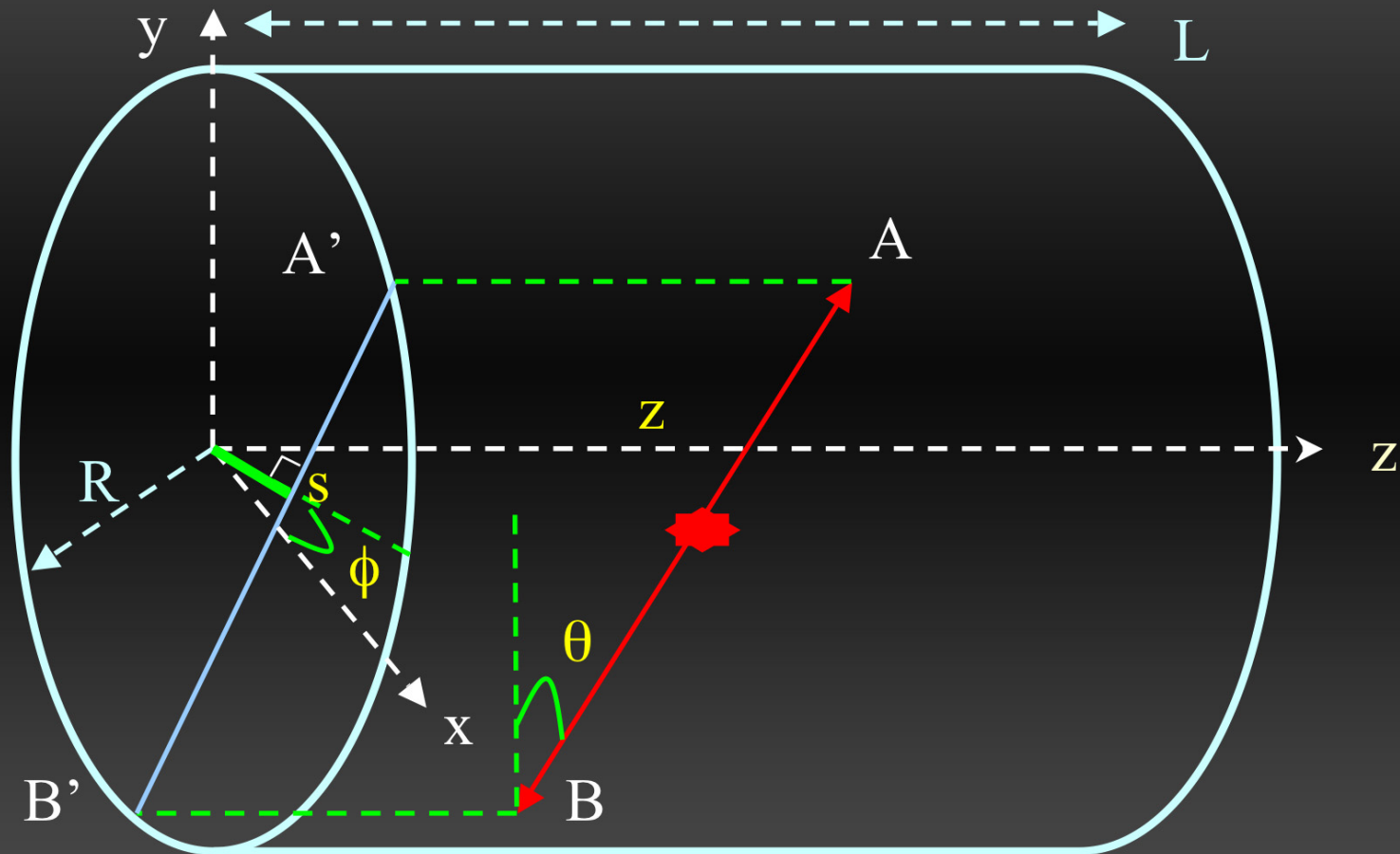
$$U_2 h_u^r(\hat{\mathbf{i}}) = \frac{\int_U \frac{1}{\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{o}}} d\hat{\mathbf{o}}}{L(\hat{\mathbf{i}})} = \frac{|\hat{\mathbf{i}}|}{L(\hat{\mathbf{i}})}$$



Rétroprojection filtrée 3D (II)

- RPF 2D (projections complètes)
- Projection du volume pour estimer les projections manquantes
- Fusion des projections mesurées et estimées
- RPF 3D

Algorithmes de ré-arrangement



$$p(s, \phi, z = (z_A + z_B)/2, \delta = \tan \theta)$$

Equivalence des projections

$p(s, \phi, z, \delta) : \text{TF}(s, \phi)$ puis $\text{TF}(z)$ si invariance T_z

$$P(\omega, k, \omega_z, \delta) = e^{-i\Delta\phi} \cdot P(\omega \cdot \chi, k, \omega_z, 0)$$

$$\alpha = \delta \cdot \omega_z / \omega \quad \Delta\phi = k \cdot \text{Arctg}(\alpha)$$

$$\chi = \sqrt{1 + \alpha^2}$$

Ré-arrangement exact

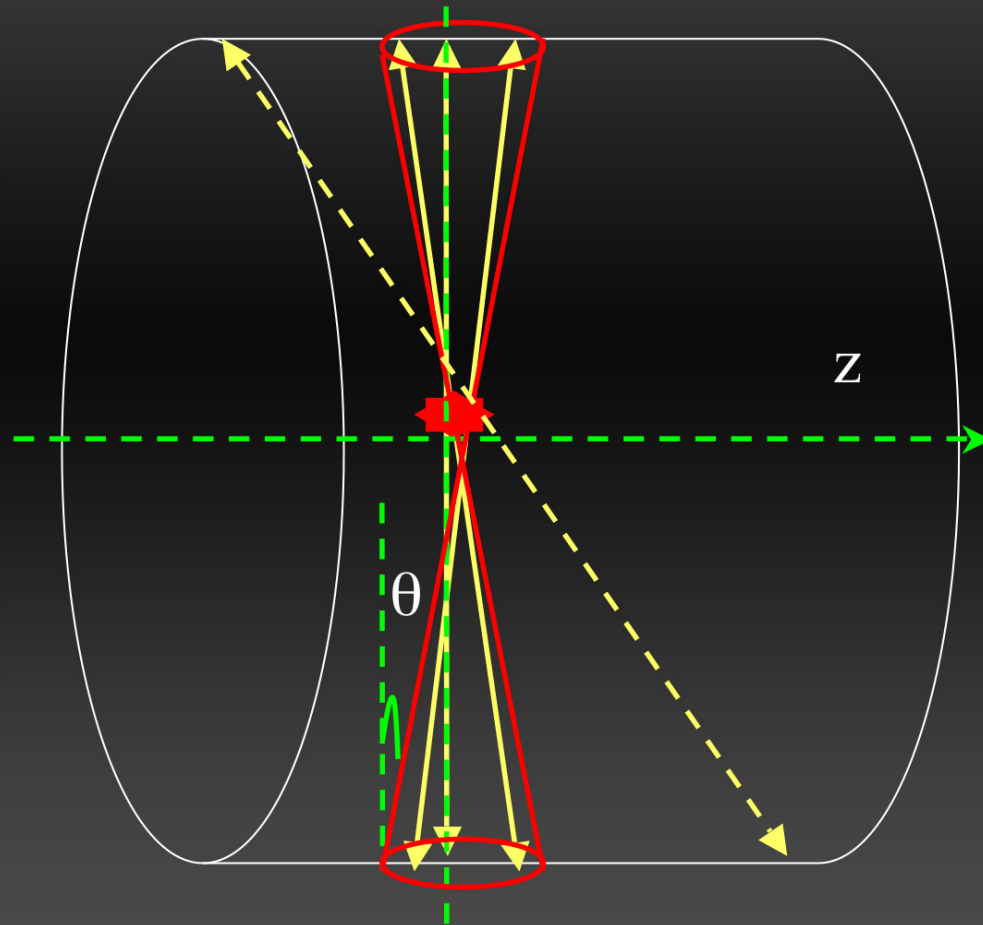
$$P(\omega, k, \omega_z, \delta) = e^{-i\Delta\phi} \cdot P(\omega, \chi, k, \omega_z, 0)$$

$$\alpha = \delta \cdot \omega_z / \omega \quad \Delta\phi = k \cdot \text{Arctg}(\alpha)$$

$$\chi = \sqrt{1 + \alpha^2} \quad \chi' = \sqrt{1 - \alpha^2}$$

$$P(\dot{u}, k, \dot{u}_z, 0) = \frac{1}{\min \left[\left| \frac{\dot{u}}{\dot{u}_z} \right|, \frac{L}{2R} \right]} \int P(\ddot{u}, k, \dot{u}_z, \ddot{a}) \cdot e^{i\ddot{A}\varphi} d\ddot{a}$$

« Single-Slice Rebinning »



$DL(\alpha)$ l'ordre 0 :

$$\Delta\phi = 0 \text{ et } \chi = 1$$

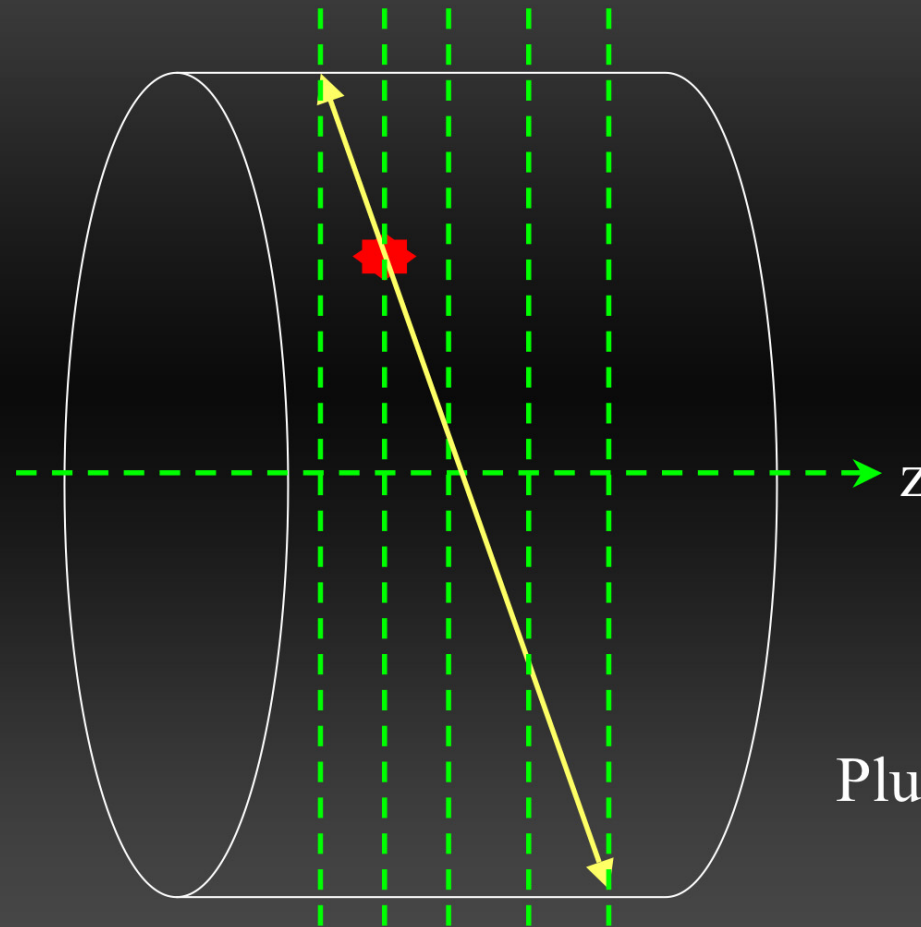
$$P(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{z}, \delta)$$

$\approx$

$$P(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{z}, 0)$$

Si la source est proche
de l'axe du TEP

« Multi-Slice Rebinning »



Plus précis que SSR
Moins stable

« Fourier Slice Rebinning »

Développement de Taylor à l'ordre 1 sur $\alpha = \delta \cdot \omega_z / \omega$:

$$\Delta\phi = k \cdot \text{Arctg}(\alpha) = k \cdot \alpha + O(\alpha^3)$$

$$\chi = \sqrt{1 + \alpha^2} = 1 + O(\alpha^2)$$

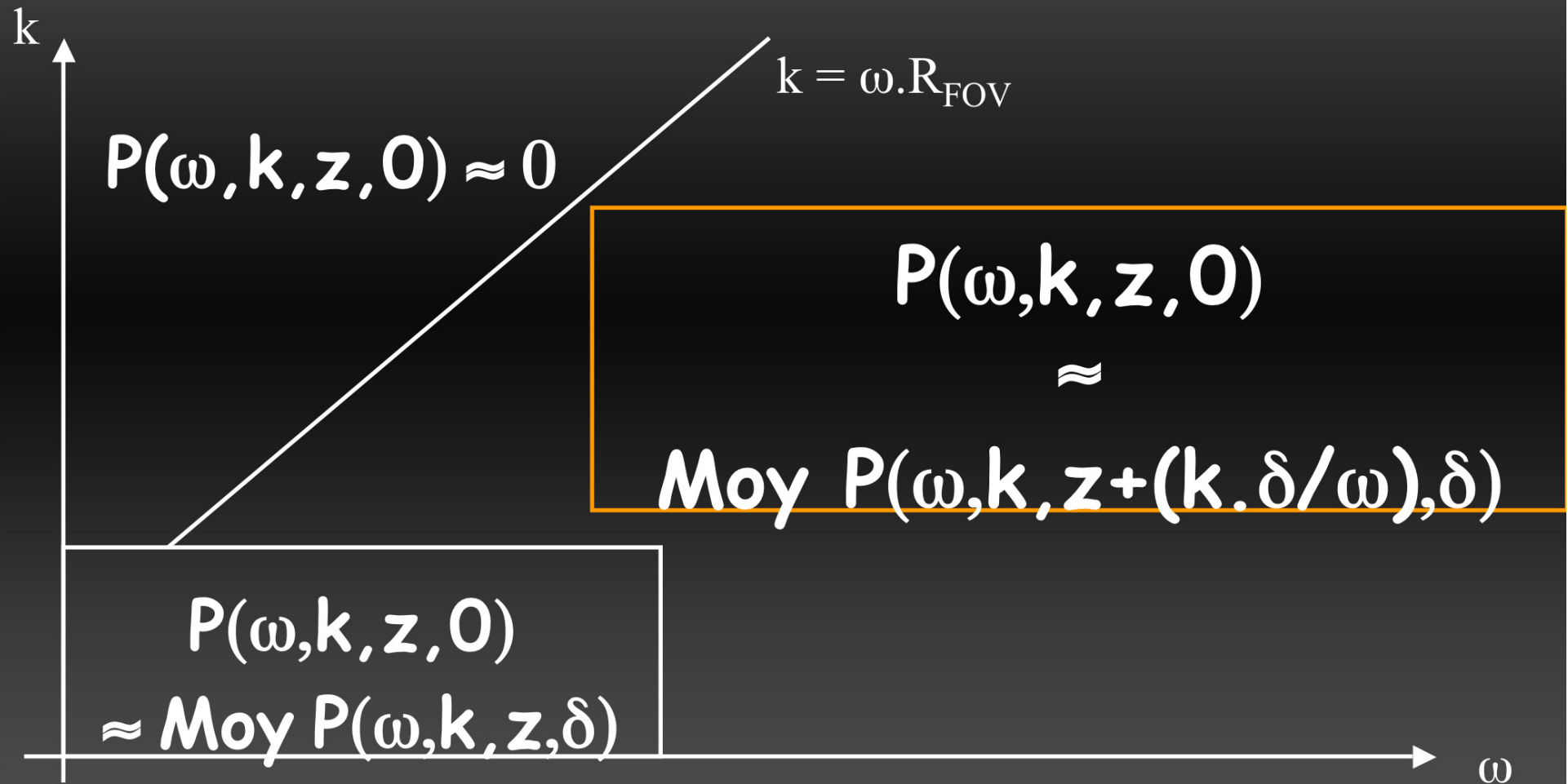
$$P(\omega, k, \omega_z, \delta) = e^{-i \cdot k \cdot \alpha} \cdot P(\omega, k, \omega_z, 0)$$

$$P(\omega, k, z, \delta) \approx P(\omega, k, z - (k \cdot \delta / \omega), 0)$$

Pas TF(z) ; Interpolation en z ; Erreur $\propto \delta^2 / \omega$

$$P(\omega, k, z, 0) \approx \text{Moyenne des } P(\omega, k, z + (k \cdot \delta / \omega), \delta)$$

« Fourier Rebinning (FORE) »



Example

$$P(\omega, k, \omega_z, \delta) = e^{-i\Delta\phi'} \cdot P(\omega, \chi', k, \omega_z, \delta')$$

$$\alpha' = (\delta - \varepsilon) \cdot \omega_z / \omega \quad \Delta\phi' = k \cdot \arctg(\alpha')$$

$$\chi' = \sqrt{1 + \alpha'^2} \quad \delta' = \varepsilon \cos(\arctg \alpha')$$

$$P(\omega, k, z, \delta) \approx P(\omega, k, z - [k \cdot (\delta - \delta') / \omega], \delta')$$