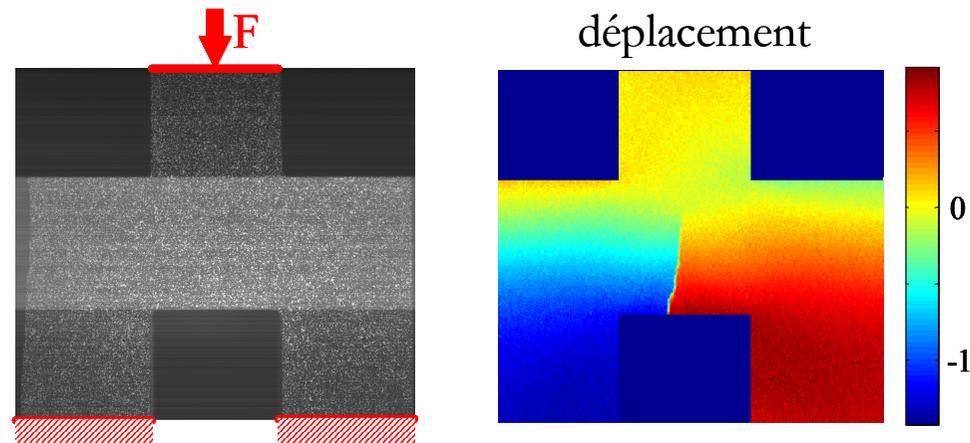


Images et Problèmes inverses : application à la mécanique

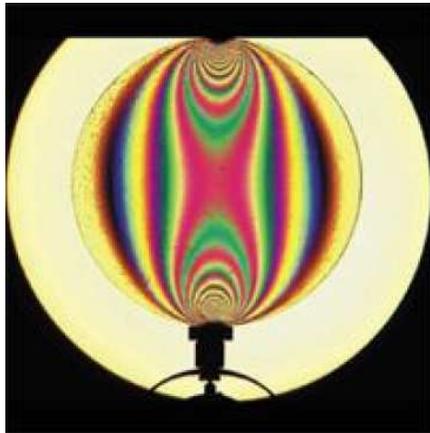
B. Wattrisse



2 février 2006

Imagerie mécanique

photoélasticimétrie



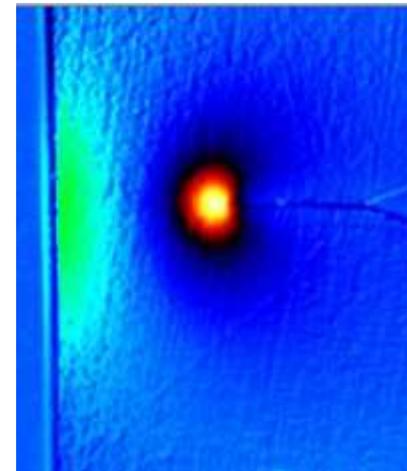
« contraintes »

corrélation d'images numériques



déplacements

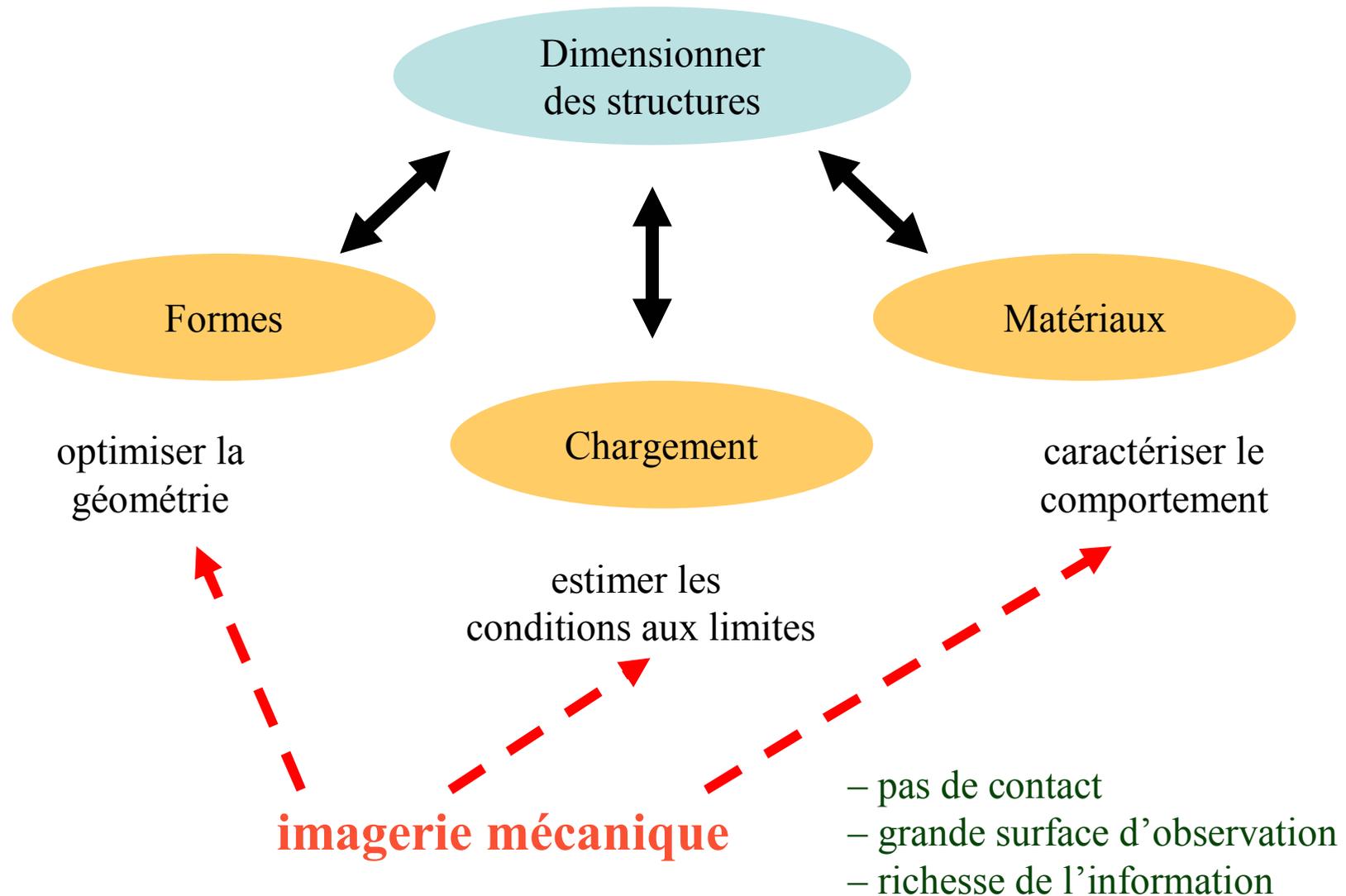
thermographie infrarouge



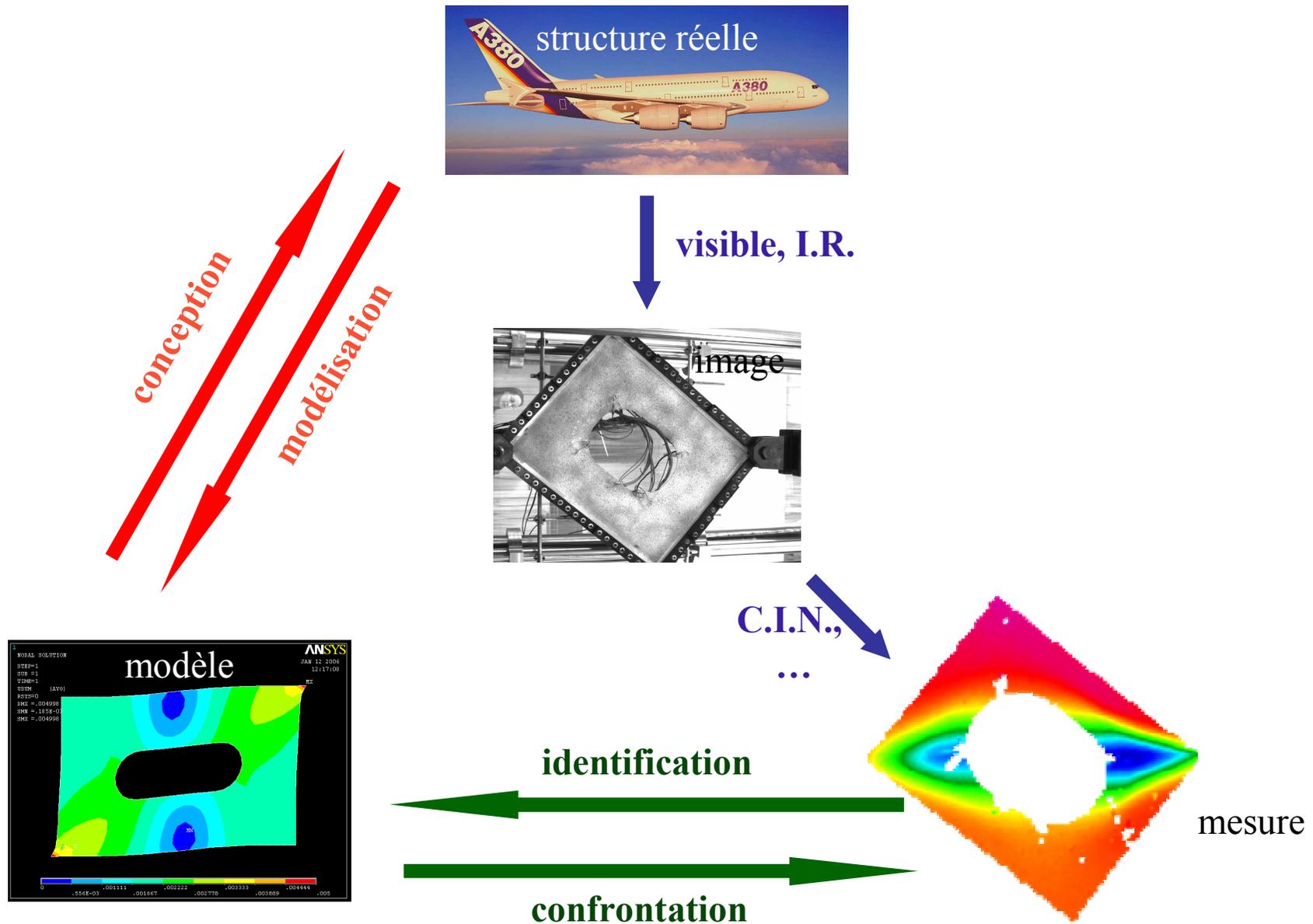
températures

...

Problématique industrielle



Utilisation de l'imagerie en mécanique



Plan

I – Généralités sur les images numériques

- numérisation
- capteur C.C.D.
- formats de stockage

II – Présentation des techniques de C.I.N.

- dispositif expérimental
- algorithmes de C.I.N.
- précision de mesure
- quelques exemples en mécanique des matériaux

III – Présentation des techniques de T.I.R.

- dispositif expérimental
- étalonnage
- traitements de données.
- quelques aspects métrologiques

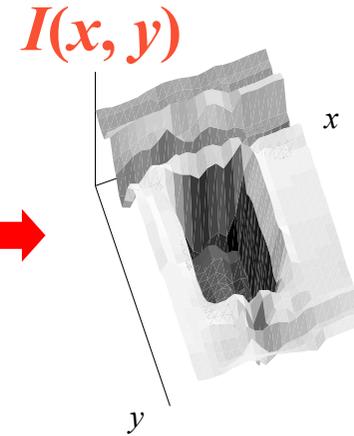
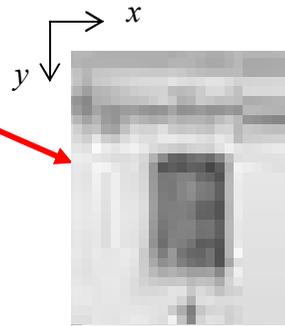
IV – Quelques applications de l'imagerie mécanique à la résolution de problèmes inverses

- identification de propriétés mécaniques
- identification de propriétés thermiques

I – Généralités sur les images numériques

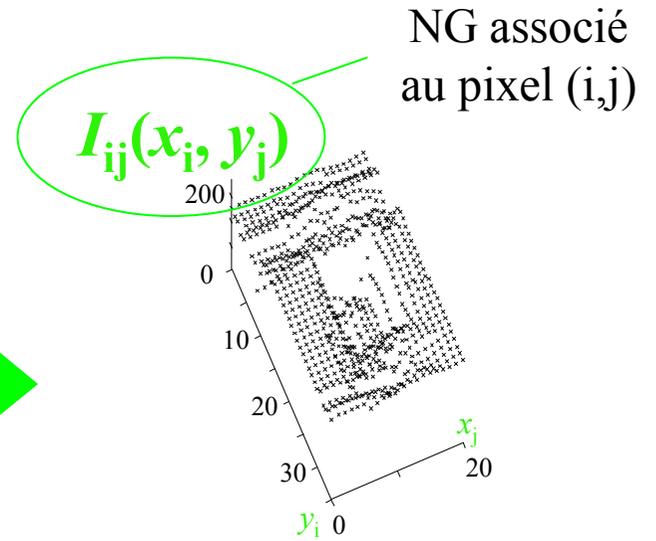
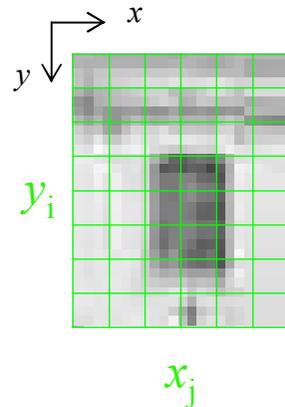
Image Numérique ?

image «analogique»



- vision naturelle
- photographie argentique
- cinéma
- ...

numériseur :
scanner,
CCD, ...



I_{ij} : image numérisée

Numérisation d'un signal continu

dynamique de numérisation : nombre de valeurs que peuvent prendre les N.G.



$$n_{\text{NG}} = 256$$

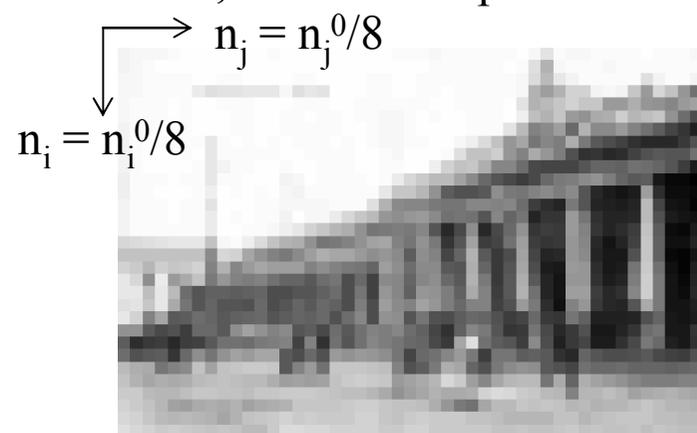


$$n_{\text{NG}} = 4$$

fréquence d'échantillonnage spatiale : résolution, «nombre de pixels»



$$f_s^0$$

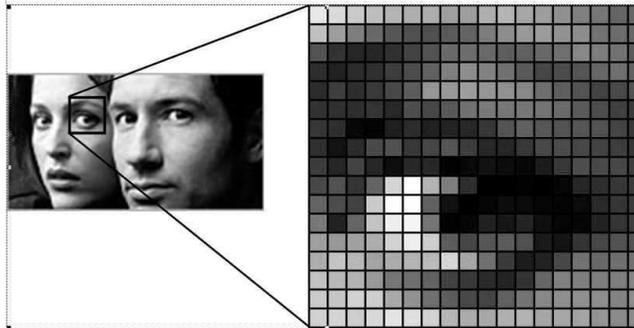


$$f_s = 1/8 f_s^0$$

Image numérisée

– image numérisée :

tableau (matrice) de n_i lignes et n_j colonnes
dont les éléments ne peuvent prendre «que» n_{NG} valeurs



signal discret :
teinte uniforme sur chaque pixel

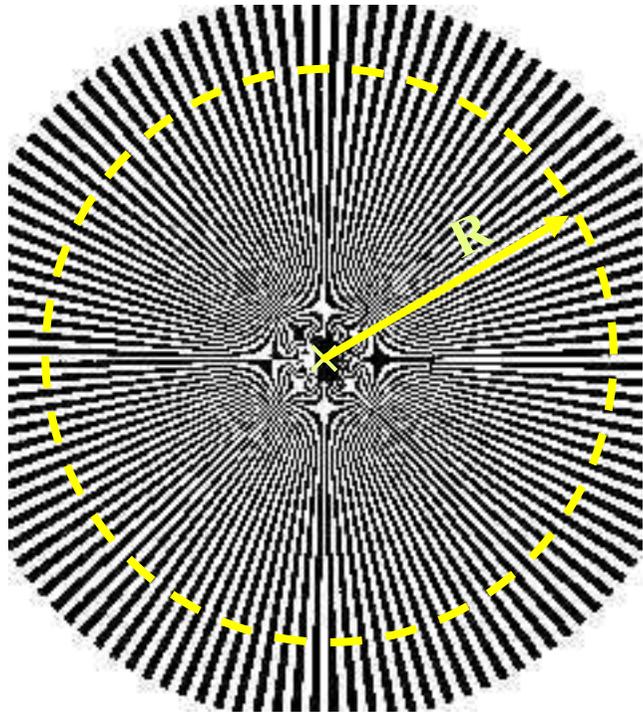
– quantité information :

1 image **1024×1024 pixels** codée sur **8 bits** ($=2^8$ NG) contient l'équivalent de
 $1024 \times 1024 = 1\ 048\ 576$ caractères ASCII,
soit **77 pages** de 90 lignes contenant 150 caractères (*cf.* Petit Larousse)

– échantillonnage :

attention à Shannon

Rappels sur le théorème de Shannon



ici f_s^{\max} diminue quand R augmente

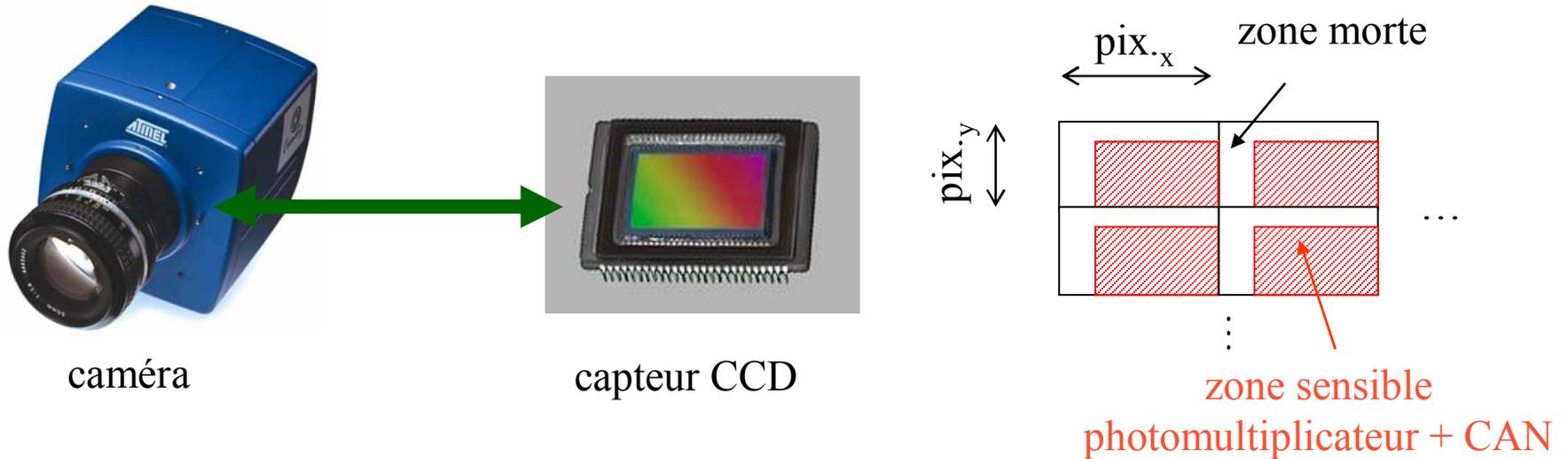
- pour une **analyse fréquentielle** correcte, il faut au moins **deux pixels par période**
- on doit donc avoir, en terme de fréquence :

$$f_c \geq 2 f_s^{\max}$$

f_c = fréquence d'échantillonnage critique
 f_s^{\max} = plus haute fréquence du signal

- en pratique, on choisit généralement au **minimum 6 pixels par période**

Un exemple de capteur/numériseur : le CCD



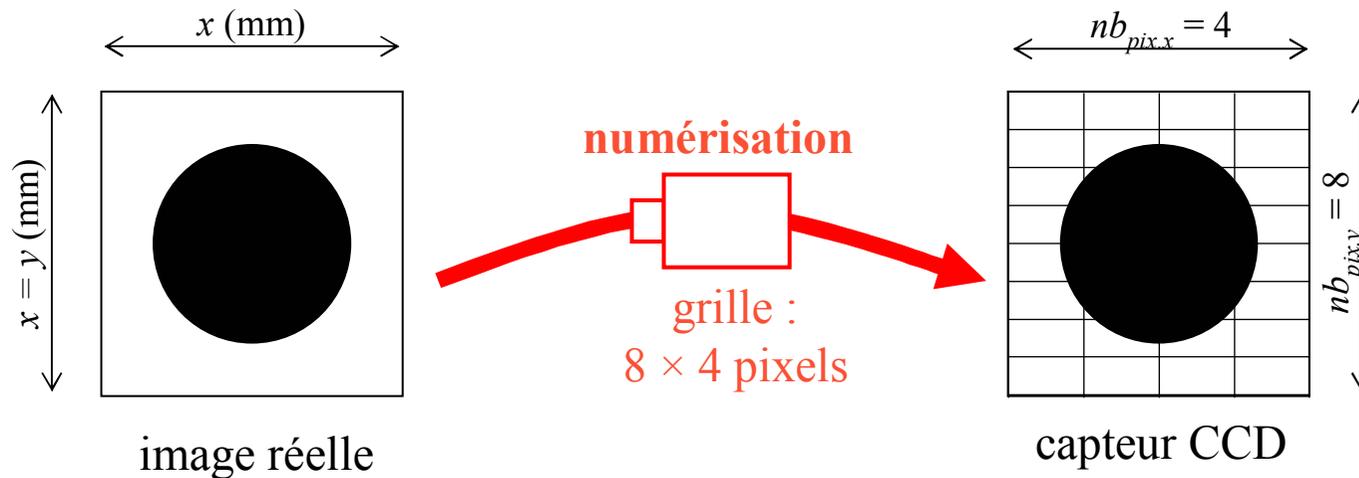
un pixel peut être :

avec une **zone morte** ou **plein**
rectangulaire ou **carré** ($\text{pix.}_x = \text{pix.}_y$)



unité de mesure = pixel !!!
attention au **grandissement**

Facteur d'échelle

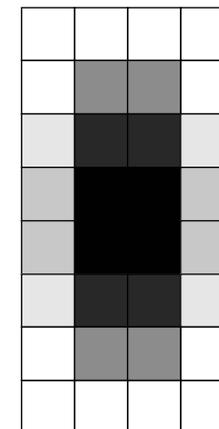


nécessité de prendre en compte les différents **facteurs d'échelles**

$$f_e^x = x/4$$

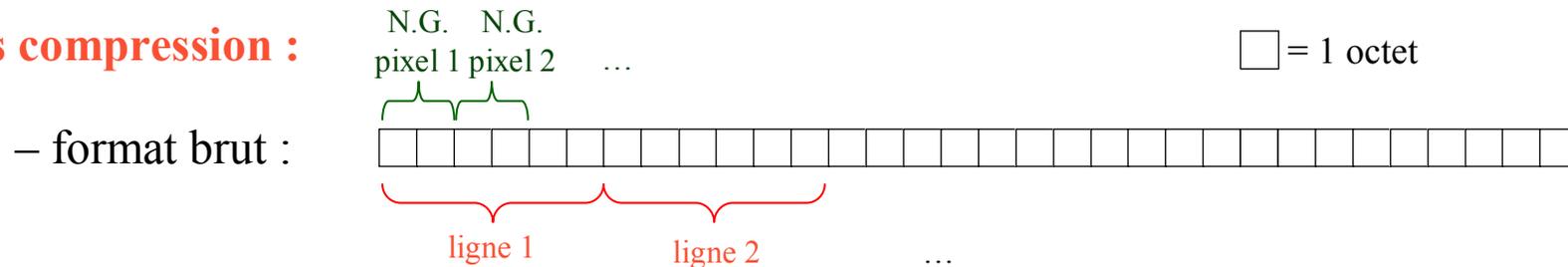
$$f_e^y = y/8$$

$$f_e^x \neq f_e^y$$

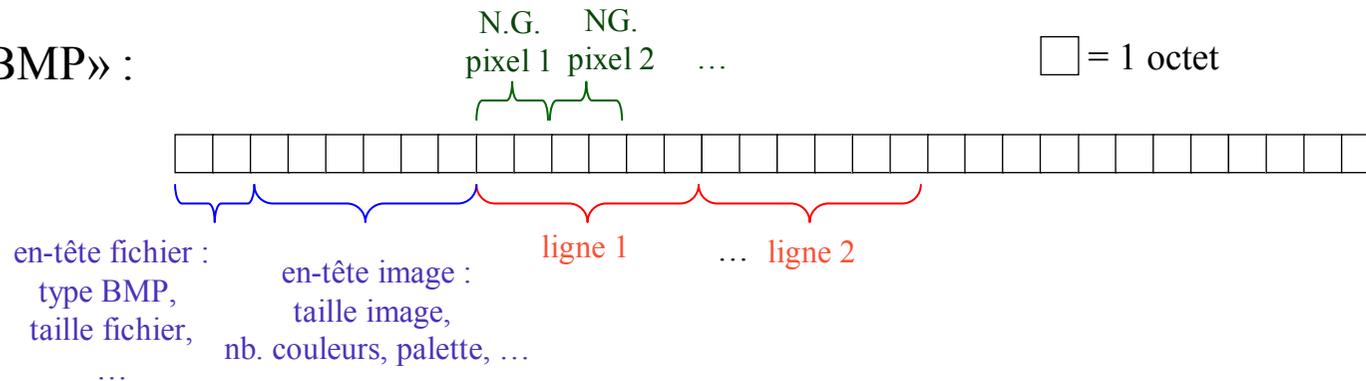


Format de stockage

– sans compression :



– format «BMP» :



– avec compression :

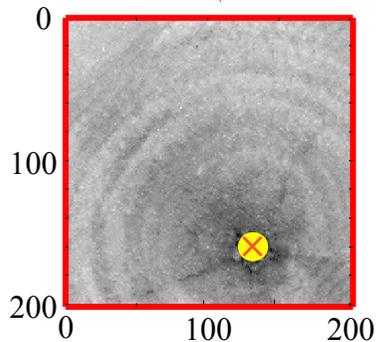
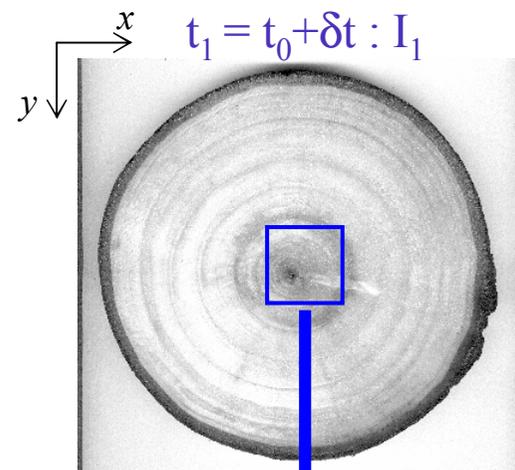
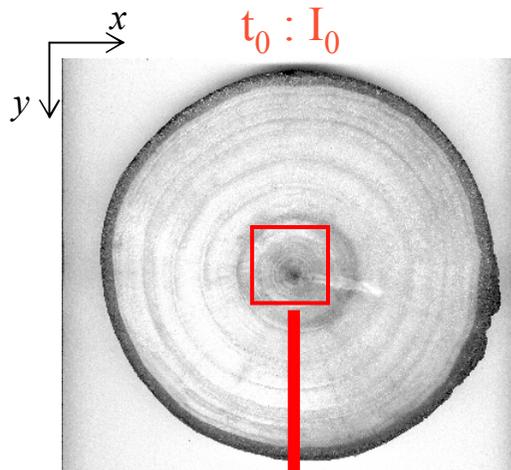
– format «TIFF» : sans perte de qualité

– format «JPEG» : avec perte d'information

⇒ à éviter pour traitement numérique d'image

II – Présentation des techniques de C.I.N.

Marqueur de surface



échelle d'étude ?
⇒ ne dépend que
de la texture

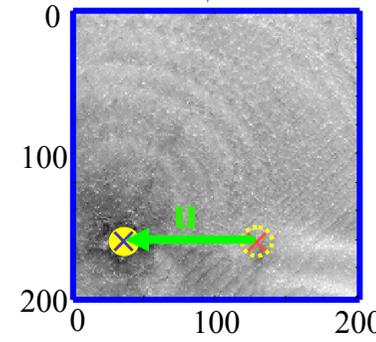
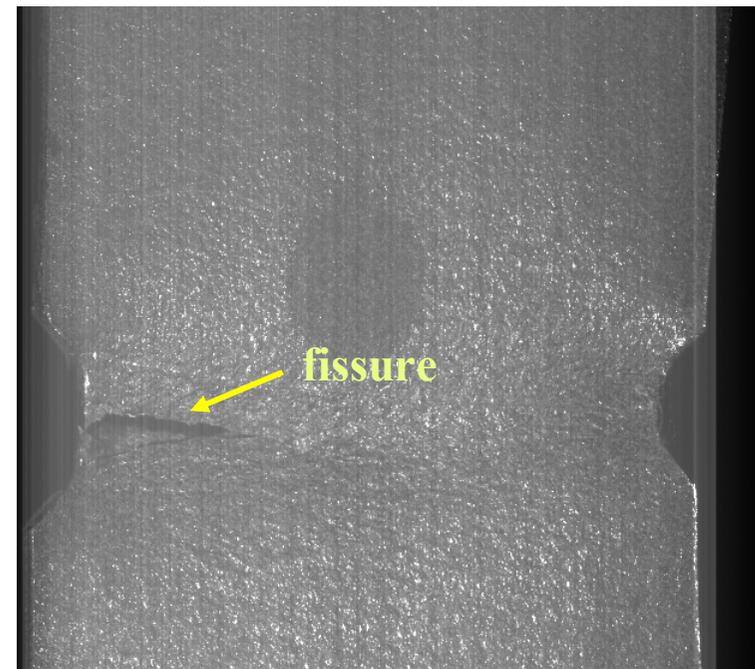
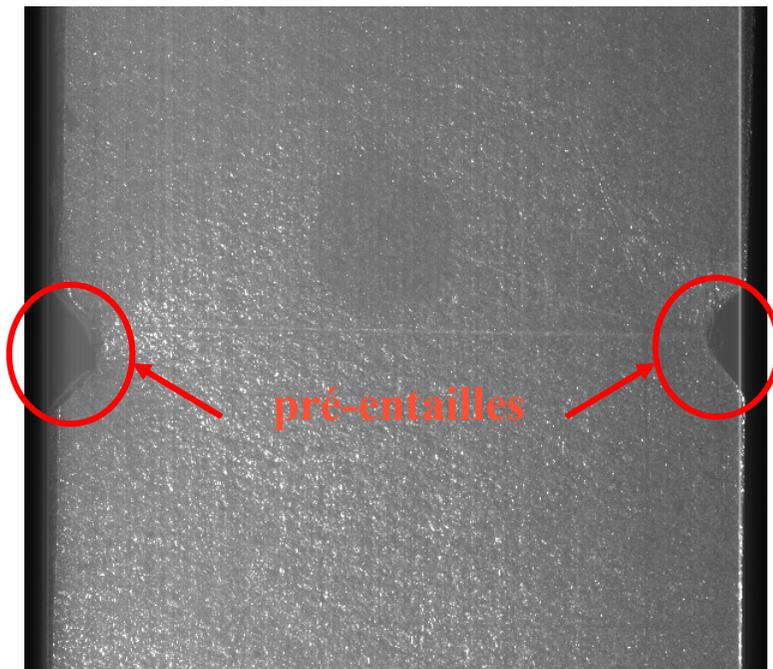


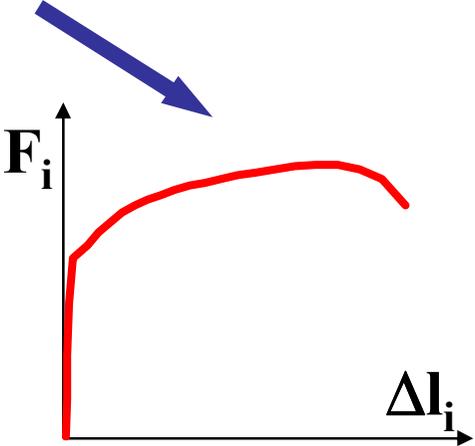
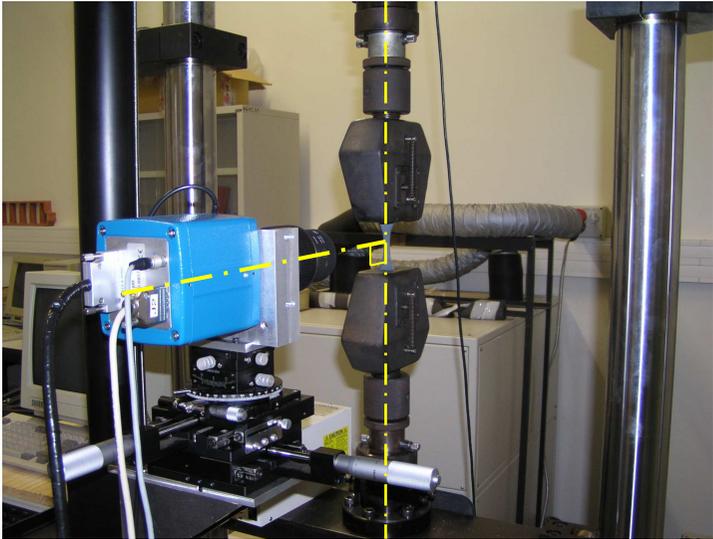
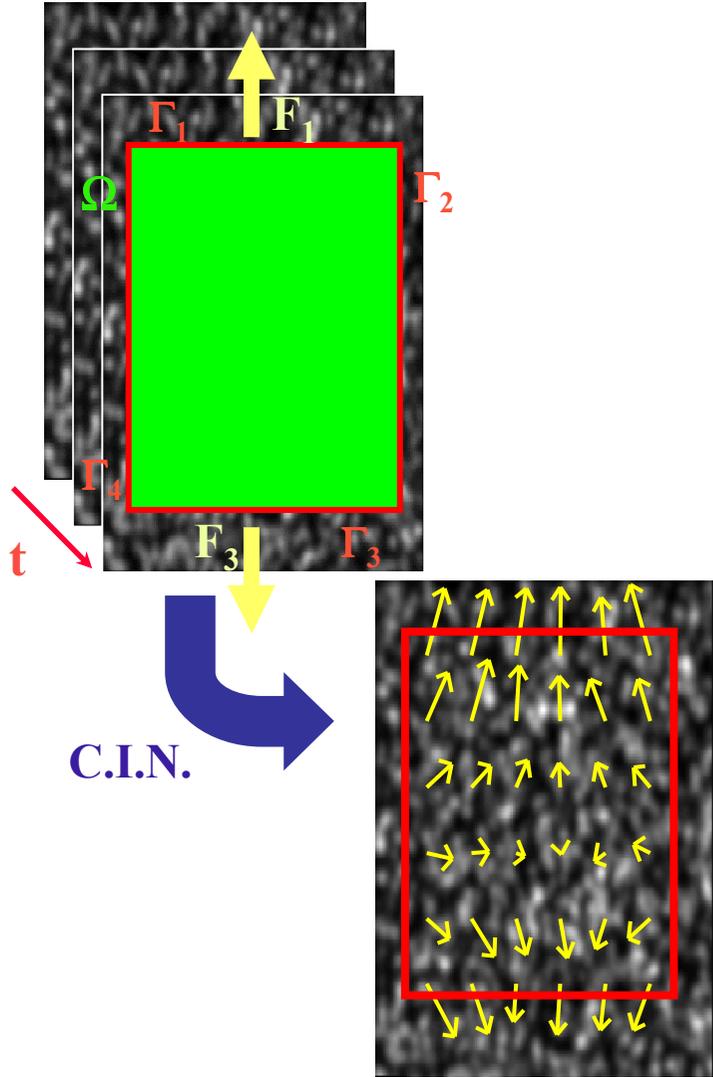
Illustration expérimentale

essai de traction sur une éprouvette de laiton pré-entailée
marqueurs de surface : mouchetis de peinture

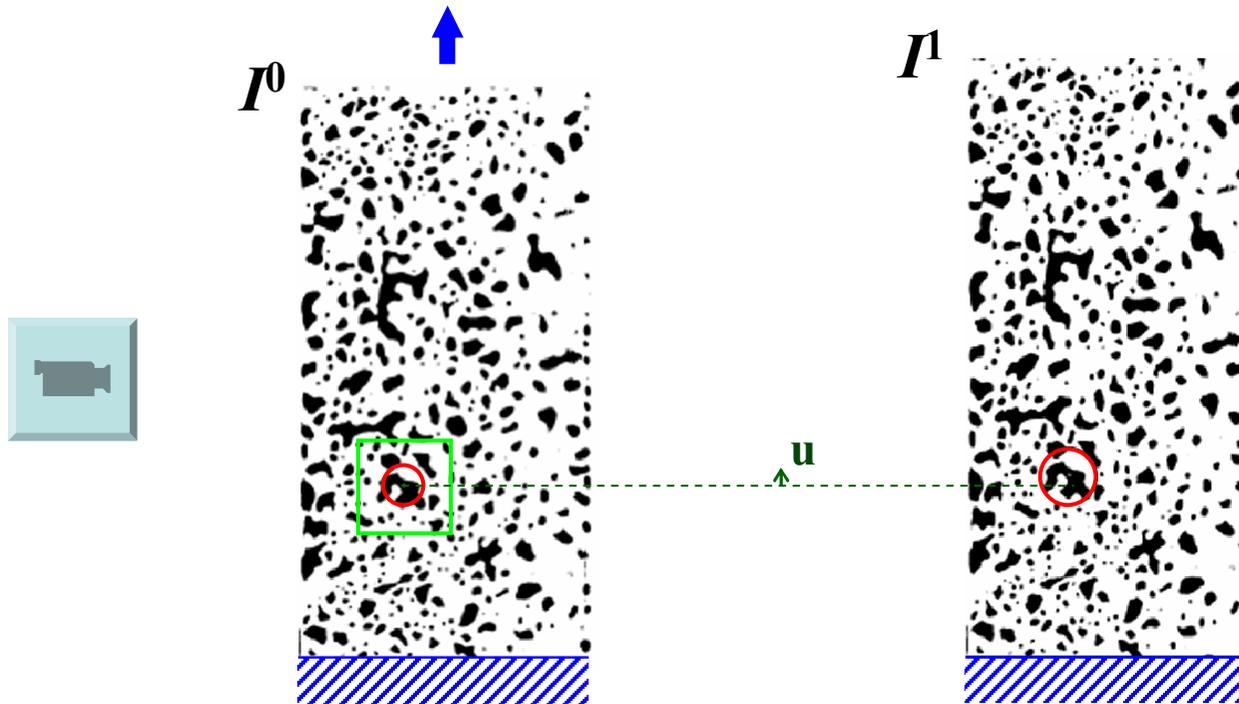


Dispositif expérimental

images de granularité



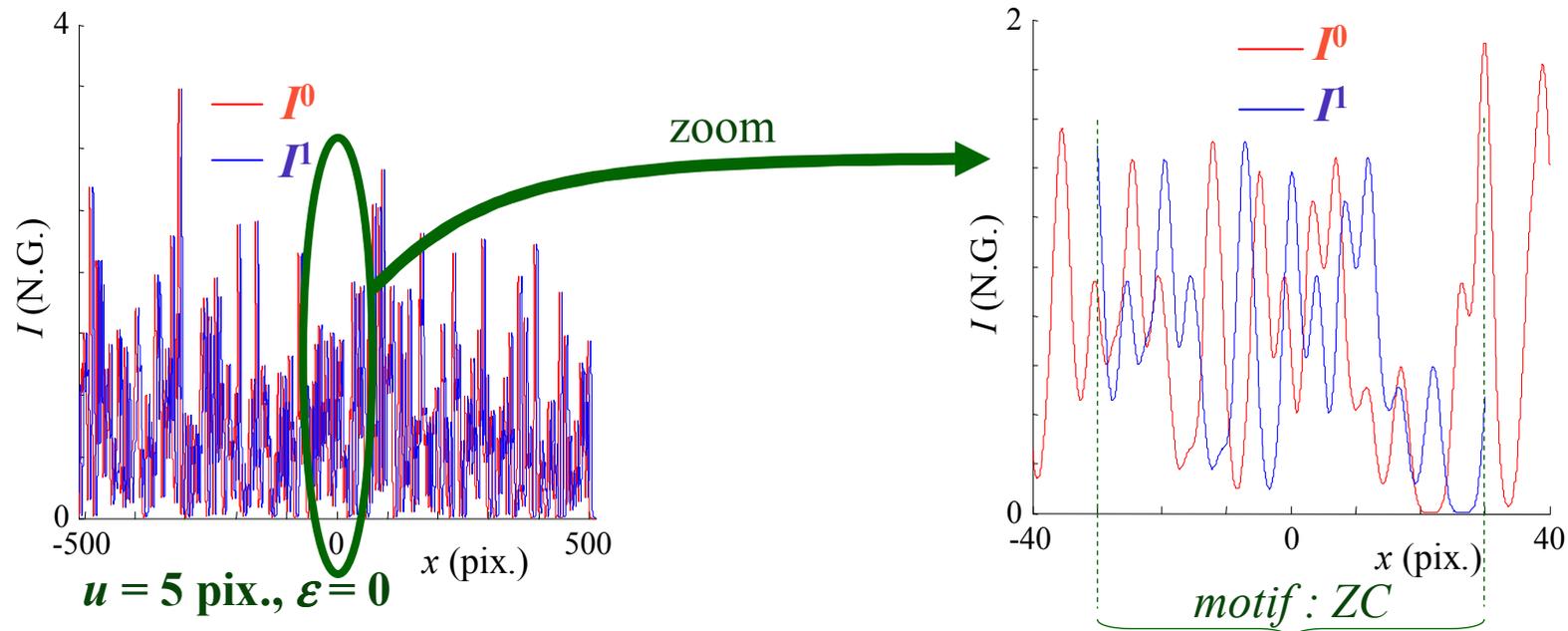
Principe de la C.I.N.



idée : trouver la **transformation** qui
minimise l'écart entre I^0 et I^1

Critères caractérisant l'écart entre I^0 et I^1

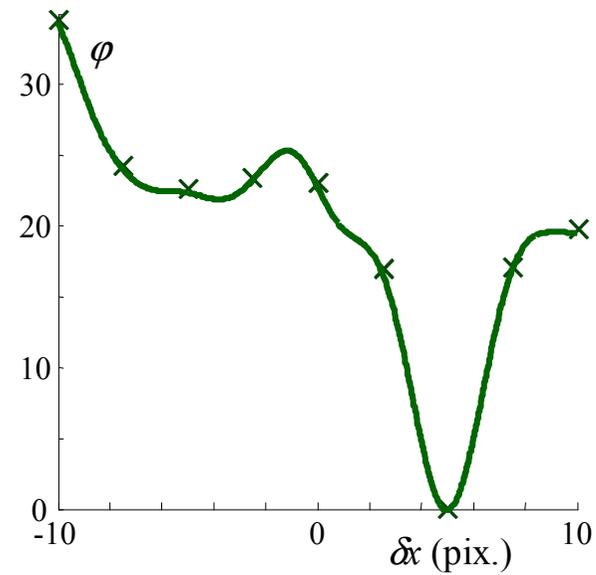
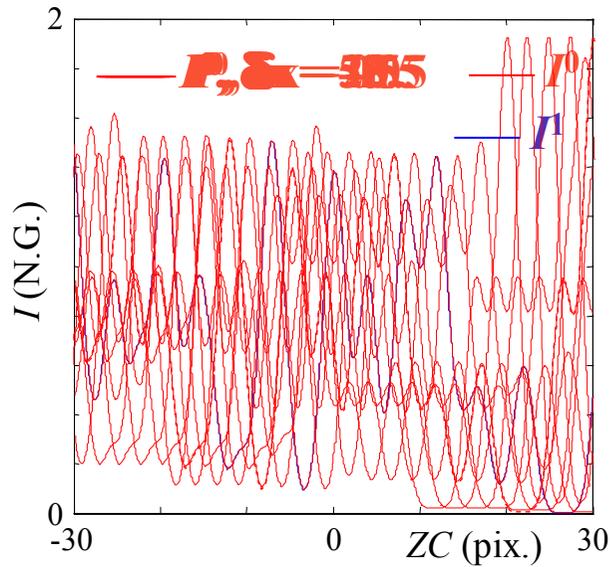
cas 1D continu



écart entre I^0 et I^1 :

$$\int_{x=-ZC/2}^{ZC/2} (I^0(x) - I^1(x))^2 dx$$

Exemple I : M.S.R. de la ZC

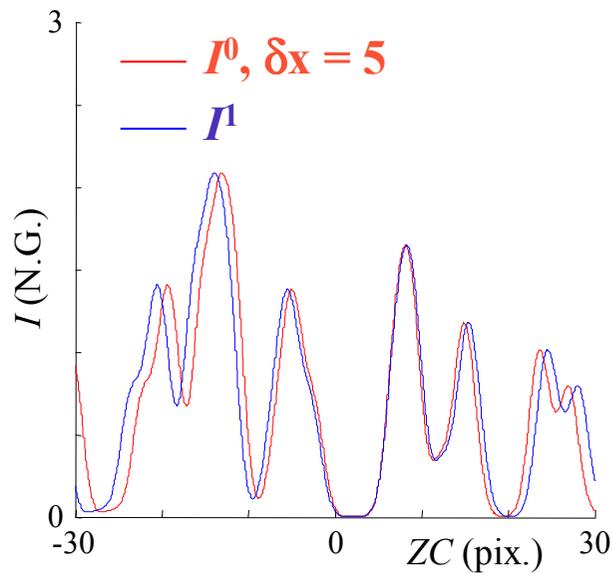


on décale I^0 d'une quantité δx , et on calcule l'écart entre I^0 et I^1 correspondant, on définit ainsi :

$$\varphi(\delta x) = \int_{x=-ZC/2}^{ZC/2} \left(I^0(x + \delta x) - I^1(x) \right)^2 dx$$

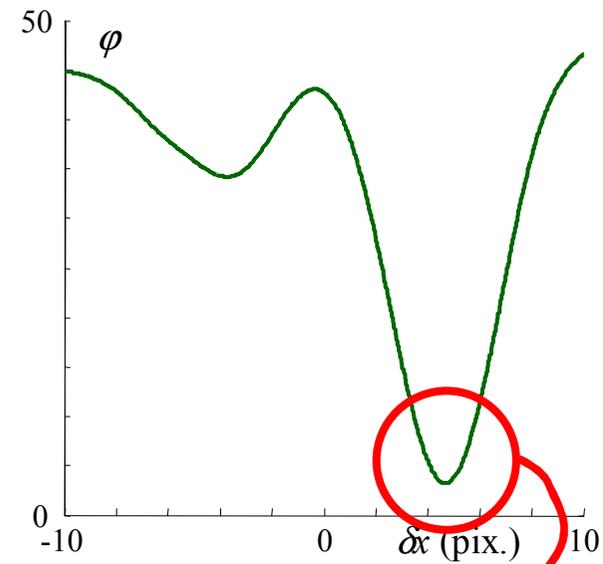
$u = \min_{\delta x} (\varphi(\delta x))$

Exemple II : déformation de la ZC

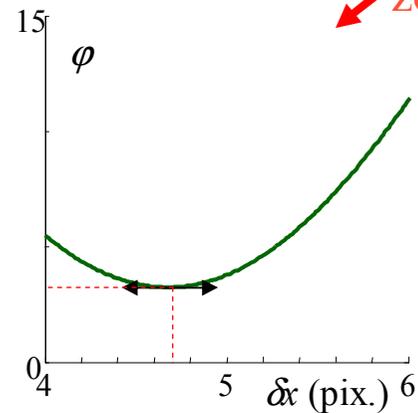


$u = 5$ pix., $\varepsilon = 5\%$

\Rightarrow nécessité de déformer le motif



$3 > 0$



$4.7 \neq 5$

Modification de φ

$$\varphi(\alpha, \delta x) = \int_{x=-ZC/2}^{ZC/2} \left(I^0(x + (\alpha x + \delta x)) - I^1(x) \right)^2 dx$$

déformation

décalage

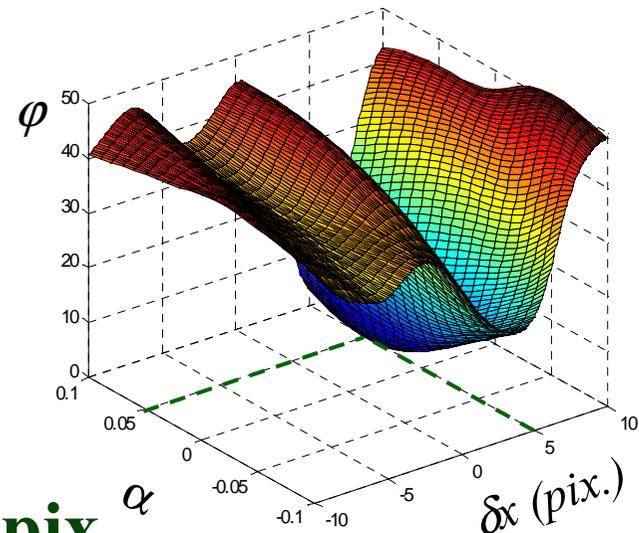


$$(\varepsilon, u) = \min_{(\alpha, \delta x)} (\varphi(\alpha, \delta x))$$

si $\varepsilon \neq \text{cte sur Z.C.}$

...

$u = 5 \text{ pix.}$
 $\varepsilon = 0.05$



Généralisation : produit de corrélation

si : $I^1(x) = I^0(x + u(x)) + b(x)$

déplacement, ... bruit

transformation

$$\varphi(\underline{v}) = \int_{ZC} (I^0(x + f(\underline{v}, x)) - I^1(x))^2 dx \longrightarrow \min_{\underline{v}}(\varphi(\underline{v})) \longrightarrow f(\underline{v}, x) \equiv u(x)$$

exemples : $f(\underline{v}, x) = \delta x$: M.S.R. de la ZC ou $f(\underline{v}, x) = \alpha x + \delta x$: ε constante de la ZC ou ...

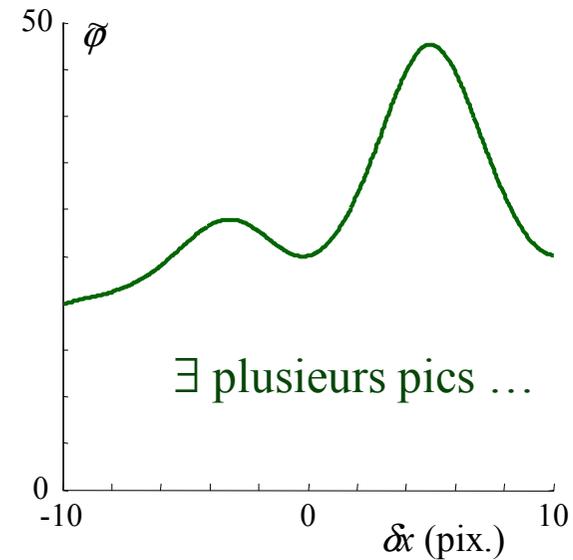
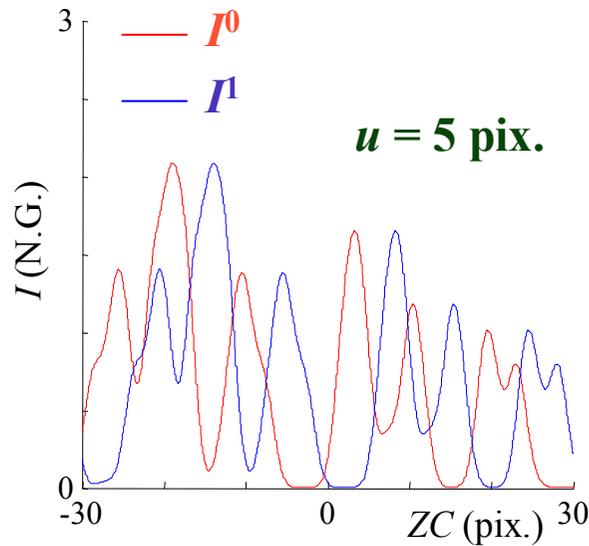
$$\varphi(\underline{v}) = \int_{ZC} (I^0(x + f(\underline{v}, x)))^2 dx + \int_{ZC} (I^1(x))^2 dx - 2 \int_{ZC} I^0(x + f(\underline{v}, x)) I^1(x) dx$$

si les images I^0 et I^1 sont «suffisamment» régulières

$$\min_{\underline{v}}(\varphi(\underline{v})) \Leftrightarrow \max_{\underline{v}}(\tilde{\varphi}(\underline{v})) \text{ avec } \tilde{\varphi}(\underline{v}) = \int_{ZC} I^0(x + f(\underline{v}, x)) I^1(x) dx$$

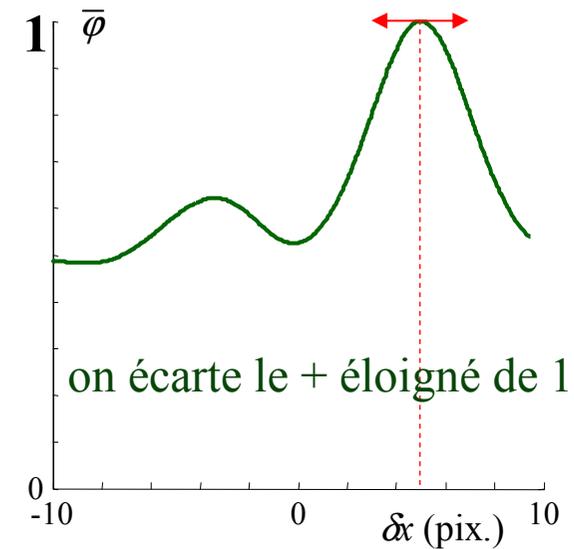
produit de corrélation

Illustration du produit de corrélation



normalisation :

$$\bar{\varphi}(\underline{v}) = \frac{\int_{ZC} I^0(x + f(\underline{v}, x)) I^1(x) dx}{\sqrt{\int_{ZC} (I^0(x + f(\underline{v}, x)))^2 dx} \cdot \sqrt{\int_{ZC} (I^1(x))^2 dx}}$$



Produit de corrélation et T.F.

– si on **néglige** la **déformation** entre les images I^0 et I^1 , on a :

$$\tilde{\varphi}(\delta x) = \int_{ZC} I^0(x + \delta x) I^1(x) dx$$

convolution : $(I^0 * I^1)(\delta x)$

– compte-tenu des propriétés de la T.F., on sait que :

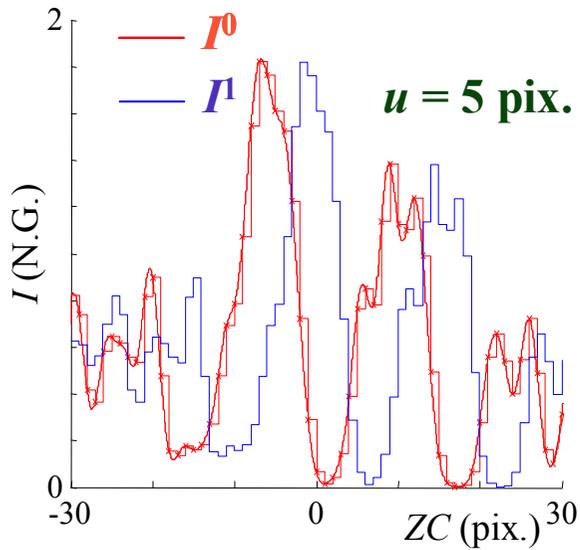
$$\mathcal{F}(I^0 * I^1) = \mathcal{F}(I^0) \cdot \mathcal{F}(I^1)$$

– donc :

$$\tilde{\varphi} = I^0 * I^1 = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(I^0) \cdot \mathcal{F}(I^1))$$

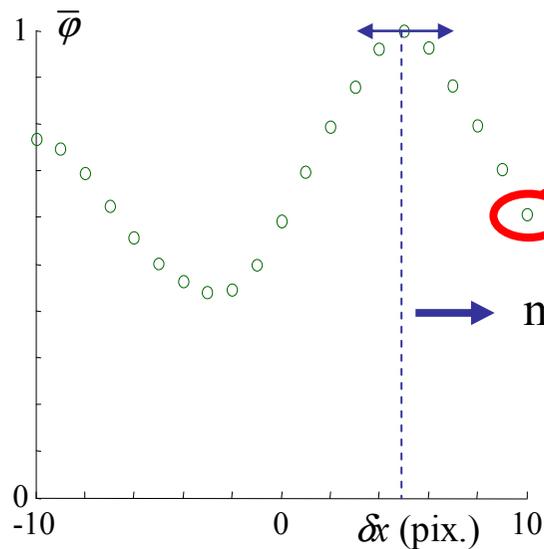
+ rapide dans certains cas

Passage au cas discret



\Rightarrow produit de corrélation **discret**

$$\bar{\varphi}(\underline{v}) = \frac{\sum_i I^0(x_i + f(\underline{v}, x_i)) I^1(x_i)}{\sqrt{\sum_i (I^0(x_i + f(\underline{v}, x_i)))^2} \cdot \sqrt{\sum_i (I^1(x_i))^2}}$$

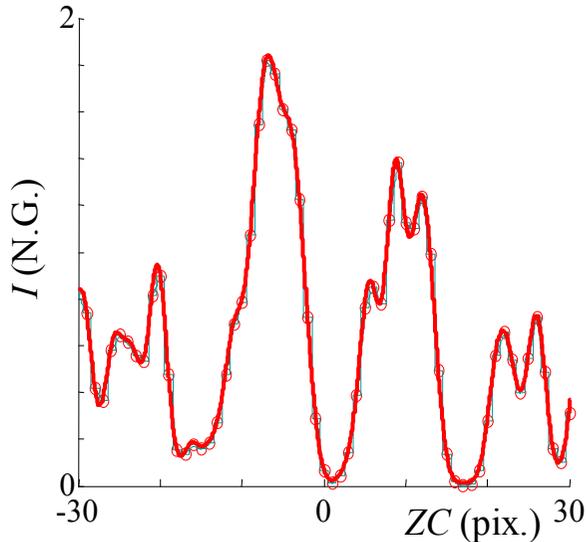


intégration discrète \Rightarrow **erreur d'intégration**

maximum discret de $\bar{\varphi} \Rightarrow$ **résolution au pixel près**

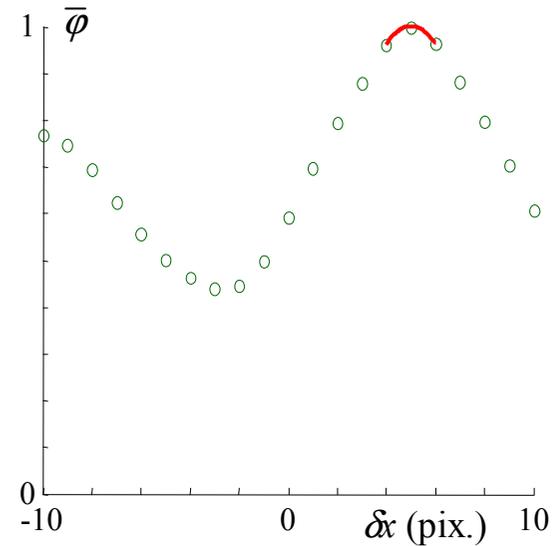
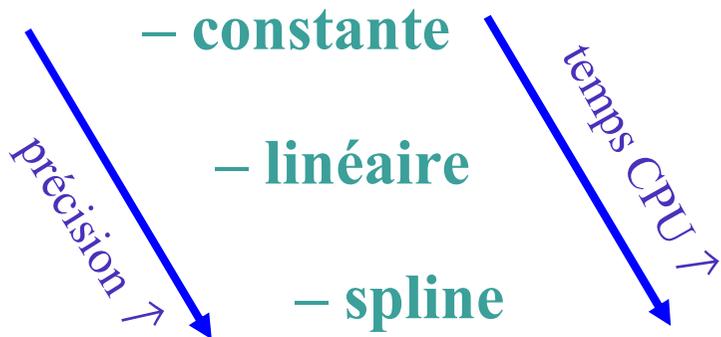
nécessité d'interpoler l'image ou $\bar{\varphi}$

Résolution sub-pixel



interpolation des N.G. de l'image :

\Rightarrow pour calculer $I^0(x_i + f(\underline{v}, x_i))$



interpolation de $\bar{\varphi}$

– polynôme

\Rightarrow résolution sub-pixel sur u

Passage au cas 2D discret

maximiser : $\bar{\varphi}(\underline{v}_x, \underline{v}_y) = \frac{\sum_{i,j} I^0(x_i + f_x(\underline{v}_x, x_i), y_j + f_y(\underline{v}_y, y_j)) I^1(x_i, y_j)}{\sqrt{\sum_{i,j} (I^0(x_i + f_x(\underline{v}_x, x_i), y_j + f_y(\underline{v}_y, y_j)))^2} \cdot \sqrt{\sum_{i,j} (I^1(x_i, y_j))^2}}$

– pour simplifier, si on ne considère que des **M.S.R.** de la **ZC** :

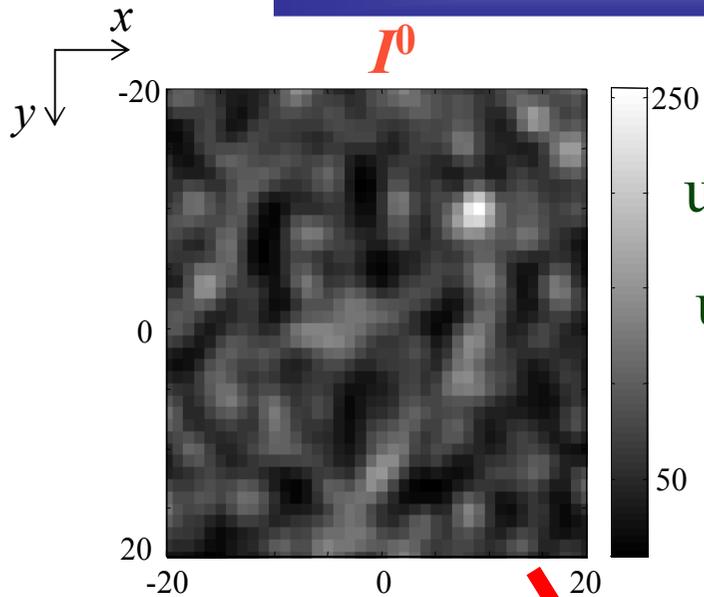
⇒ maximiser : $\bar{\varphi}(\delta x, \delta y) = \frac{\sum_{i,j} I^0(x_i + \delta x, y_j + \delta y) I^1(x_i, y_j)}{\sqrt{\sum_{i,j} (I^0(x_i + \delta x, y_j + \delta y))^2} \cdot \sqrt{\sum_{i,j} (I^1(x_i, y_j))^2}}$

– on calcule les valeurs de $\bar{\varphi}$ pour des $(\delta x_k, \delta y_l)$ multiples du **pixel**

⇒ pas d'interpolation de I^0

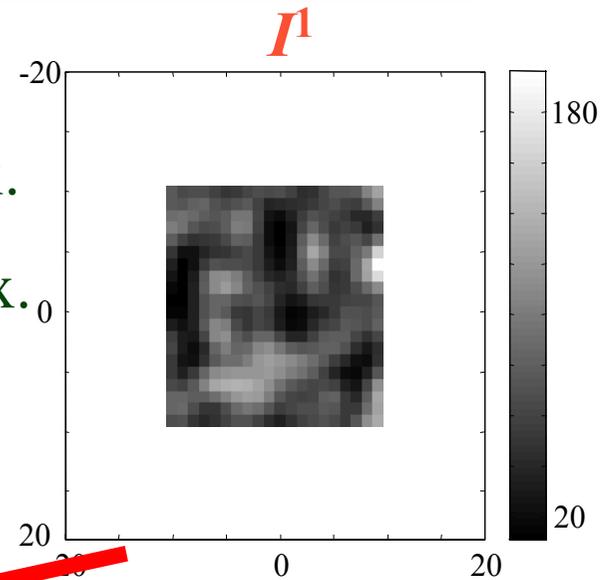
⇒ résolution sub-pixel : interpolation de $\bar{\varphi}$

Un exemple 2D discret

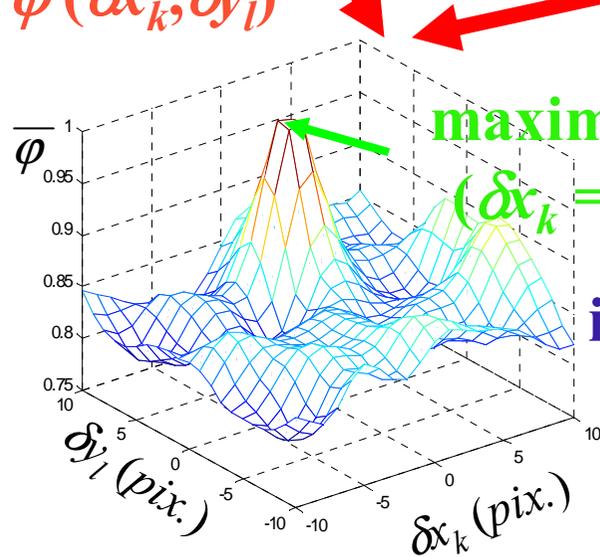


u_x imposé = 1.5 pix.

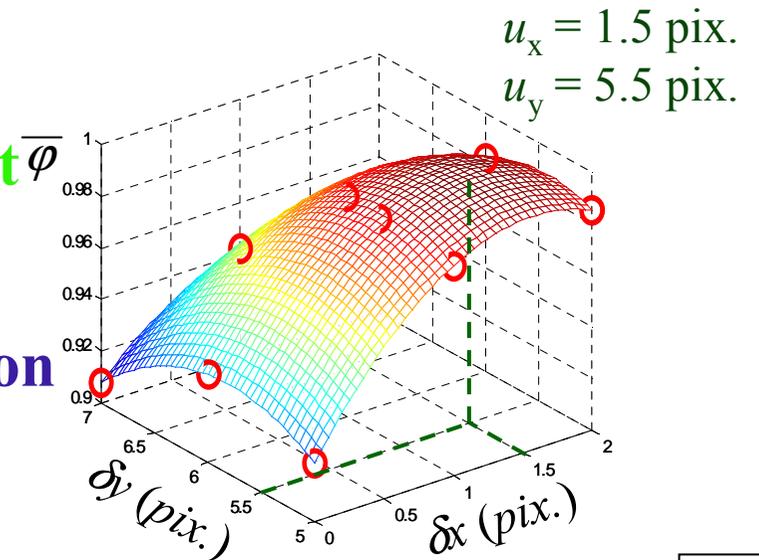
u_y imposé = 5.5 pix.



calcul de $\varphi(\delta x_k, \delta y_l)$



interpolation



Estimation des déformations

après le calcul de corrélation, on obtient un **jeu de paramètres** (v_x, v_y) tel que $(f_x(v_x, x, y), f_y(v_y, x, y))$ corresponde à la **transformation** $(u_x(x, y), u_y(x, y))$ subie par le point $M(x, y)$ considéré


$$\nabla u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial f_x(v_x, x, y)}{\partial x} & \frac{\partial f_x(v_x, x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_y(v_y, x, y)}{\partial x} & \frac{\partial f_y(v_y, x, y)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

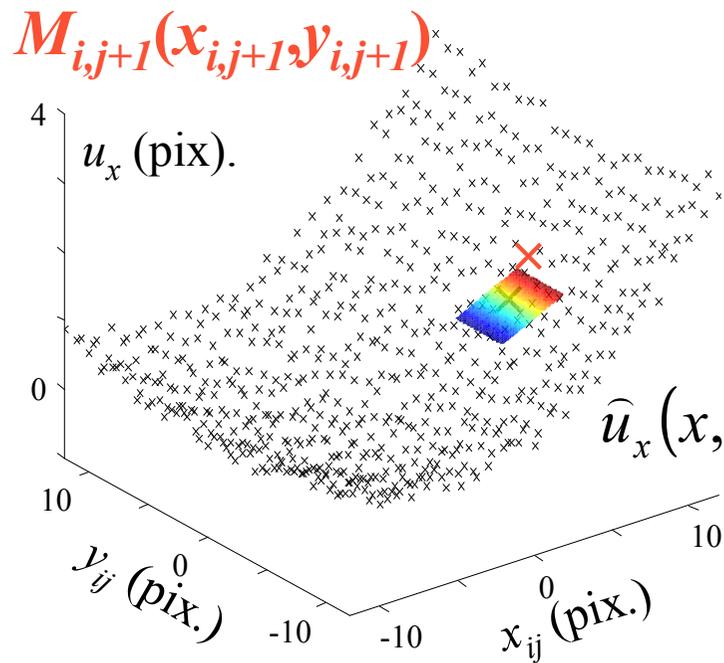
et, en **H.P.P.** :

$$\varepsilon_{xx}(x, y) \equiv \frac{\partial f_x(v_x, x, y)}{\partial x}, \varepsilon_{xy}(x, y) \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_x(v_x, x, y)}{\partial y} + \frac{\partial f_y(v_y, x, y)}{\partial x} \right), \varepsilon_{yy}(x, y) \equiv \frac{\partial f_y(v_y, x, y)}{\partial y}$$

si f_x et f_y n'intègrent pas la déformation du motif...

Estimation déformations : dérivation numérique

$M_{ij}(x_{ij}, y_{ij})$ si f_x et f_y n'intègrent pas la déformation du motif ...



dérivation numérique de $u_x(x_{ij}, y_{ij})$ et $u_y(x_{ij}, y_{ij})$:

– différences finies

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} \Big|_{(x_{i,j}, y_{i,j})} = \frac{u_x^{i,j+1} - u_x^{i,j}}{x^{i,j+1} - x^{i,j}}$$

↗ bruit

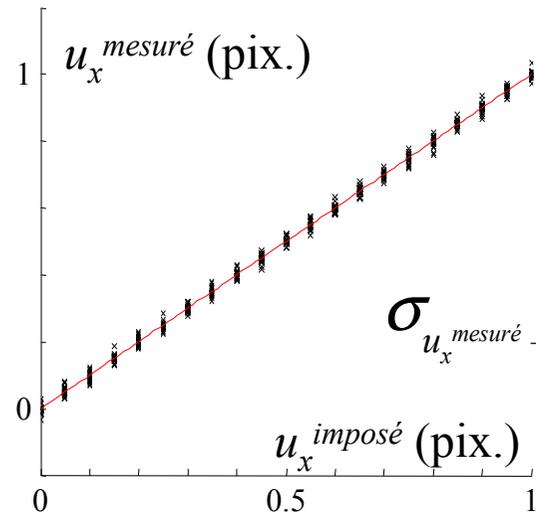
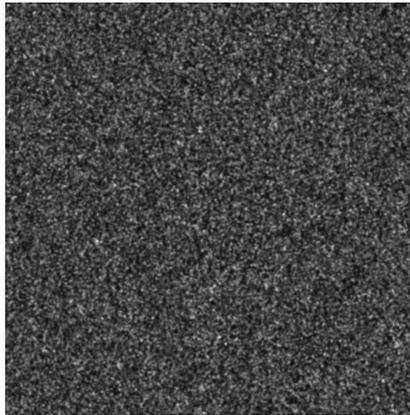
– approximation locale

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} \Big|_{(x_{i,j}, y_{i,j})} = \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial x} \Big|_{(x_{i,j}, y_{i,j})} \quad \searrow \text{bruit}$$

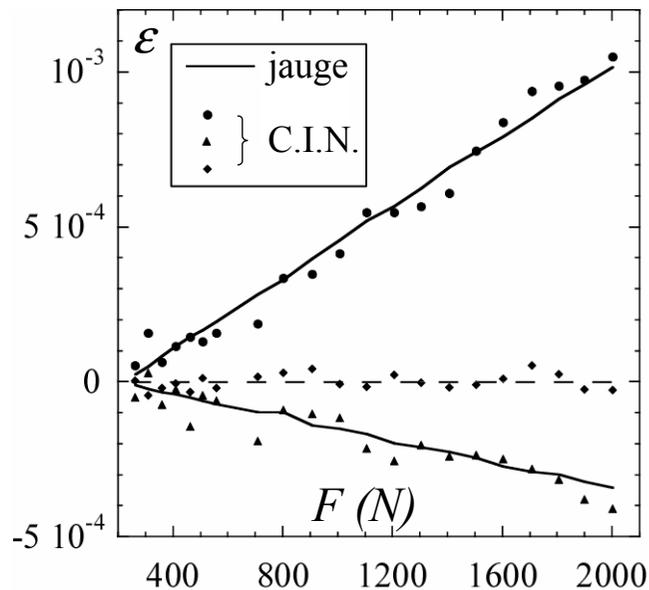
– ...

Résolution – Précision

images de synthèse translattées numériquement



$$\sigma_{u_x^{mesuré} - u_x^{imposé}} \approx 0.015 \text{ pix.}$$



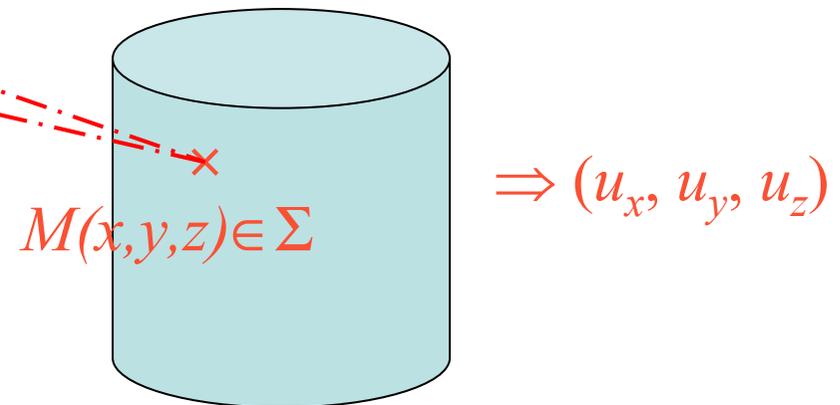
images expérimentales :
essai de traction

d'après :

Généralisation à la mesure de déplacements 3D

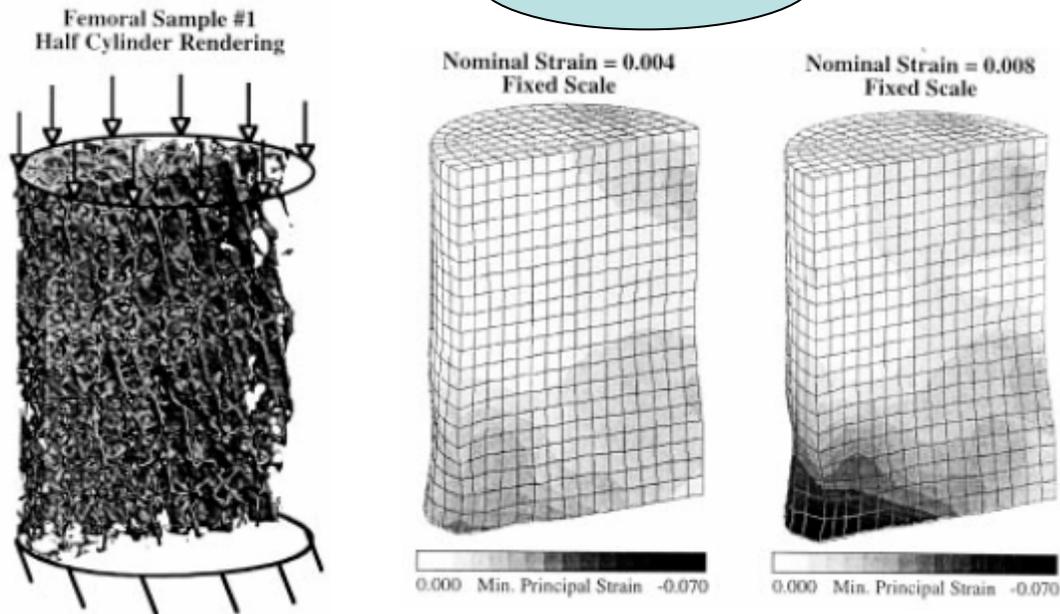


en surface :
stéréocorrélation



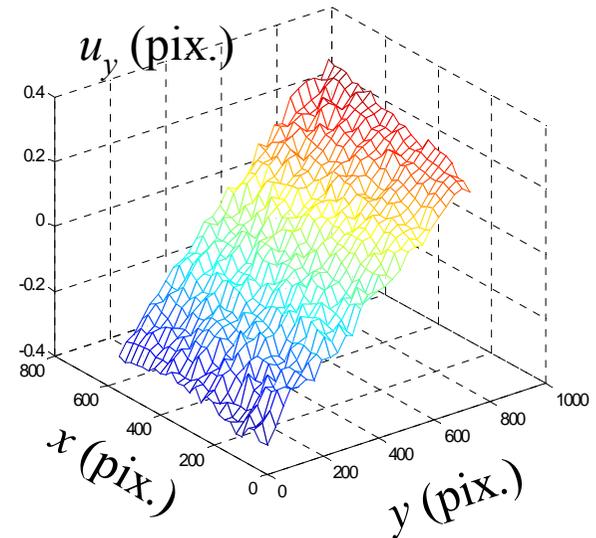
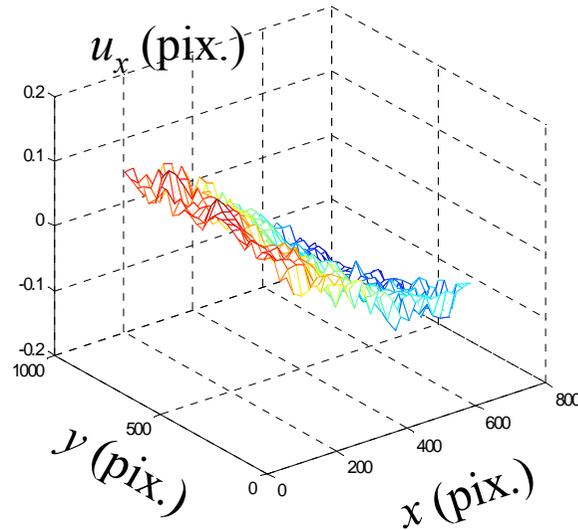
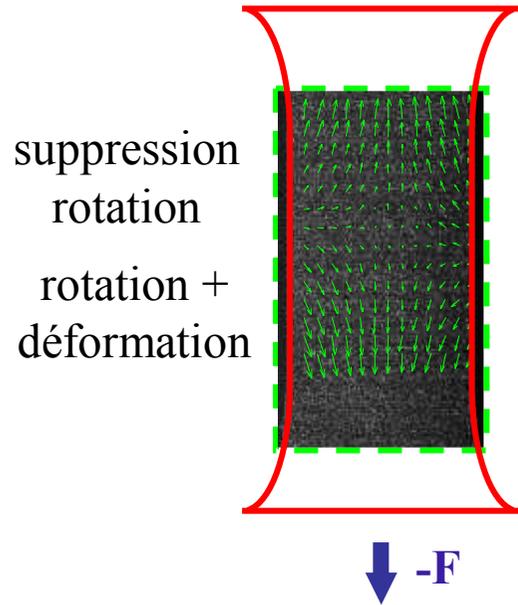
dans le volume :
corrélation 3D

d'après
Bay *et al*, Exp. Mech.,
Vol. 39, No. 3, Sept. 1999

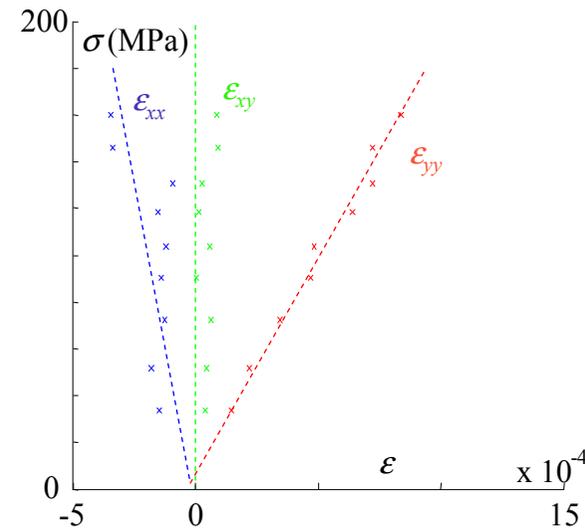


Quelques exemples : traction, ϵ homogène

↑ F acier Dual Phase DP 60

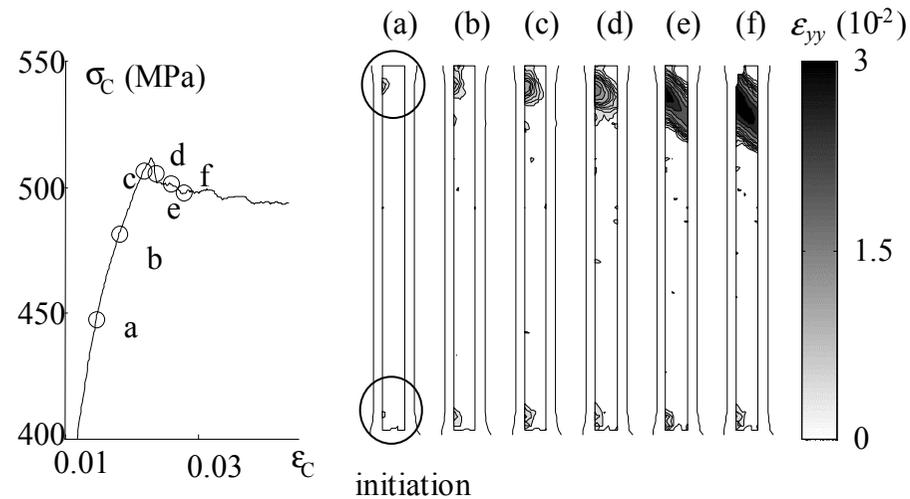


⇒ déformation homogène
⇒ identification de E et ν

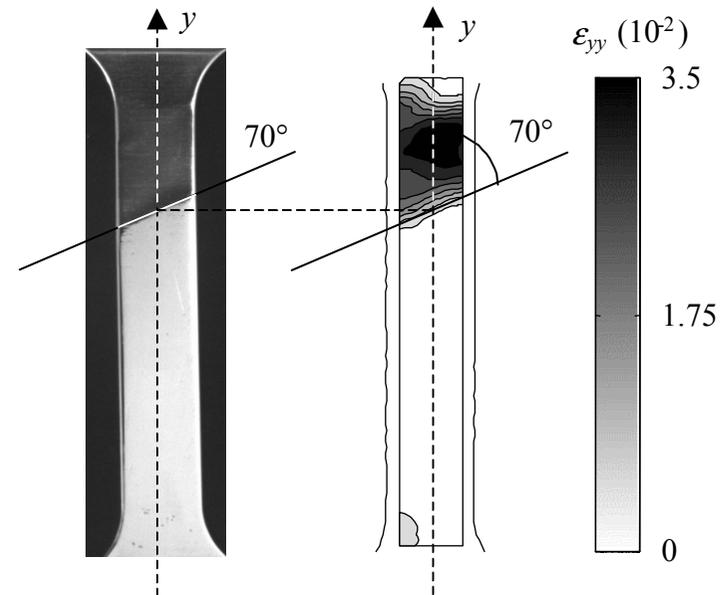
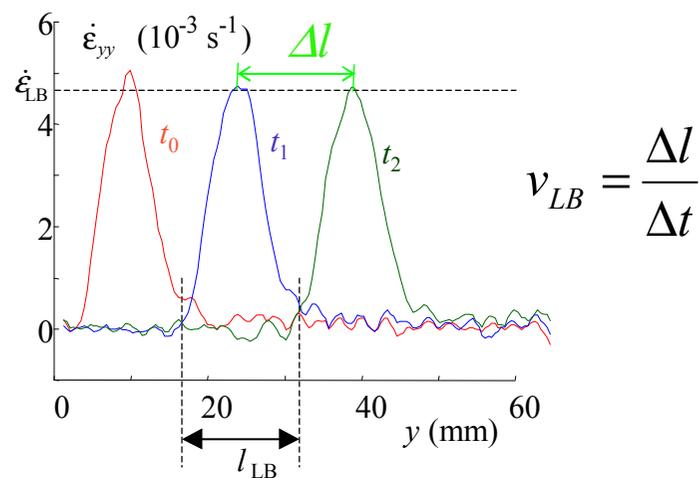


Quelques exemples : traction, bandes de Lüders

acier SolDur 355

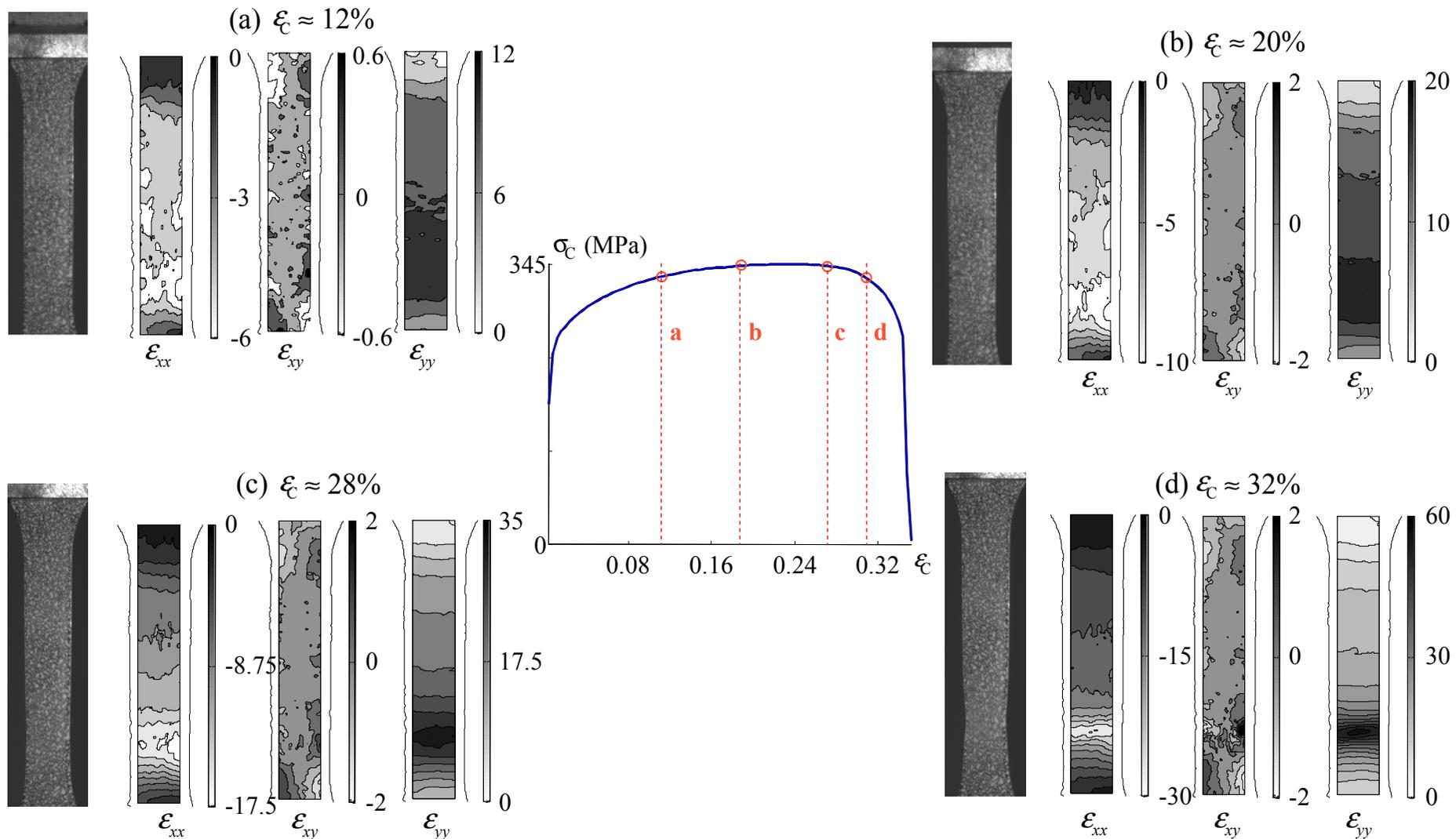


- initiation des bandes de Lüders
- propagation
- déformation dans la bande
- inclinaison de la bande

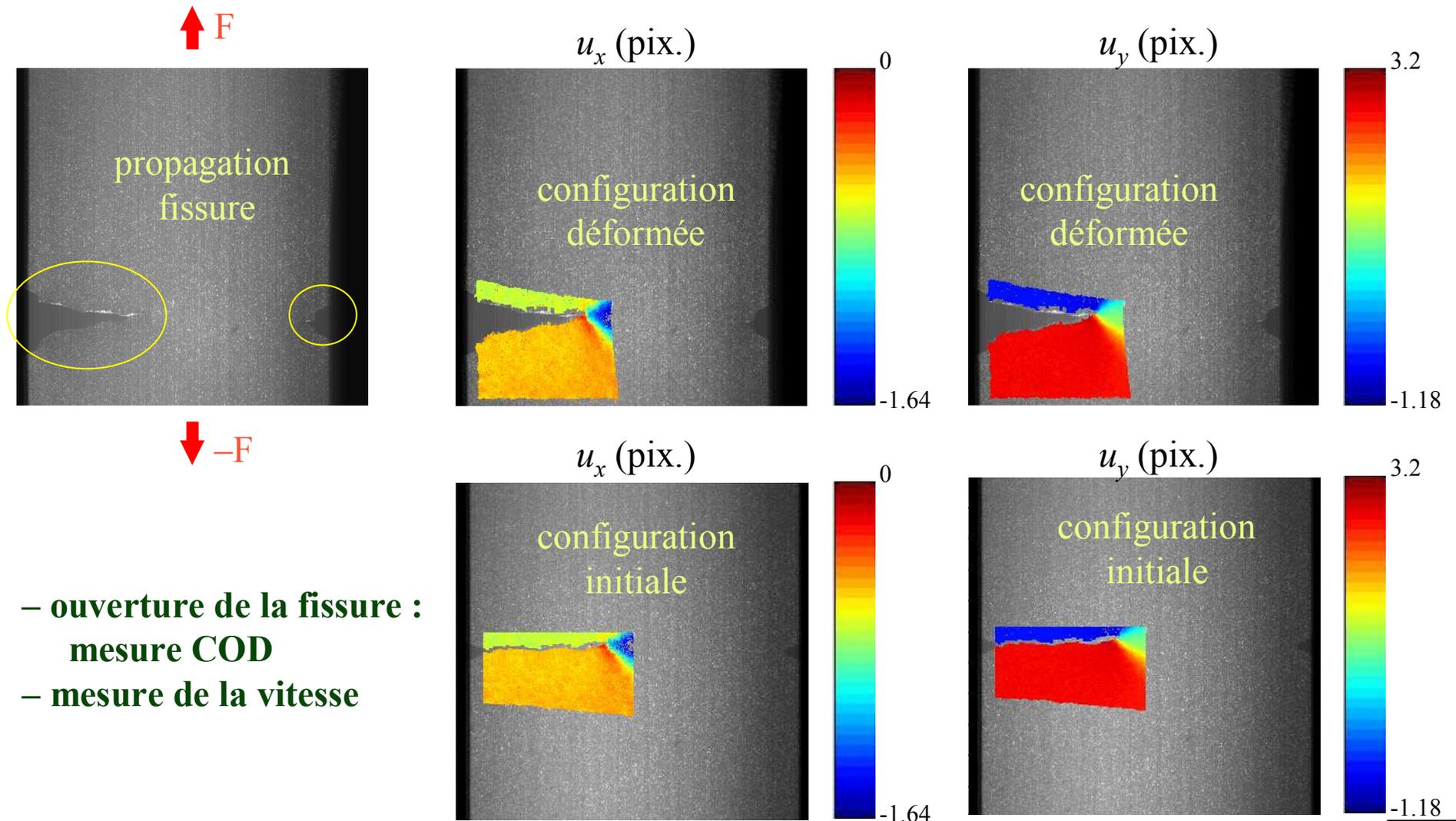


Quelques exemples : traction, striction

acier 3CTi



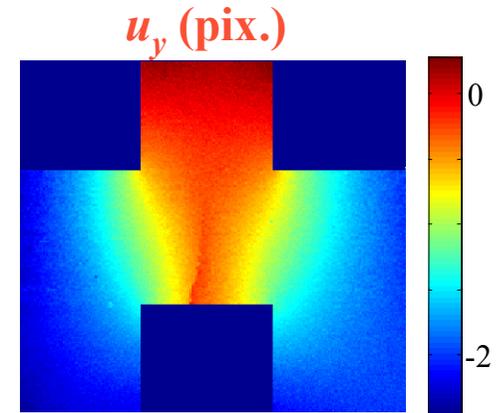
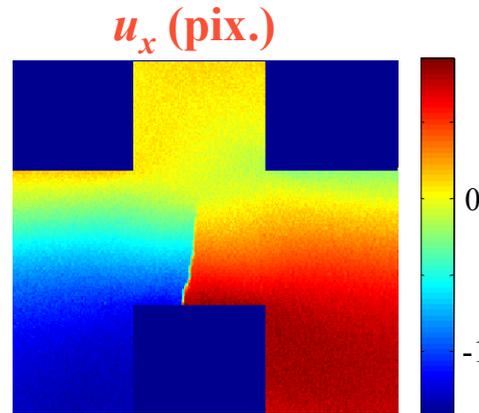
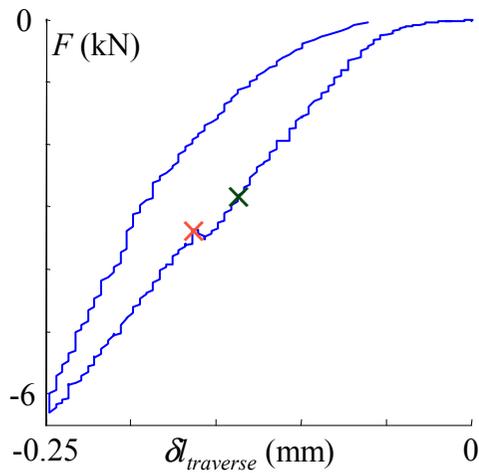
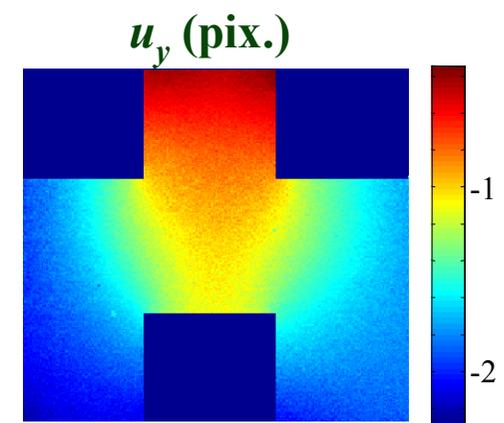
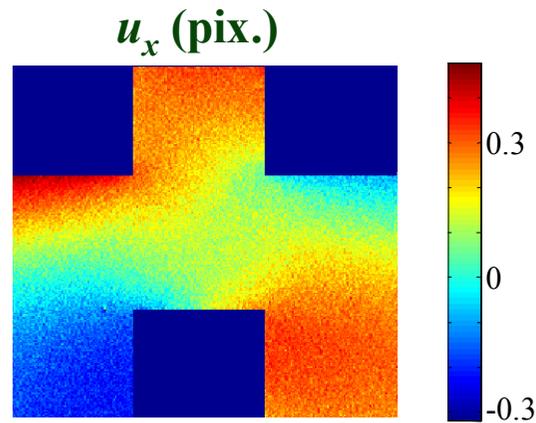
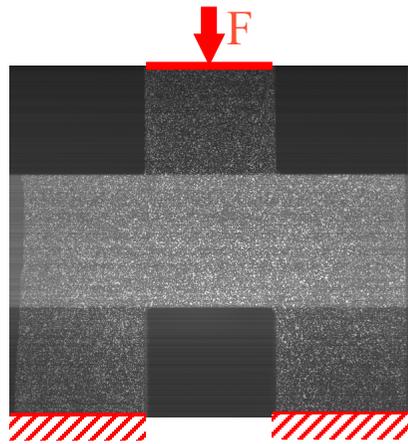
Quelques exemples : traction, fissuration



- ouverture de la fissure :
mesure COD
- mesure de la vitesse

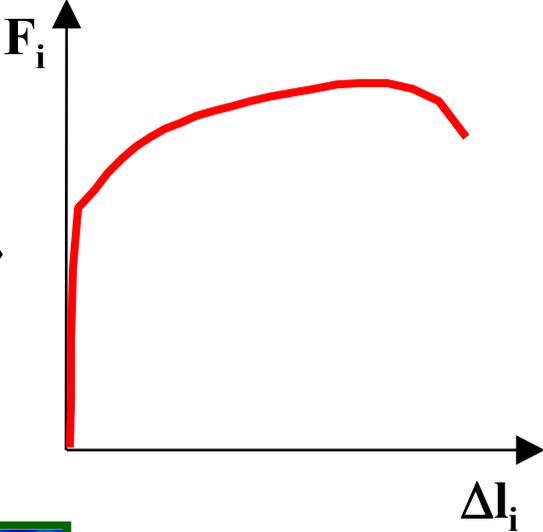
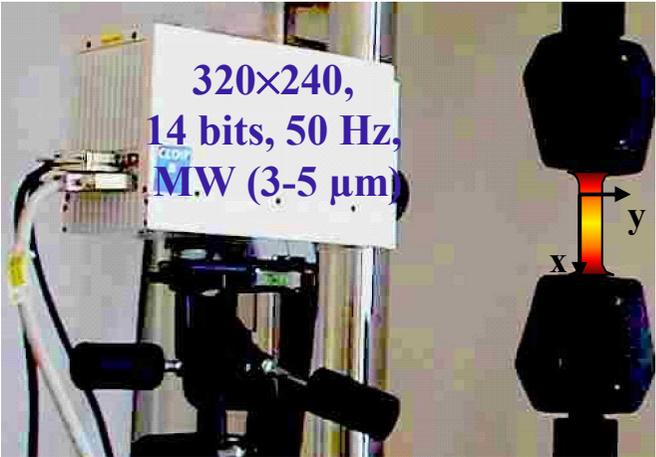
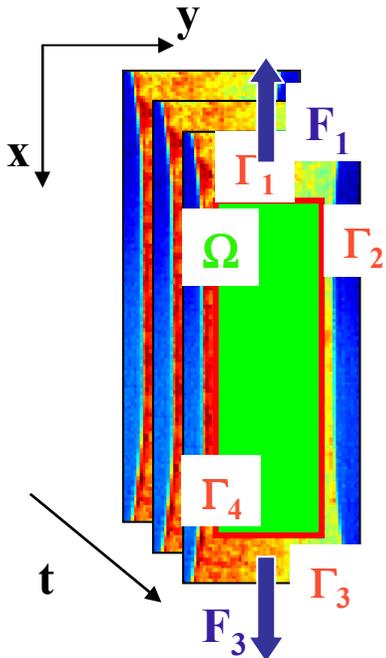
Quelques exemples : essai complexe

céramique terre cuite

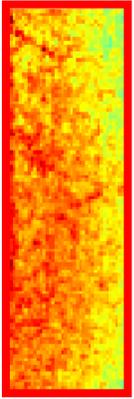


III – Présentation des techniques de T.I.R.

Dispositif expérimental

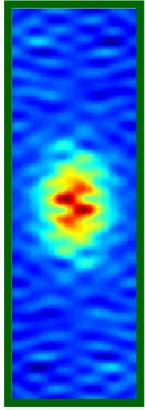


étalonnage



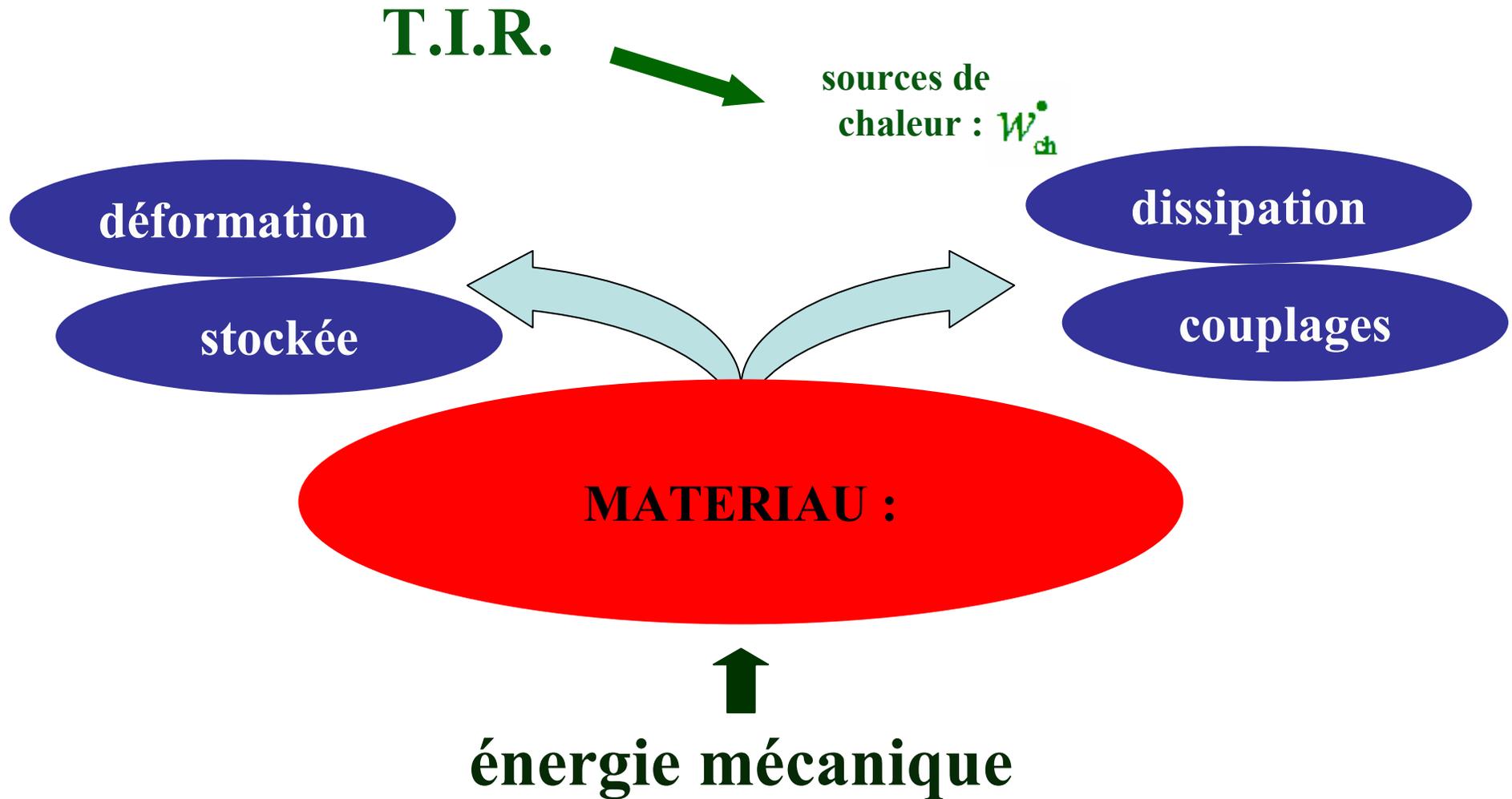
$T(x,y,t)$

traitement
image

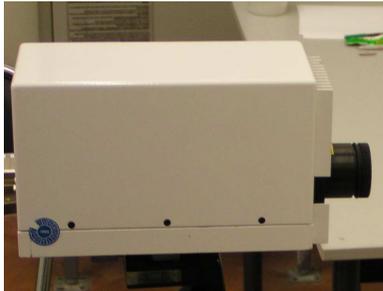


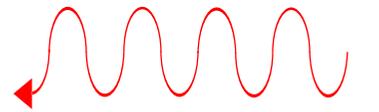
$w'_{ch}(x,y,t)$

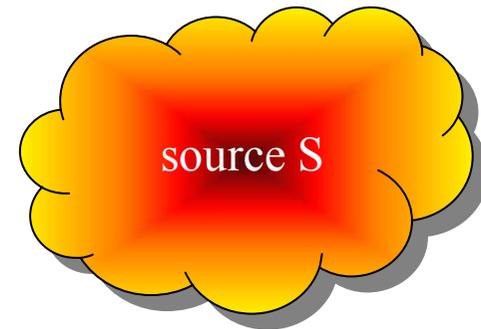
Intérêt de la T.I.R.



Vers des mesures calorimétriques ...




rayonnement I.R.



flux F : puissance rayonnée (W)

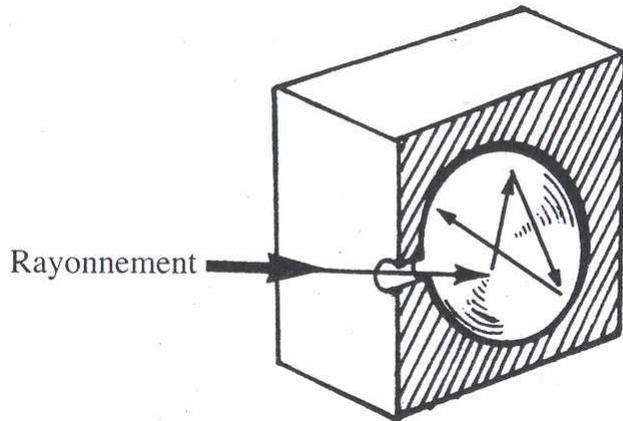
exitance $R = dF_S/dS$: flux émis par la source par unité de surface ($W \cdot m^{-2}$)

⇒ **relier** F (ou R) à la température T de la source ?

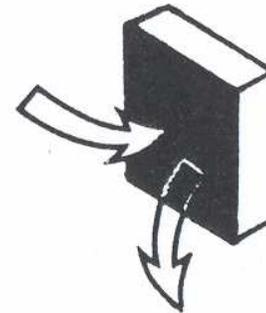
⇒ **relier** T aux puissances calorifiques w'_{ch} mises en jeu ?

Notion de corps noir

objet capable d'**absorber totalement tout rayonnement incident**, $\forall \lambda$



cavité presque
totalement fermée



revêtement
absorbant parfait

Loi de Planck – Loi de Stefan Boltzmann

pour un corps noir ...

– Loi de Planck (cf. thermo. stat.)

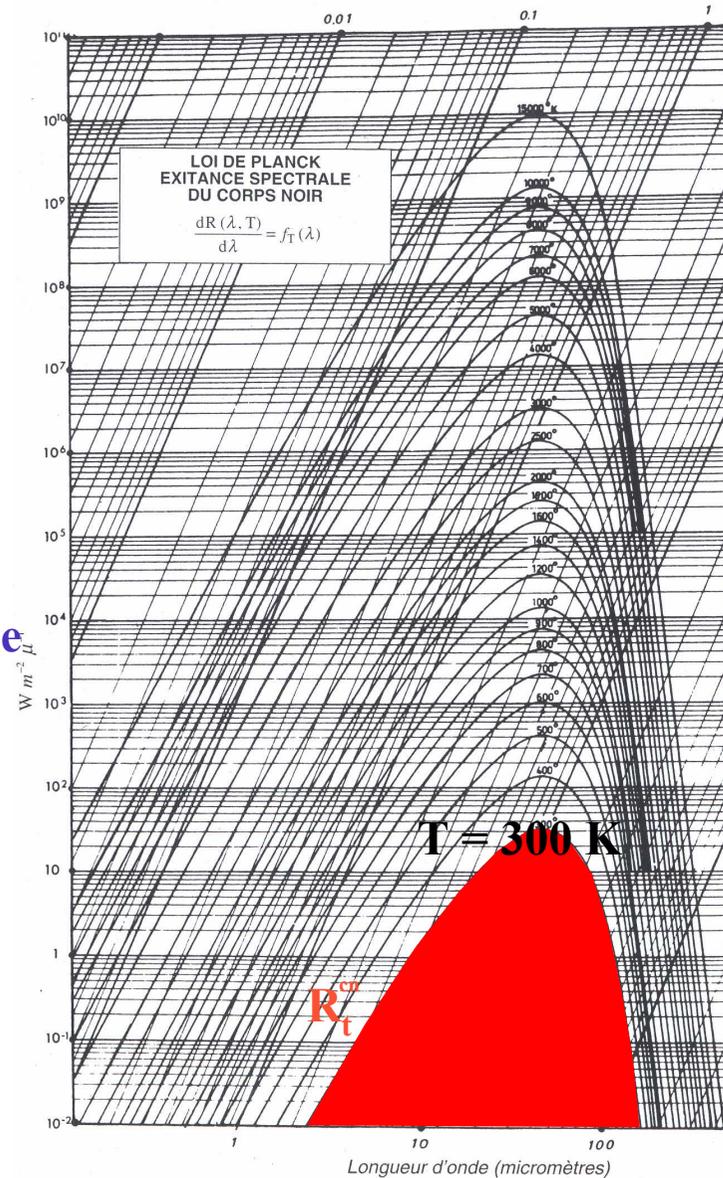
$$\frac{dR^{cn}(\lambda, T)}{d\lambda} = \frac{2\pi hc^2 \lambda^{-5}}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1}$$

Exitance spectrale (pointing to $dR^{cn}(\lambda, T)$)
 Planck (pointing to $2\pi hc^2 \lambda^{-5}$)
 Boltzmann (pointing to k)
 température (pointing to T)

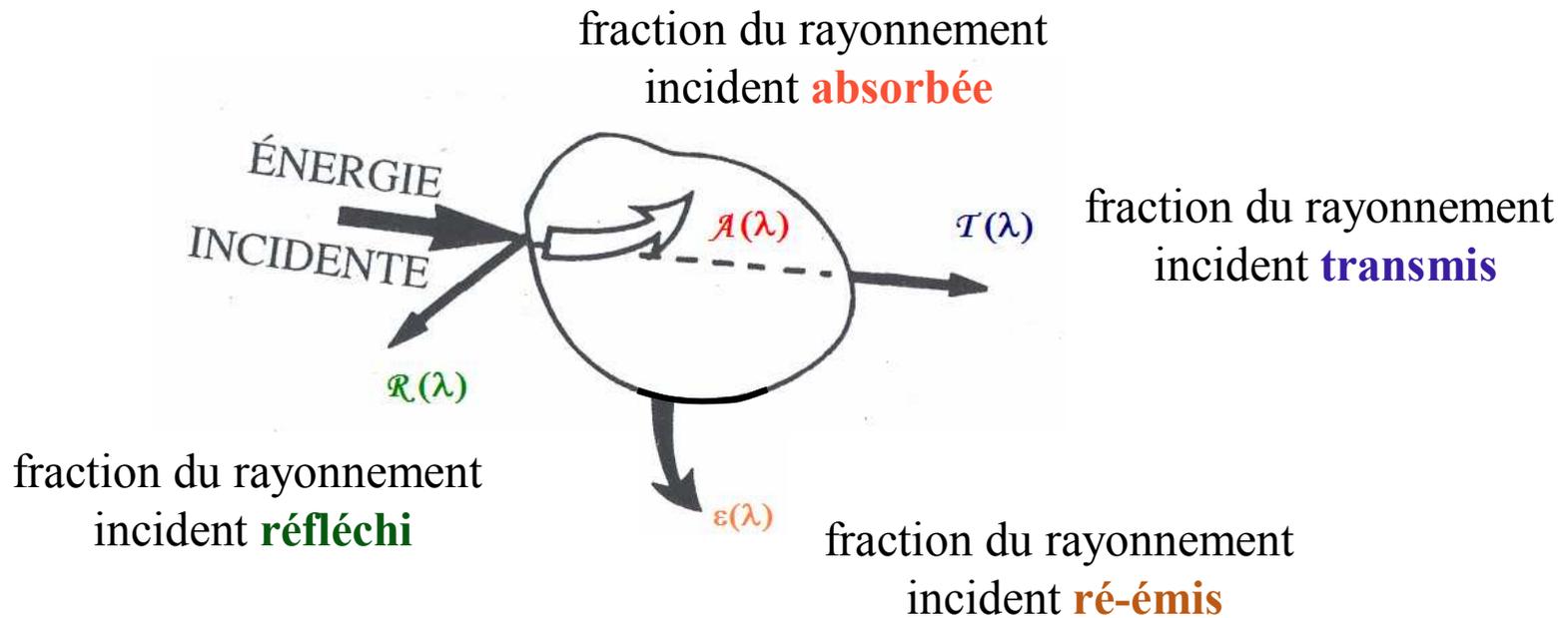
– Loi de Stefan-Boltzmann

$$R_t^{cn} = \sigma T^4$$

Stefan (pointing to σ)



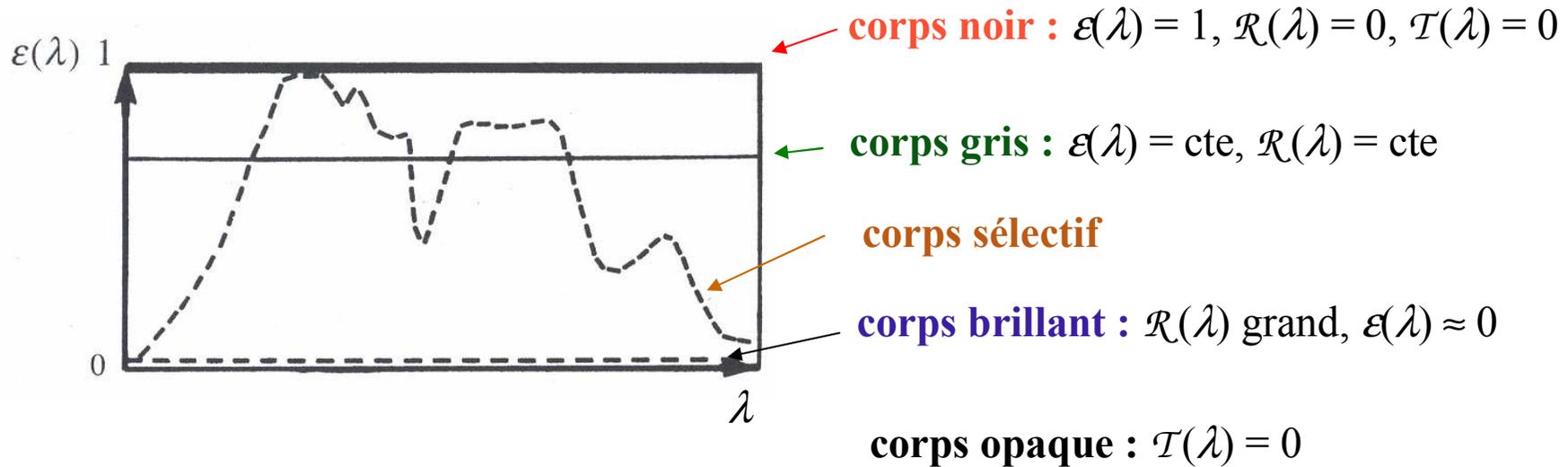
Cas des corps « non noirs »



$$\varepsilon(\lambda) = \mathcal{A}(\lambda) \quad (\text{éq. th.dyn.})$$

$$\varepsilon(\lambda) + \mathcal{R}(\lambda) + \mathcal{T}(\lambda) = 1 \quad (\text{conservation E.})$$

Classification des corps « non noirs »

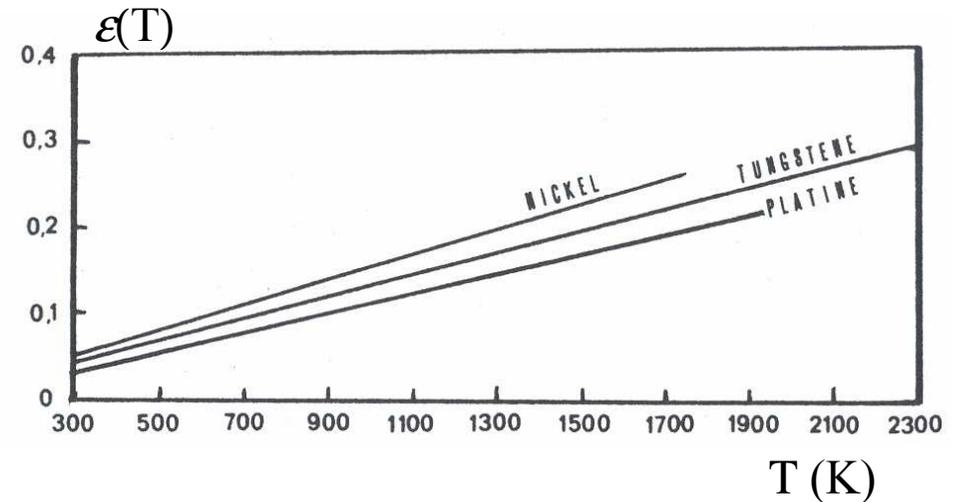
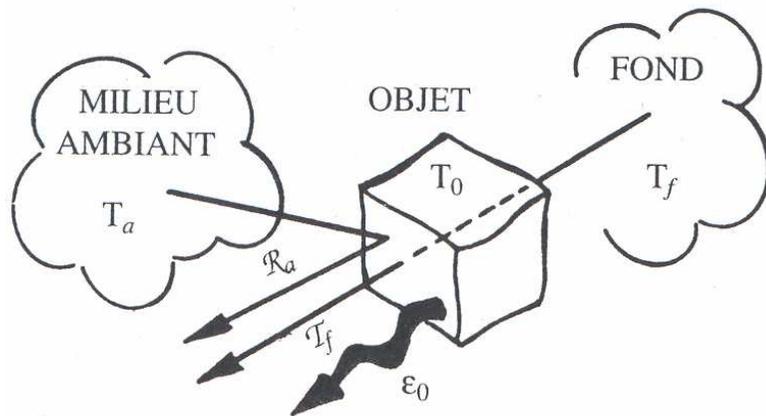


$$\Rightarrow \frac{dR(\lambda, T)}{d\lambda} = \varepsilon(\lambda) \frac{dR^{\text{cn}}(\lambda, T)}{d\lambda}$$

$$\Rightarrow R(T) = \int_{\Delta\lambda} \varepsilon(\lambda) \frac{dR^{\text{cn}}(\lambda, T)}{d\lambda} d\lambda$$

dépôt d'un revêtement
 \Rightarrow corps gris, $\varepsilon(\lambda) \approx \text{cte}$

Influence de l'environnement

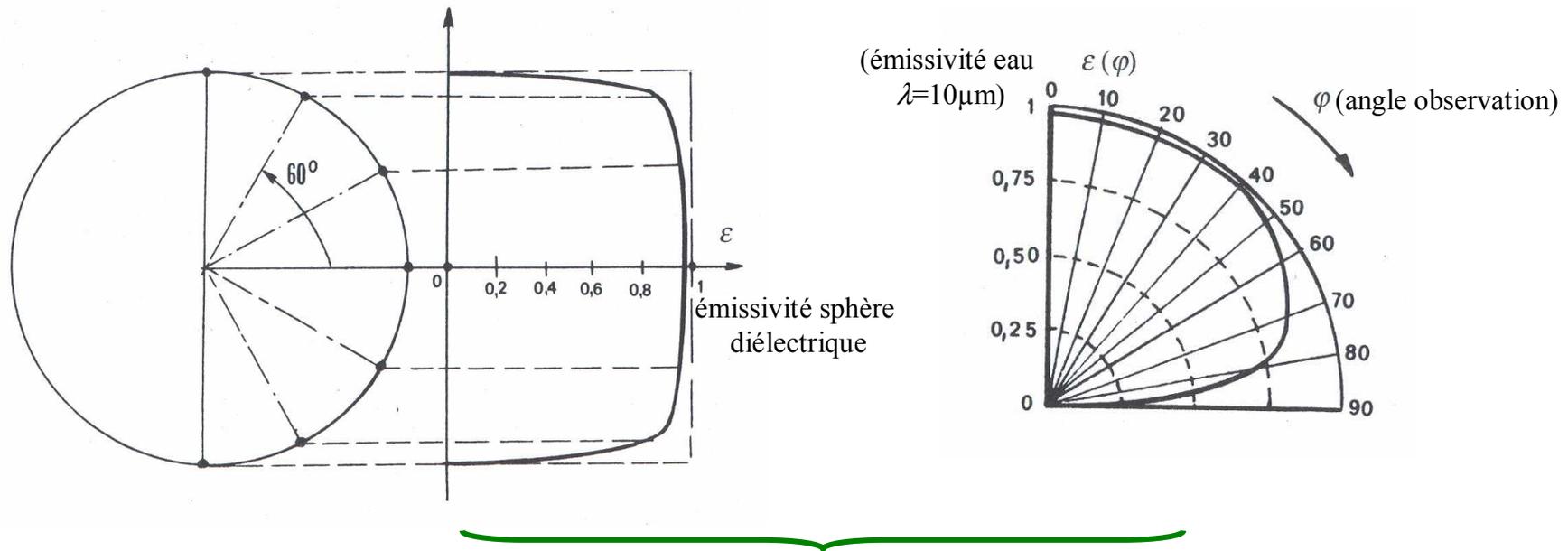


- déposer un revêtement \Rightarrow corps gris,
 $\varepsilon(\lambda) \approx 1$

- limiter les rayonnements parasites

- faibles variations de T

Influence de l'environnement

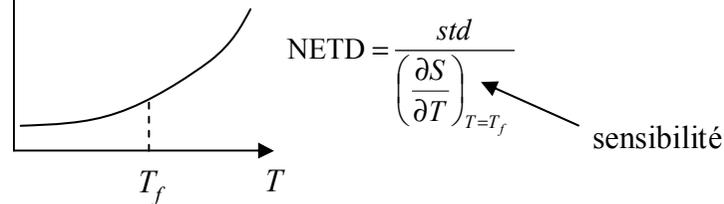


- éprouvettes planes

- incidence normale

Mesures thermiques

S (NI) Sensibilité : quotient de l'accroissement de la réponse d'un instrument de mesure par l'accroissement correspondant du signal d'entrée.
appliquée à la thermographie, la sensibilité est donc la pente de la courbe d'étalonnage (à une température donnée)



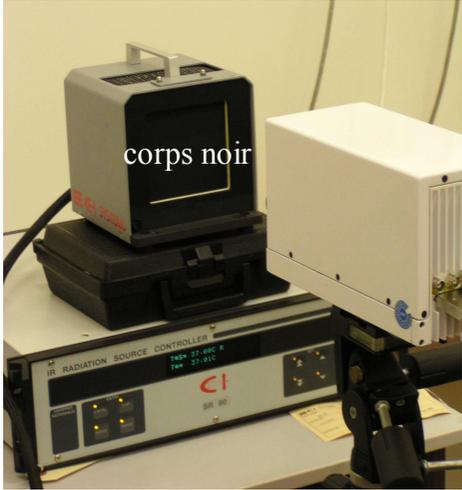
CEDIP : NETD = 0.02K

NETD : Différence de Température Equivalente à la valeur efficace du Bruit mesuré sur le thermosignal

Pour **améliorer** la **qualité** de la **mesure** :

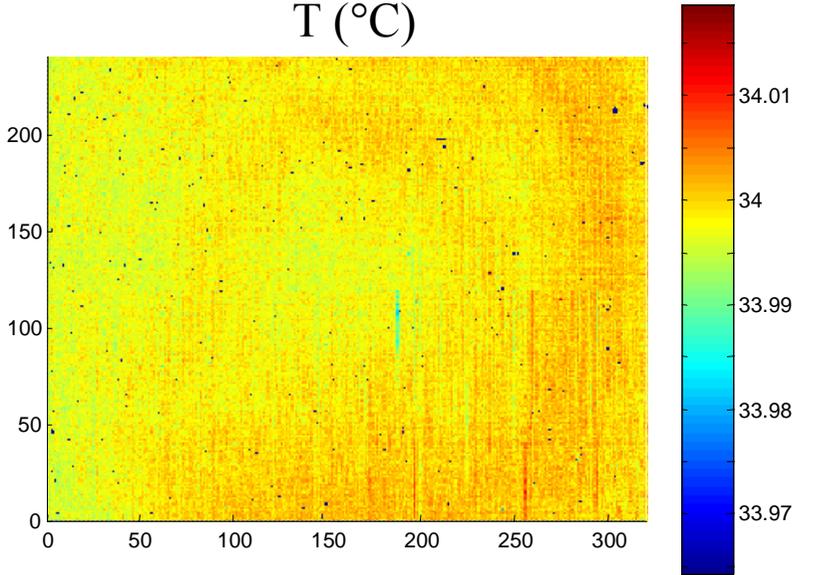
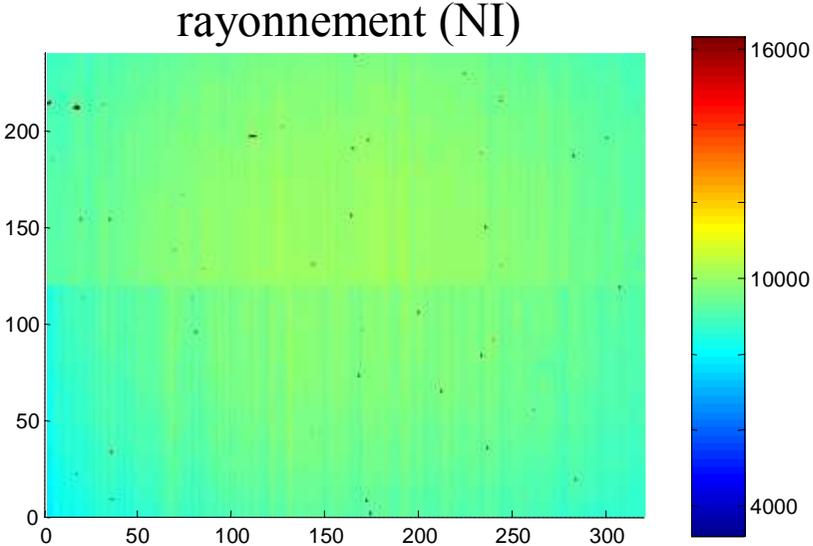
- **étalonnage** des capteurs (caméra de type I.R.F.P.A.) :
- **détermination** des **pixels défectueux** (**BPR**)
- **maîtrise** des **conditions** de **prise de vue** (ambiante, rayonnements parasites, ...)
- **traitements** : moyennes (temps), filtrage, ...

Étalonnage des capteurs



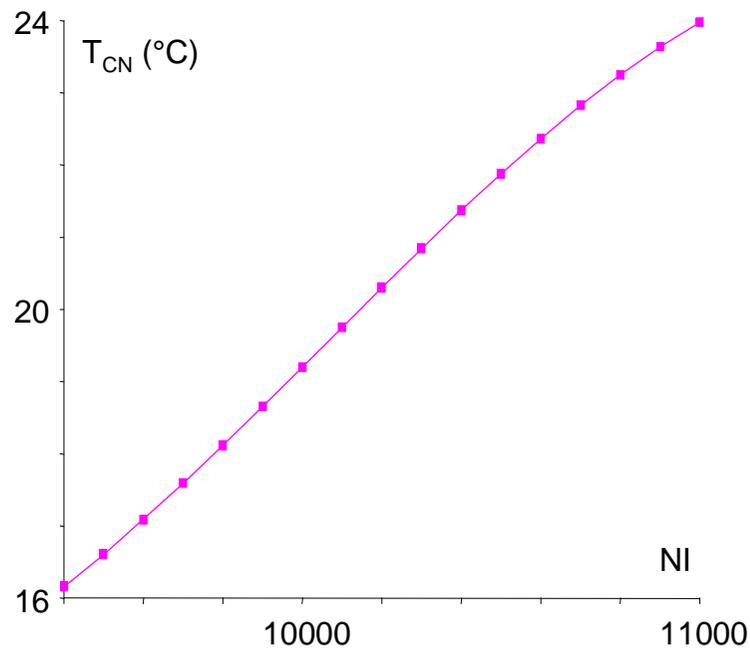
Corps noir :
- $\epsilon(\lambda) = 1$
- $T(x,y) = T_0$

étalonnage

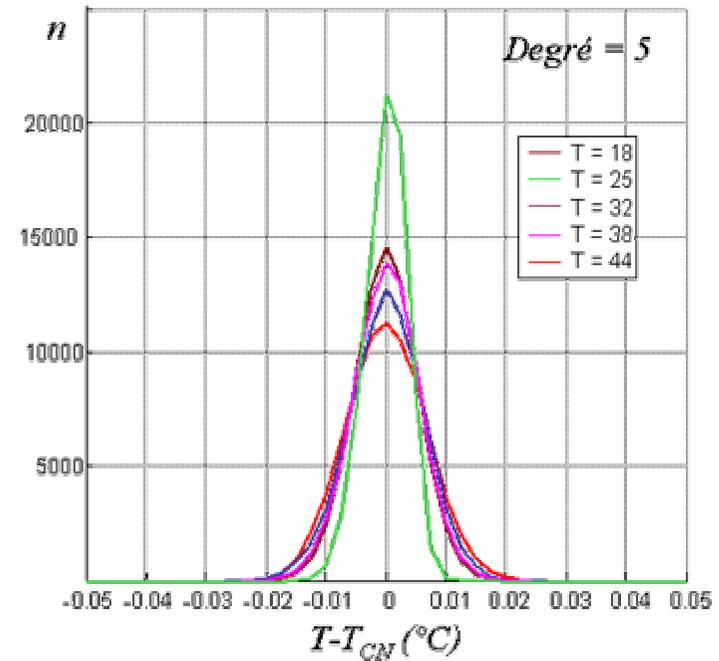


Etalonnage des capteurs

pour un capteur :



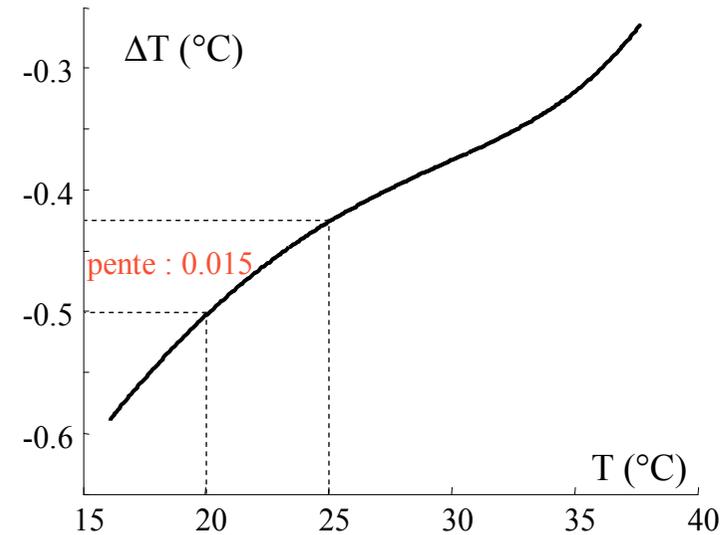
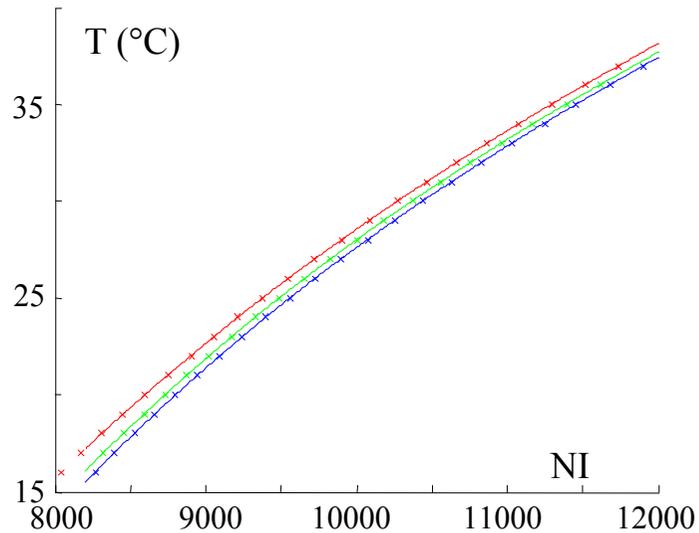
pour tous les capteurs :



- **uniformité** de la réponse en température de la matrice C.C.D.
- **faible** niveau de bruit **thermique** : $\approx \pm 0.01$ °C

Étalonnage des capteurs

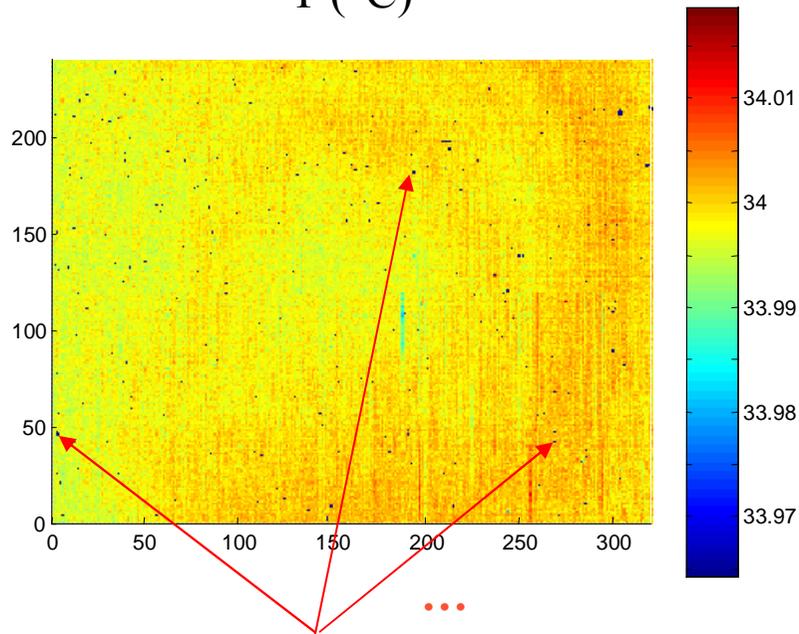
3 étalonnages :
conditions de prise de vue similaires (t_i , f , ...)



⇒ réponses différentes
stabilité ?
répétabilité ?

Pixels défectueux

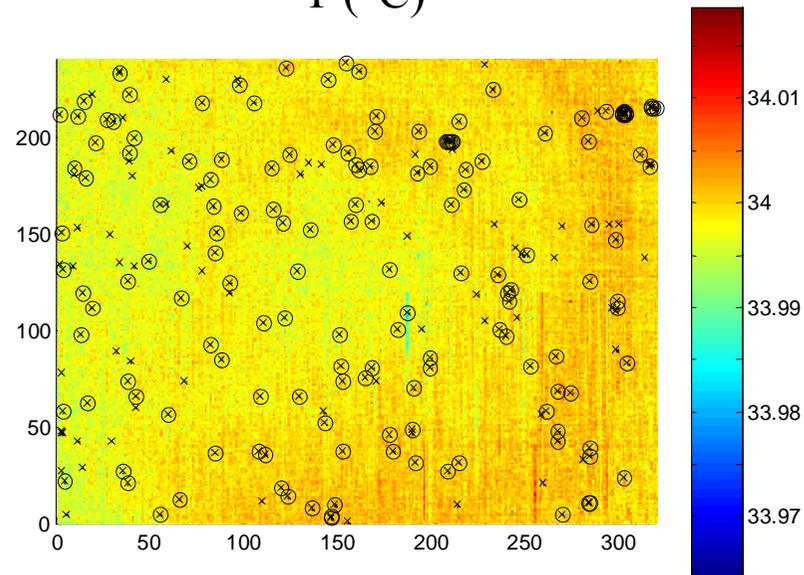
T (°C)



pixels dont la réponse est
« très » différente des autres
⇒ **pixels défectueux**

algorithme de recherche :

T (°C)

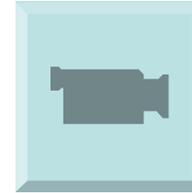


**éventuellement, algorithme
de remplacement :**

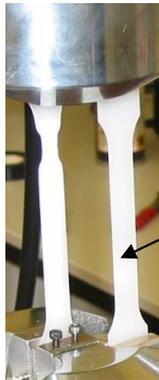
20	→	21	→	22	→	...	→	...
↑		6	→	7	→	8	→	9
↑		5		Bad Pixel		1		10
↑		4	←	3	←	2		11
↑		15	←	14	←	13	←	12

Maîtrise des conditions expérimentales

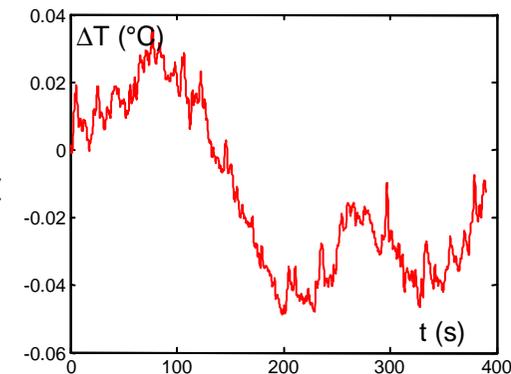
– rayonnements parasites



– variations de température ambiante



échantillon « référence » :



– variations d'émissivité



revêtement de peinture noire mate

$$\Rightarrow \varepsilon(x,y) \approx 1$$

Traitements des données

basé sur l'équation de la chaleur :

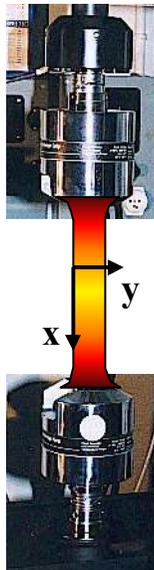
chaleur associée à la variation de température du système

$$\rho C_{\alpha_j} \dot{T} + \text{div} \mathbf{q} = \dot{w}_{ch}$$

pertes de chaleur par conduction

ρ masse volumique
 C capacité calorifique
 T température absolue
 \mathbf{q} vecteur flux de chaleur

conduction :
 Fourier isotrope



$$\dot{w}_{ch} = \rho C_{\alpha_j} \dot{T} - k \Delta_{x,y,z} T : 3D$$

fuites latérales (conv. + ray.)
 HPPT
 T0 uniforme

$$\overline{\dot{w}}_{ch} = \rho C \left(\dot{\bar{\theta}} + \frac{\bar{\theta}}{\tau} \right) - k \Delta_{x,y} \bar{\theta} : 2D$$

peu de fuites suivant y

$$\overline{\dot{w}}_{ch} = \rho C \left(\dot{\bar{\theta}} + \frac{\bar{\theta}}{\tau} \right) - k \Delta_x \bar{\theta} : 1D$$

sources homogènes

$$\overline{\dot{w}}_{ch} = \rho C \left(\dot{\bar{\theta}} + \frac{\bar{\theta}}{\tau_{eq}} \right) : 0D$$

Intérêt du passage températures-sources

carte de températures :

- 1 « point chaud »
- $\theta = 3.5\text{ °C}$

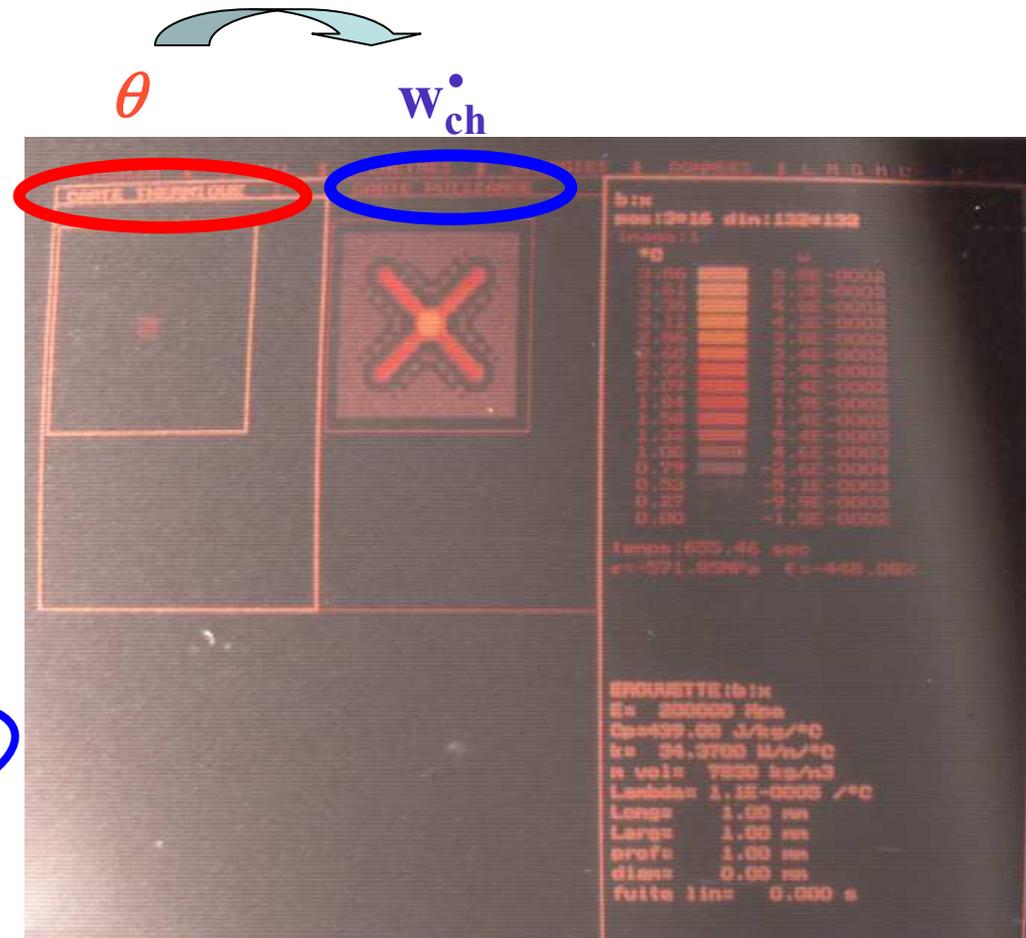
effet

carte des sources de chaleur :

- 2 bandes inclinées
- puissance : $3 \cdot 10^{-2}\text{ W}$

↔ 2 fils chauffés par
effet Joule

cause



« Résolution » de l'équation de la chaleur

$$w_{ch}^{\bullet} = \rho C \left(\dot{\theta} + \frac{\theta}{\tau_{th}} \right) - k \Delta \theta$$

⇒ pour accéder à w_{ch}^{\bullet} , il « suffit » d'**estimer** **mesuré**
des **opérateurs différentiels** ($\dot{\cdot}$, Δ) sur des **champs**
discrets de données bruitées

plusieurs **méthodes** possibles :

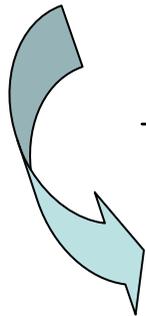
- **différences finies**
- **projection** dans une base + **seuillage**
- **analyse fréquentielle**
- **lissage**
- ...

Filtrage des données thermiques

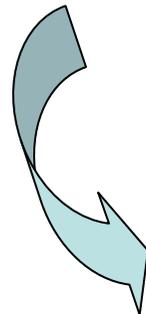
données thermiques : discrètes et bruitées

Bruit thermique

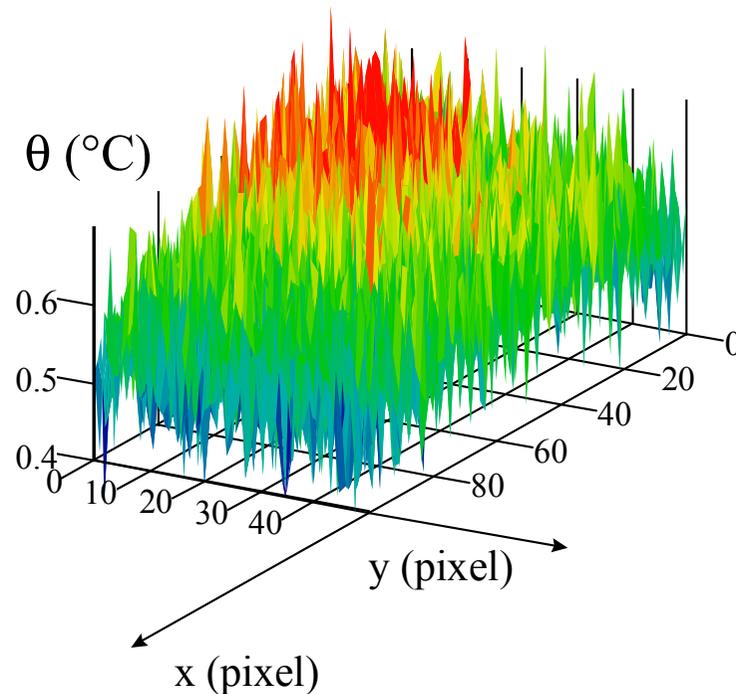
- spectre de puissance uniforme
- distribution de probabilité gaussienne


$$\frac{d}{dt}, \Delta_{x,y}$$

amplification bruit



filtrage \Rightarrow ~~**différences finies**~~



Projection dans une base + seuillage

signal réel : θ_{mes}

détermination de la **base spectrale** de l'opérateur $-\Delta_{x,y}$:
expression de $f_k(x)$, $g_l(y)$, λ_k et μ_l

$$\Delta_{x,y} \theta_{\text{filtr}}(x,y) = \sum_{k=1}^{n_k} \sum_{l=1}^{n_l} a_{kl} (\lambda_k + \mu_l) f_k(x) g_l(y)$$

calcul du laplacien

$$\theta_{\text{mes}}(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl} f_k(x) g_l(y) \quad \longrightarrow \quad \theta_{\text{filtr}}(x,y) = \sum_{k=1}^{n_k} \sum_{l=1}^{n_l} a_{kl} f_k(x) g_l(y)$$

$$-\Delta_{x,y} f_k(x) = \lambda_k f_k(x)$$

$$-\Delta_{x,y} g_l(y) = \mu_l g_l(y)$$

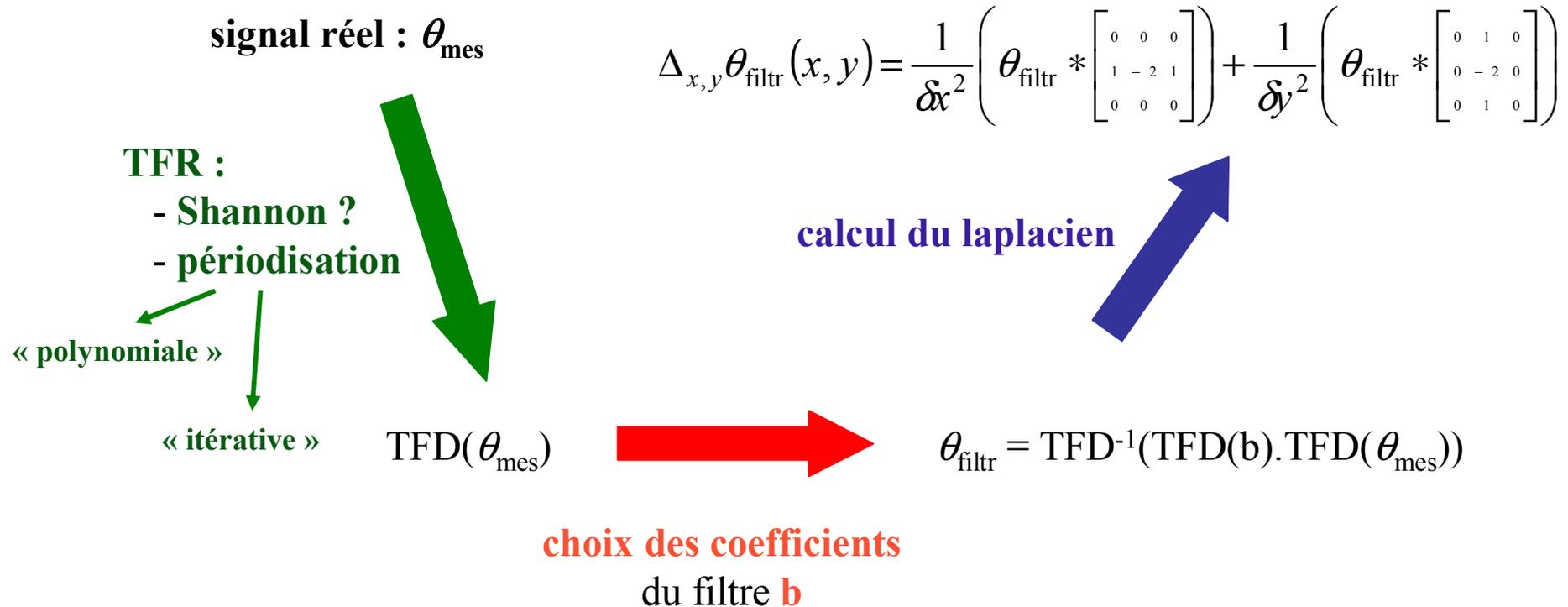
projection :
calcul des λ_k , μ_l , a_{kl}
 \Rightarrow « **filtrage** »

inconvenients :

- nécessité **calcul analytique** $f_k(x)$, $g_l(y)$, λ_k et μ_l
- temps CPU : **très long** ...

Analyse fréquentielle

filtrage passe-bas

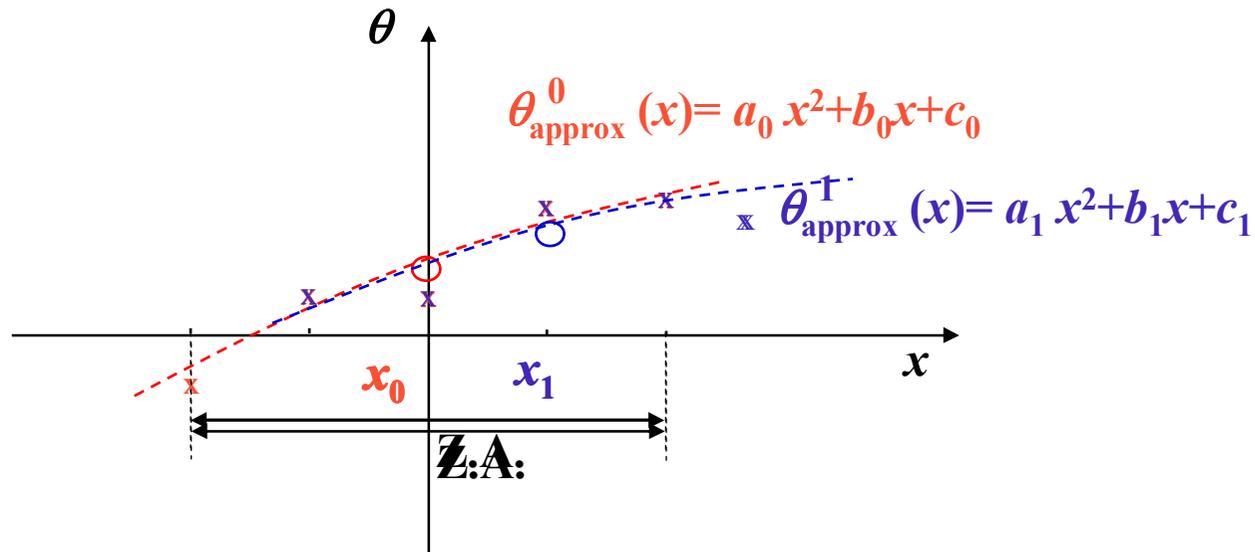


points délicats :

- **choix** du **filtre** (fréquence de coupure f_c)
- **périodisation** : temps CPU long

Lissage local

approximation locale du champ de températures



- **lissage** : $\theta_{\text{filtr}}(x_0, t) = \theta_{\text{approx}}^0(x_0, t)$

- **dérivation** : $\Delta_{,x} \theta_{\text{filtr}}(x_0, t) = \Delta_{,x} \theta_{\text{approx}}^0(x_0, t) = 2 a_0$

points délicats :

- **choix** des paramètres :
 - type de fonction d'approximation
 - Zone d'Approximation

avantage :

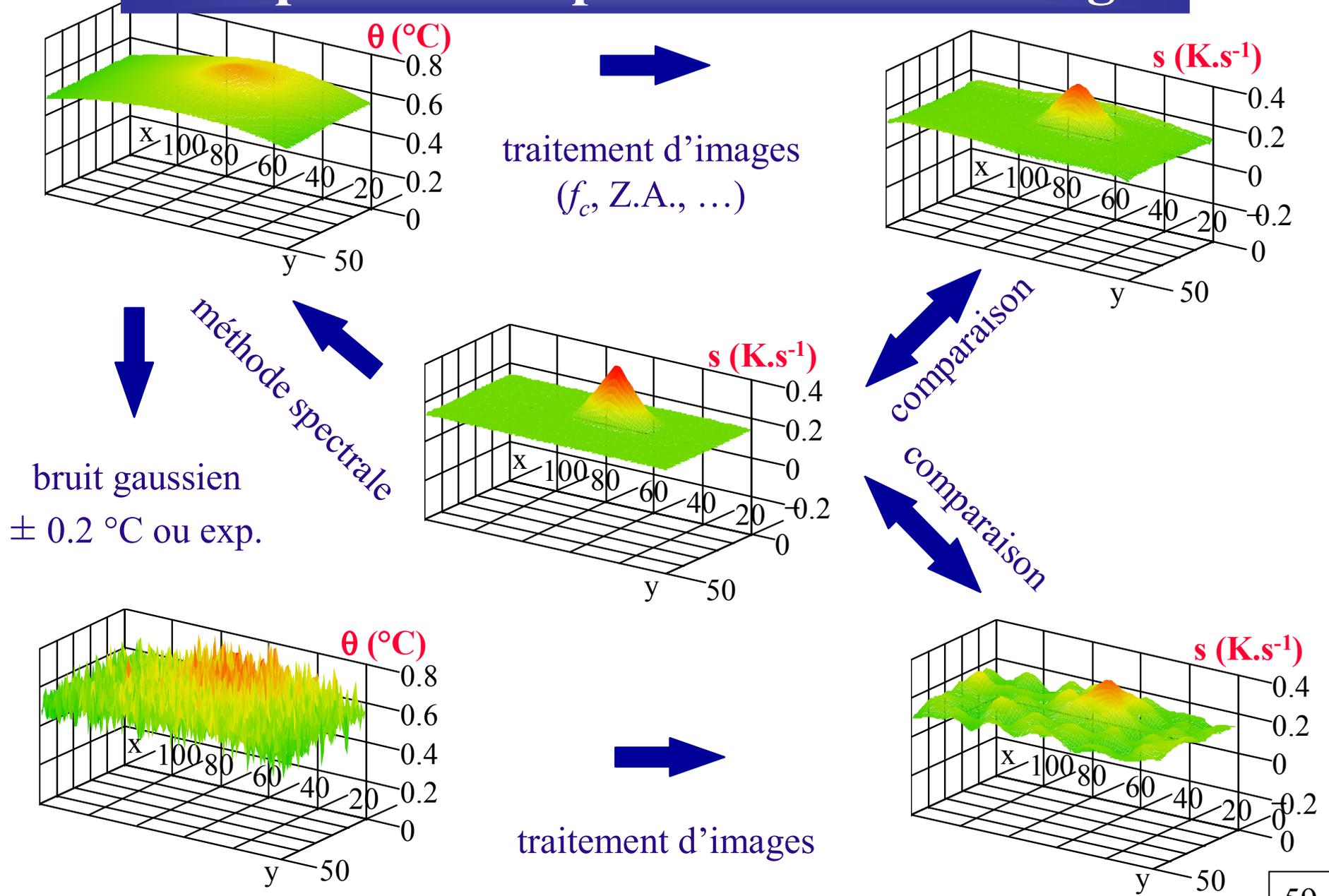
- **prolongement** : pas impératif

« Métrologie » des sources de chaleur

Pour **améliorer** la **qualité** de la **mesure** :

- affiner la **connaissance** des **coefficients matériau** (1^{er} ordre) :
 - ρ : mesurée par pesée
 - C_P : mesurée par D.S.C. (mais pas C_{α_j})
 - τ : estimé sur des essais de retour à l'équilibre
- adapter les **paramètres** du **filtrage** (f_c , Z.A., ...)

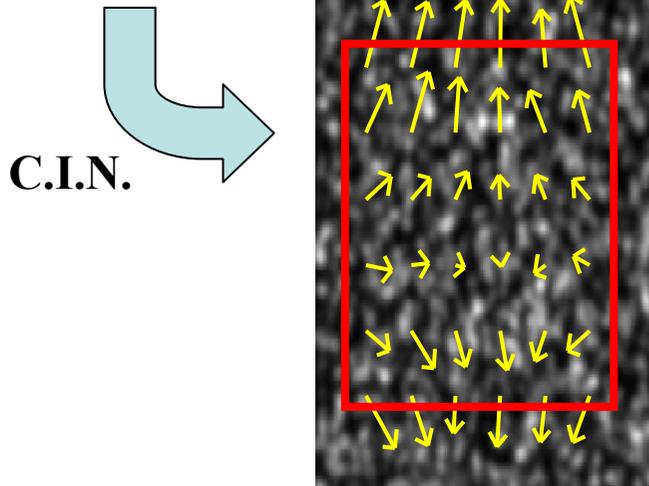
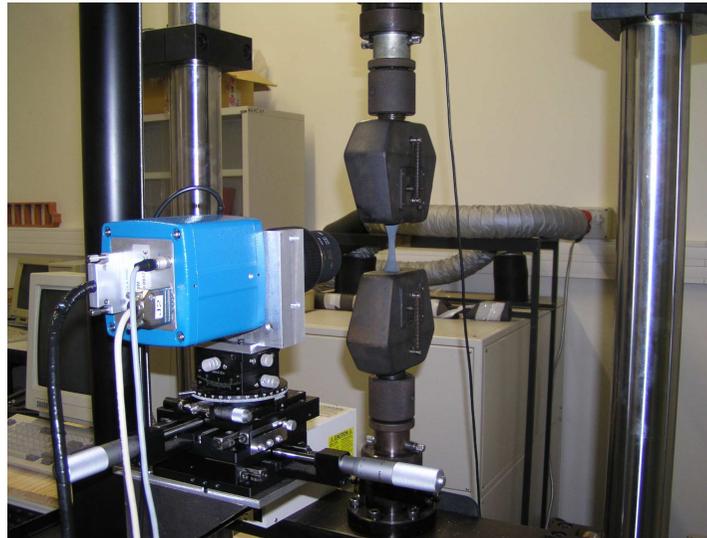
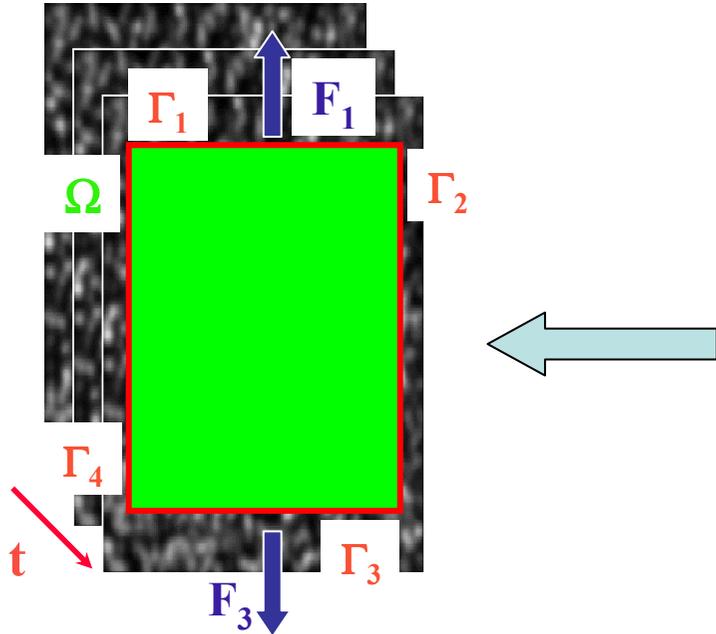
Adaptation des paramètres de filtrage



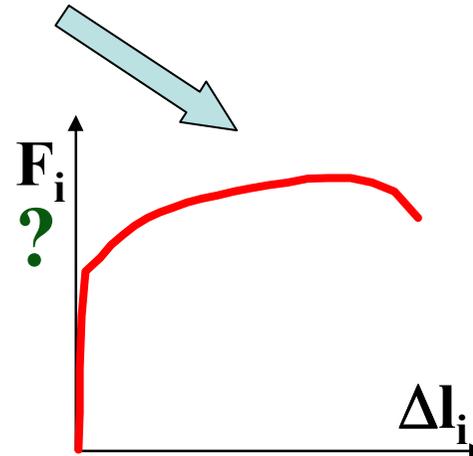
IV – Quelques applications de l'imagerie mécanique à la résolution de problèmes inverses

Identification de propriétés mécaniques

images de granularité

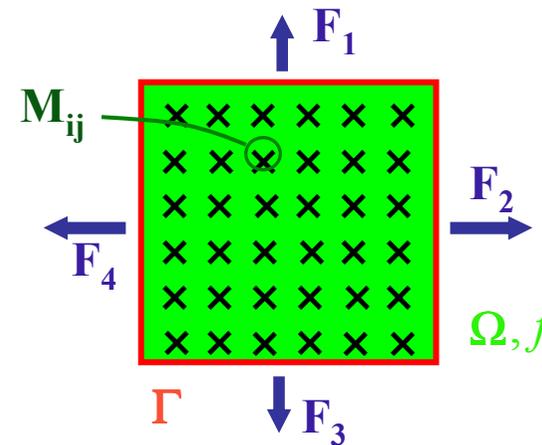
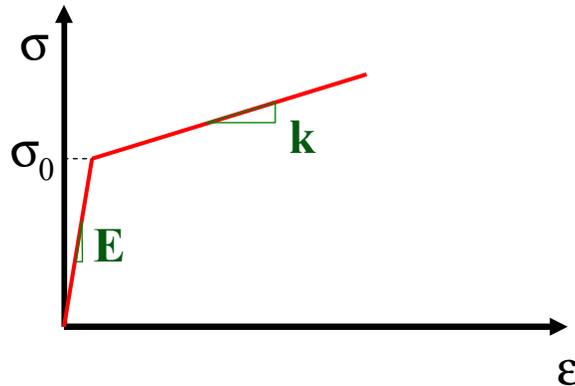


$\mathcal{E}(x,y,"t") ?$
 $\mathcal{L}(x,y,t) ?$



Méthode d'identification : E.R.C. (I)

Hypothèses :



- contraintes planes, petites perturbations
- comportement élasto-plastique
(élasticité cubique : E, ν, G , écrouissage cinématique multi-linéaire : k, σ_0)
- forces volumiques f sont connues
- $F_i = \int_{\Gamma_i} \sigma \cdot n dl$ sont connues
- $\begin{pmatrix} u_x^* \\ u_y^* \end{pmatrix} \left(\begin{matrix} M_{ij} \\ M_{ij} \end{matrix} \right)$ sont connus partout dans Ω (*mod.* un déplacement de solide rigide)

Méthode d'identification E.R.C. (II)

définitions de la fonctionnelle :

$$\Delta\sigma = \mathcal{E} \Delta\varepsilon \quad \text{ou} \quad \Delta\sigma = \mathcal{L} \Delta\varepsilon$$

$$\mathcal{F}_e(\Delta\tau, B) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\Delta\tau - B : \varepsilon(\Delta u^*)) : B^{-1} : (\Delta\tau - B : \varepsilon(\Delta u^*)) d\Omega$$

$$\Delta\tau \in \Sigma_e^{\text{adm}} = \left\{ \Delta\tau \text{ régulier et symétrique, } \operatorname{div}(\Delta\tau) + f = 0 \text{ sur } \Omega, \Delta F_i = \int_{\Gamma_i} \Delta\tau \cdot n dl \right\}$$

$$B \in \mathfrak{R}_e = \left\{ B \in M_{\text{sym}}^{3 \times 3}, B_{ij} \text{ est linéaire par morceaux, } B \text{ est définie positive} \right\}$$

$$\mathcal{F}_p(\Delta\tau, K) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\Delta\tau - K : \varepsilon(\Delta u^*)) : K^{-1} : (\Delta\tau - K : \varepsilon(\Delta u^*)) d\Omega,$$

$$(\Delta\tau, \Delta X) \in \Sigma_p^{\text{adm}} = \left\{ (\Delta\tau, \Delta X) \text{ régulier et symétrique, } f(\tau - X) \leq 0, \operatorname{div}(\Delta\tau) + f = 0 \text{ sur } \Omega, \Delta F_i = \int_{\Gamma_i} \Delta\tau \cdot n dl \right\}$$

$$K \in \mathfrak{R}_p = \left\{ K \in M_{\text{sym}}^{4 \times 4}, K_{ij} \text{ est linéaire par morceaux, } K \text{ est } \underline{\underline{\text{d\u00e9finie positive}}} \right\}$$

Méthode d'identification E.R.C. (III)

Propriétés de la fonctionnelle :

\mathcal{F}_e et \mathcal{F}_p ont des propriétés similaires :

$$- \mathcal{F}_{e/p}(\Delta\tau, B/K) \geq 0 \quad \forall (\Delta\tau, B/K) \in \Sigma_{e/p}^{\text{adm}} \times \mathcal{R}_{e/p}$$

$$- \mathcal{F}_{e/p}(\Delta\tau^*, B/K^*) = 0 \Leftrightarrow \text{CE est vraie avec } \Delta\sigma = \Delta\tau^* \text{ et, ou } \begin{cases} B^* \\ K^* \end{cases} = \text{ou } \begin{cases} \mathcal{E} \\ \mathcal{L} \end{cases}$$

$$- \mathcal{F}_{e/p} \text{ est convexe sur } \Sigma_{e/p}^{\text{adm}} \times \mathcal{R}_{e/p}$$

 **problème de minimisation**

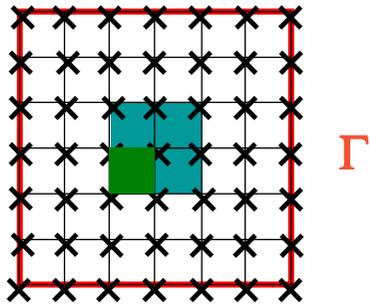
$$\text{Min}(\mathcal{F}_{e/p}(\Delta\tau, B/K), (\Delta\tau, B/K) \in \Sigma_{e/p}^{\text{adm}} \times \mathcal{R}_{e/p})$$

$$\begin{array}{ccc} & \swarrow \text{et} \searrow & \\ \Delta\sigma & & \text{ou } \begin{cases} \mathcal{E} \\ \mathcal{L} \end{cases} \end{array}$$

Méthode d'identification E.R.C. (IV)

Résolution numérique :

algorithme : méthode de relaxation



description éléments finis

Ω_i : i^{ème} élément

$$\text{div}(\Delta\tau) + f = 0 \text{ sur } \Omega_i$$

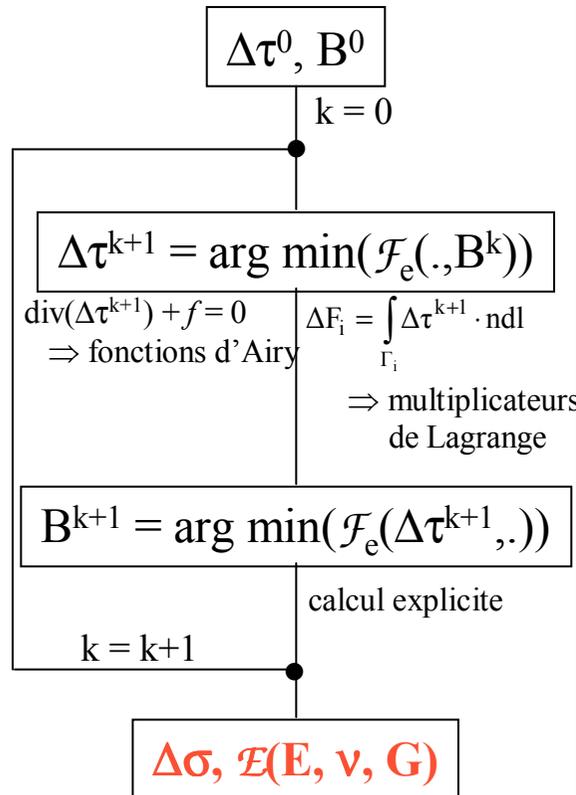
MZ_k : kth "zone matérielle"

B, K sont constants sur MZ_k

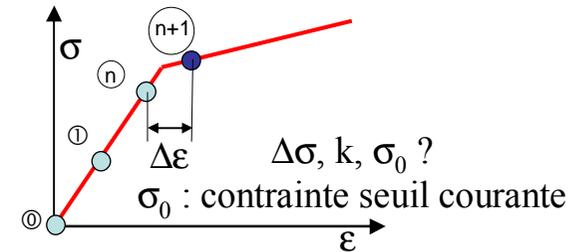
$$\mathcal{F}_{e/p}(\Delta\tau, B/K_k) = \frac{1}{2} \sum_i \int_{\Omega_i} (\Delta\tau - B/K_{k(i)} : \varepsilon(\Delta u^*)) :$$

$$B/K_{k(i)}^{-1} : (\Delta\tau - B/K_{k(i)} : \varepsilon(\Delta u^*)) d\Omega_i$$

élasticité : $\min(\mathcal{F}_e)$



élasto-plasticité



identification élastique :
 $E^{(n)} \approx E^{(n+1)}$?

non

$\min(\mathcal{F}_p)$ cf. $\min(\mathcal{F}_e)$

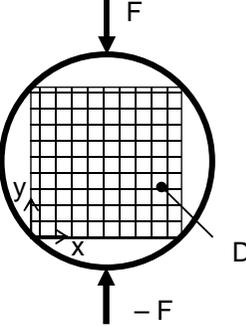
convergence ?

⇒ oui

$\Delta\sigma, \mathcal{L}(k, \sigma_0)$

Résultats d'identification E.R.C. (I)

essai numérique sur PC (sans bruit ...)



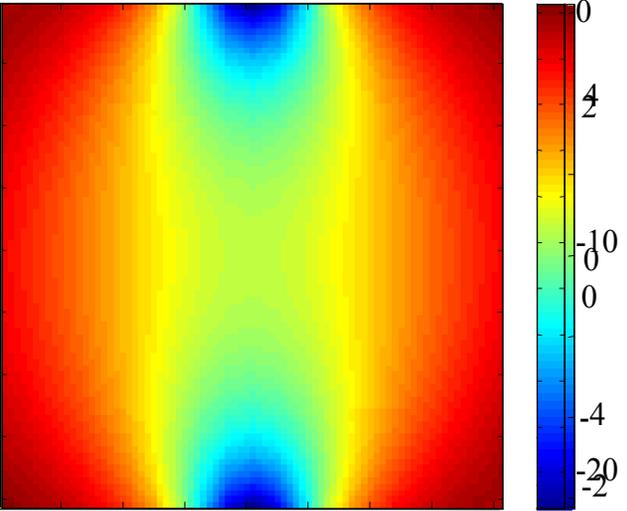
$F = 7.5 \text{ kN}$
 $e = 10 \text{ mm}$
 $R = 77.5 \text{ mm}$
 $E = 2.8 \text{ GPa}$
 $\nu = 0.38$
 $G = E/(2*(1+\nu)) = 1 \text{ GPa}$

mesure de $u_x(x_{ij}, y_{ij})$ et $u_y(x_{ij}, y_{ij})$ sur D

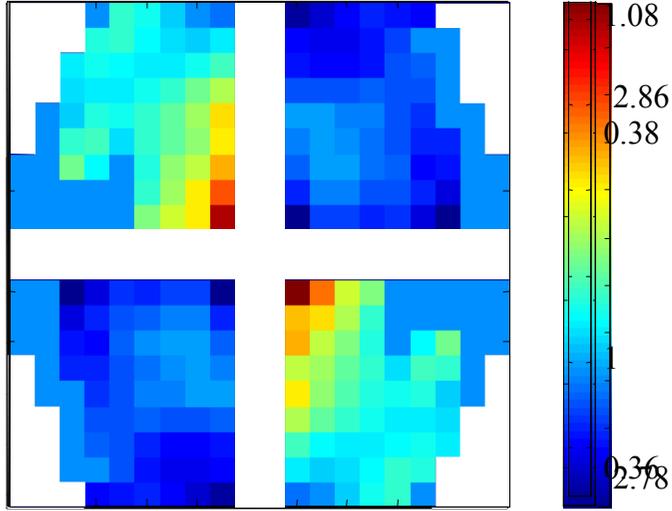
⇒ détermination de :

$$\begin{matrix} \sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy} \\ E, \nu, G \end{matrix}$$

σ_{xy} (MPa)

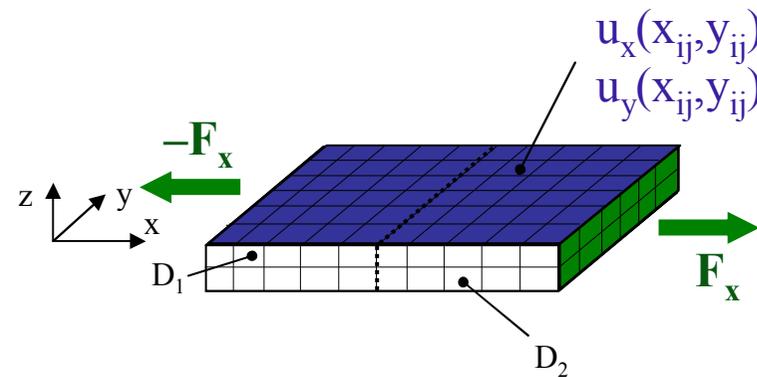
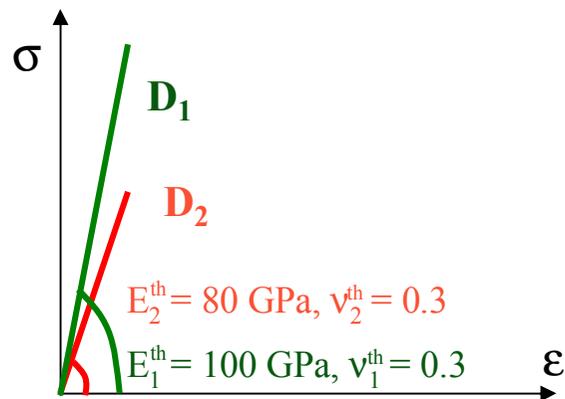
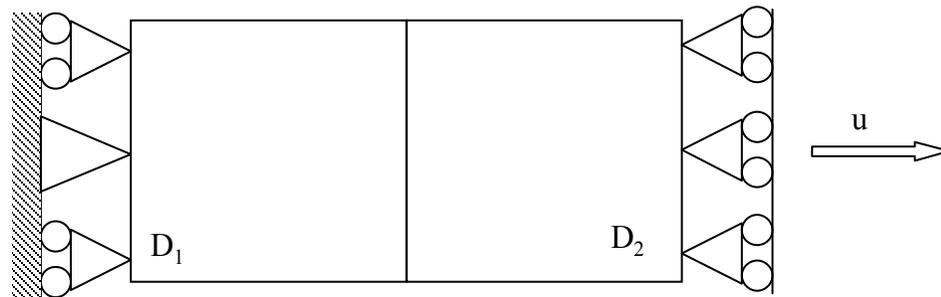


E (GPa)



Résultats d'identification E.R.C. (II)

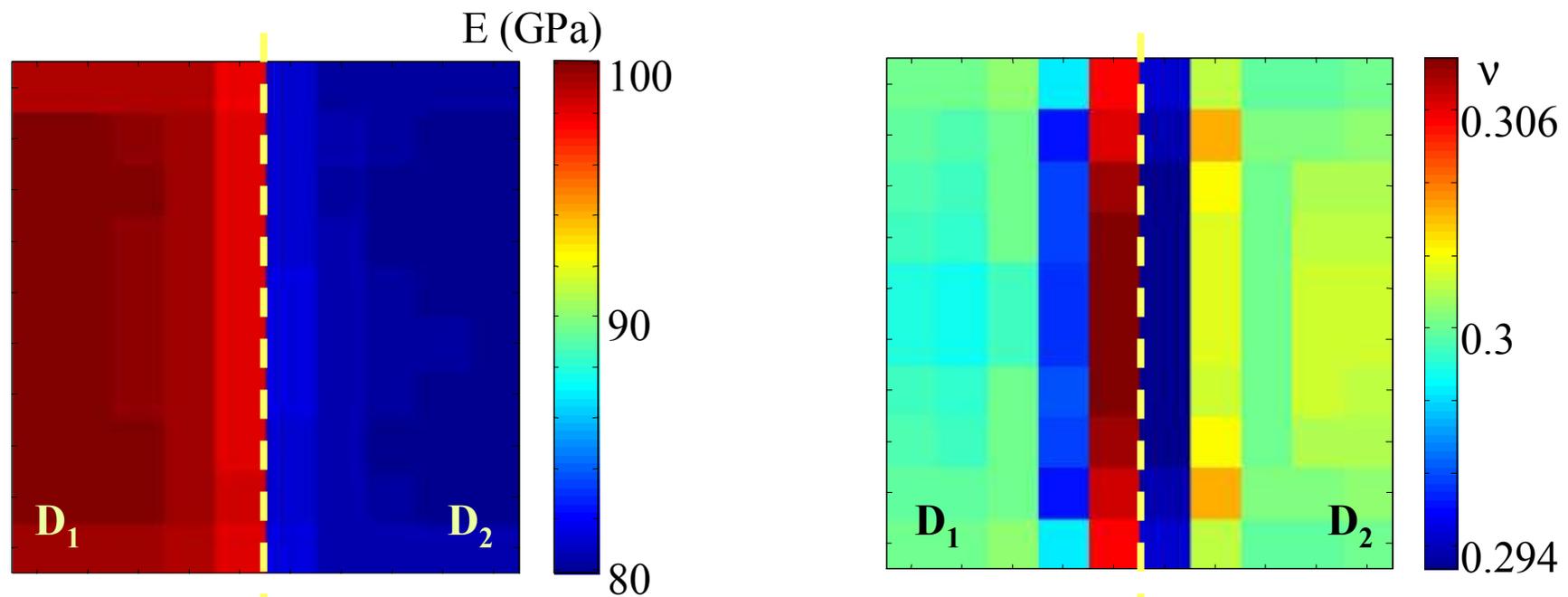
bi-matériau élastique, essai numérique



CAST3M : analyse 3D

Résultats d'identification E.R.C. (III)

- 10×10 zones matérielles
- $B^0 = (90 \text{ GPa}, 0.3, 34.6 \text{ GPa})$



- bonne estimation des frontières des domaines
- bonne estimation des distributions de propriétés élastiques
- erreur maximale à la frontière ($\approx 2\% \text{ max.}$)

Résultats d'identification E.R.C. (IV)

étude de sensibilité

1×2 zones matérielles

– **valeur initiale** : $(E^0, \nu^0) \in [60 \text{ GPa}, 200 \text{ GPa}] \times [0.15, 0.45]$
 $\bar{e}_E = 4.3\%$, $\sigma_{e_E} = 7.0 \cdot 10^{-9}$, $\bar{e}_\nu = 0.7\%$, $\sigma_{e_\nu} = 7.3 \cdot 10^{-8}$

– **contraste** :

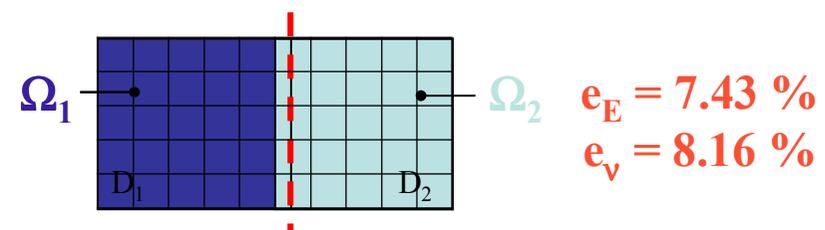
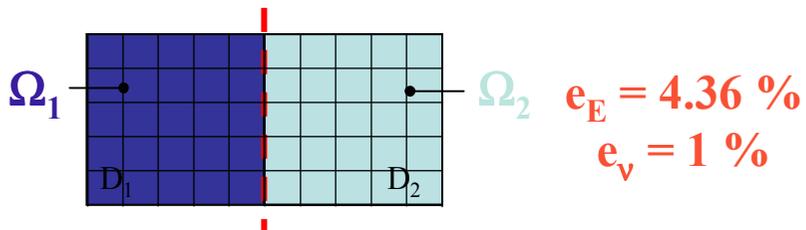
contraste E_{th}	3	1.5	1
e_E (%)	4.36	1.74	0.02
e_ν (%)	1	0.53	$5 \cdot 10^{-5}$

erreur globale :

$$e_E = \left| \frac{E_1 - E_1^{th}}{E_1^{th}} \right| + \left| \frac{E_2 - E_2^{th}}{E_2^{th}} \right|$$

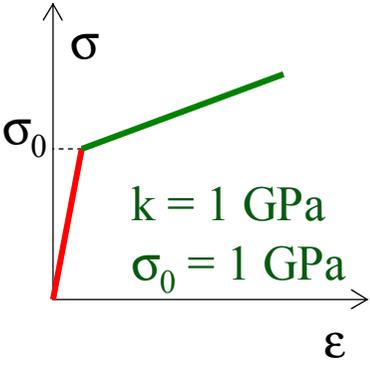
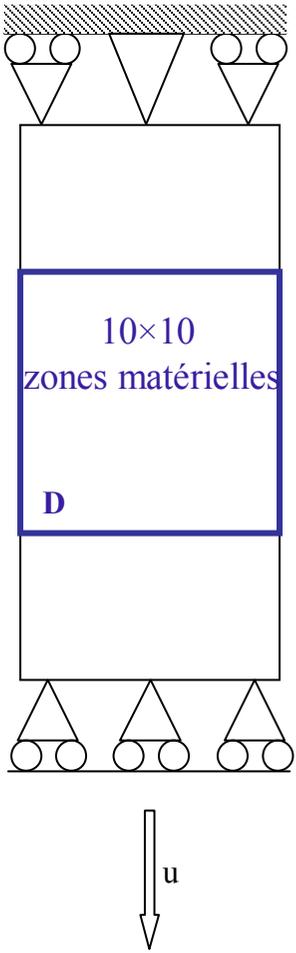
$$e_\nu = \left| \frac{\nu_1 - \nu_1^{th}}{\nu_1^{th}} \right| + \left| \frac{\nu_2 - \nu_2^{th}}{\nu_2^{th}} \right|$$

– **compatibilité** :

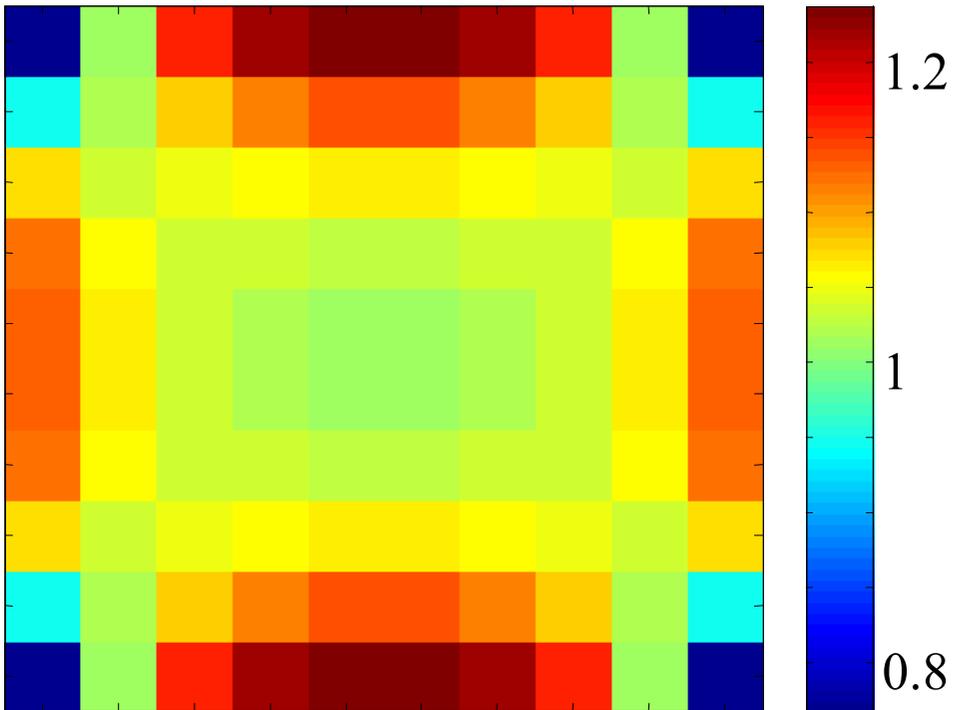


Résultats d'identification E.R.C. (V)

matériau élasto-plastique, échantillon numérique

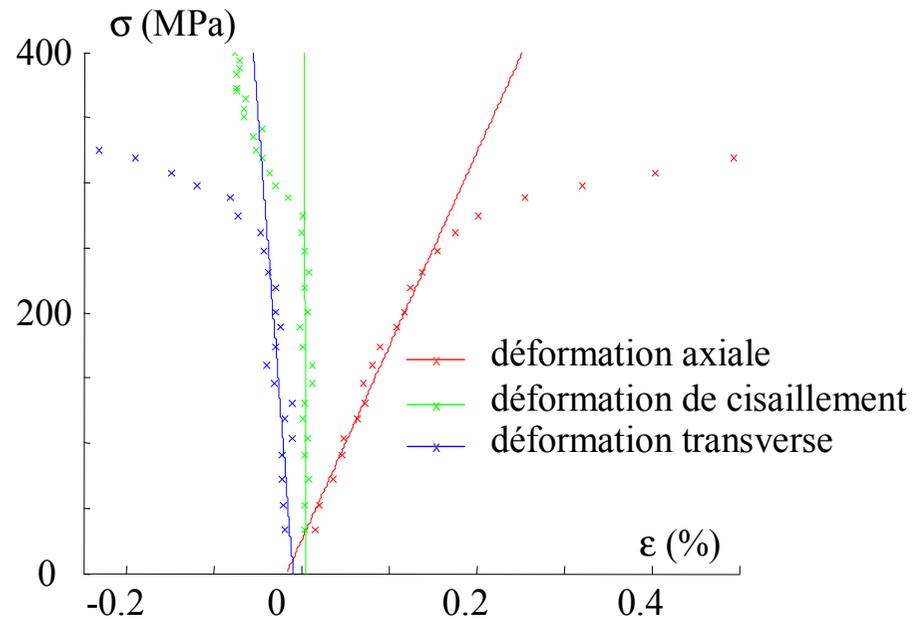
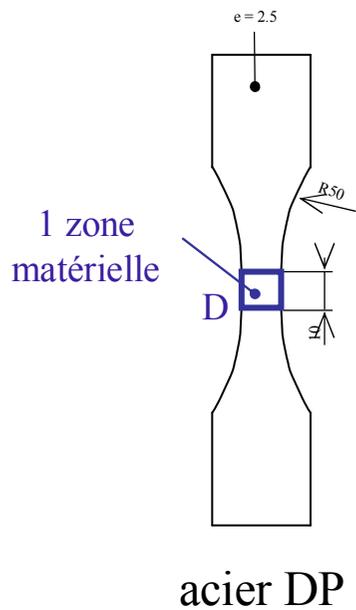


2^{ème} pas plastique :
 $\sigma_{macro} = 1.0015 \text{ GPa}$



$\sigma_0 = 0.95 \text{ GPa}$

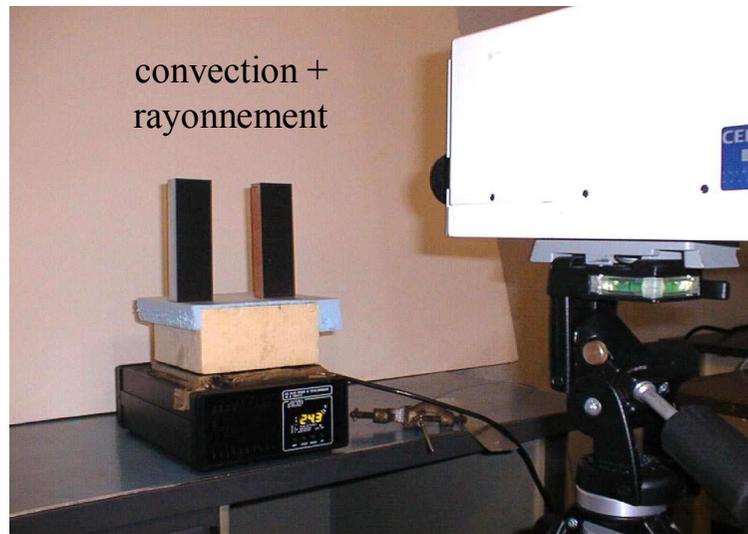
Résultats d'identification E.R.C. (VI)



	E (GPa)	ν	σ_0 (MPa)	k (GPa)
courbe $\sigma - \varepsilon$	184	0.32	224	28.3
identification	191	0.29	224	28.02

Méthode d'identification Recalage (I)

comparaison solution analytique – mesures :



- régime **stationnaire**

⇒ **k**

- régime **instationnaire**

⇒ **ρC**

Point délicat : estimation d'un coefficient d'échange global

Conclusion

- champ d'application des méthodes optique en Mécanique très varié
 - comportement matériau (caractérisation, modélisation, identification, ...)
 - comportement structure (conditions aux limites, ...)
- problèmes métrologiques encore ouverts
 - étalonnage, stabilité, ...
- développements futurs : utilisation couplée des techniques