

Ensembles flous en traitement d'images et vision

Isabelle Bloch

Isabelle.Bloch@enst.fr

<http://www.tsi.enst.fr/~bloch>

Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications - CNRS UMR 5141 LTCI

Paris - France



Intérêt du flou en traitement d'images

- Représentation de l'information spatiale dans les images
 - avec son imprécision
 - à différents niveaux (local, régional ou global)
 - sous différentes formes (numérique, symbolique, quantitative, qualitative)
- Représentation d'informations très hétérogènes, extraites directement des images ou issues de connaissances externes
- Généralisation aux ensembles flous des opérations pour manipuler l'information spatiale
- Souplesse des opérateurs de combinaison (fusion)

Deux approches

- Raisonnement sur des attributs flous
- Raisonnement sur des régions ou objets flous

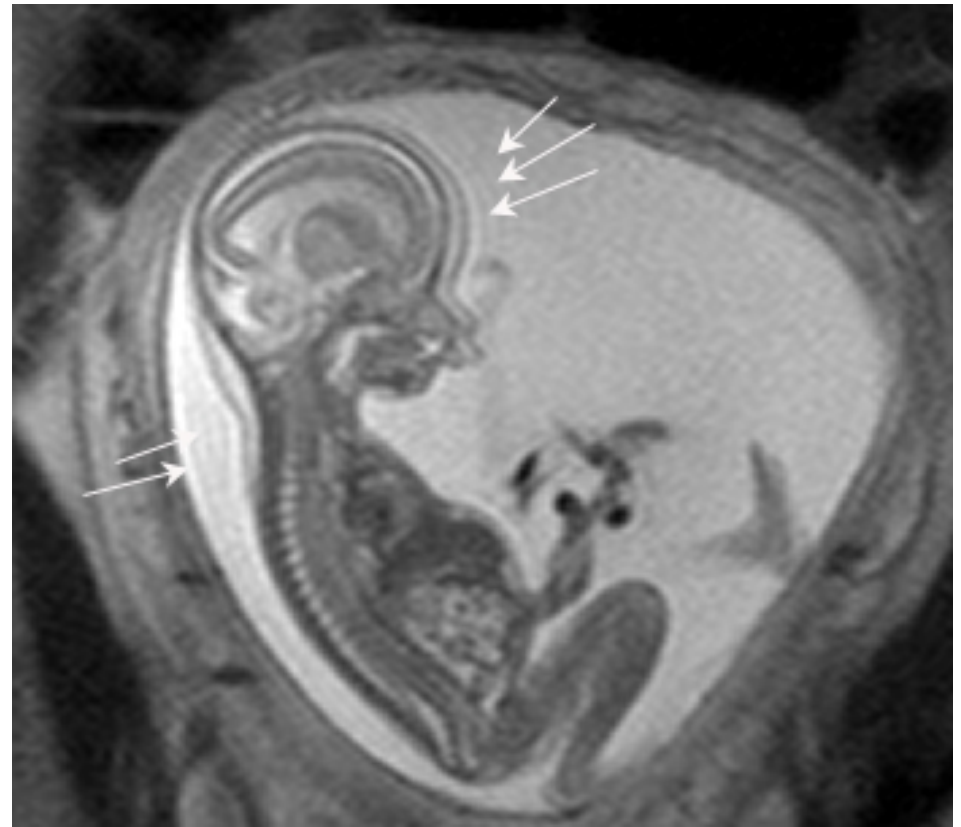
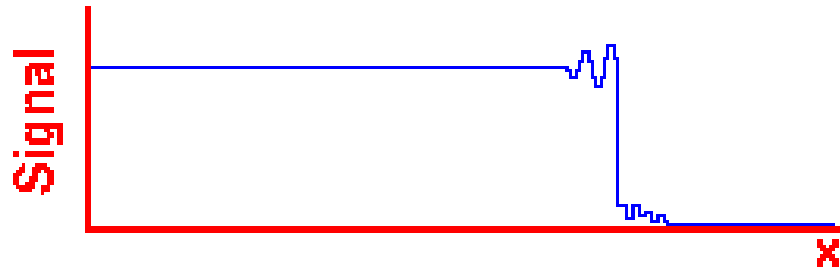
Imprécision en traitement d'images : exemples



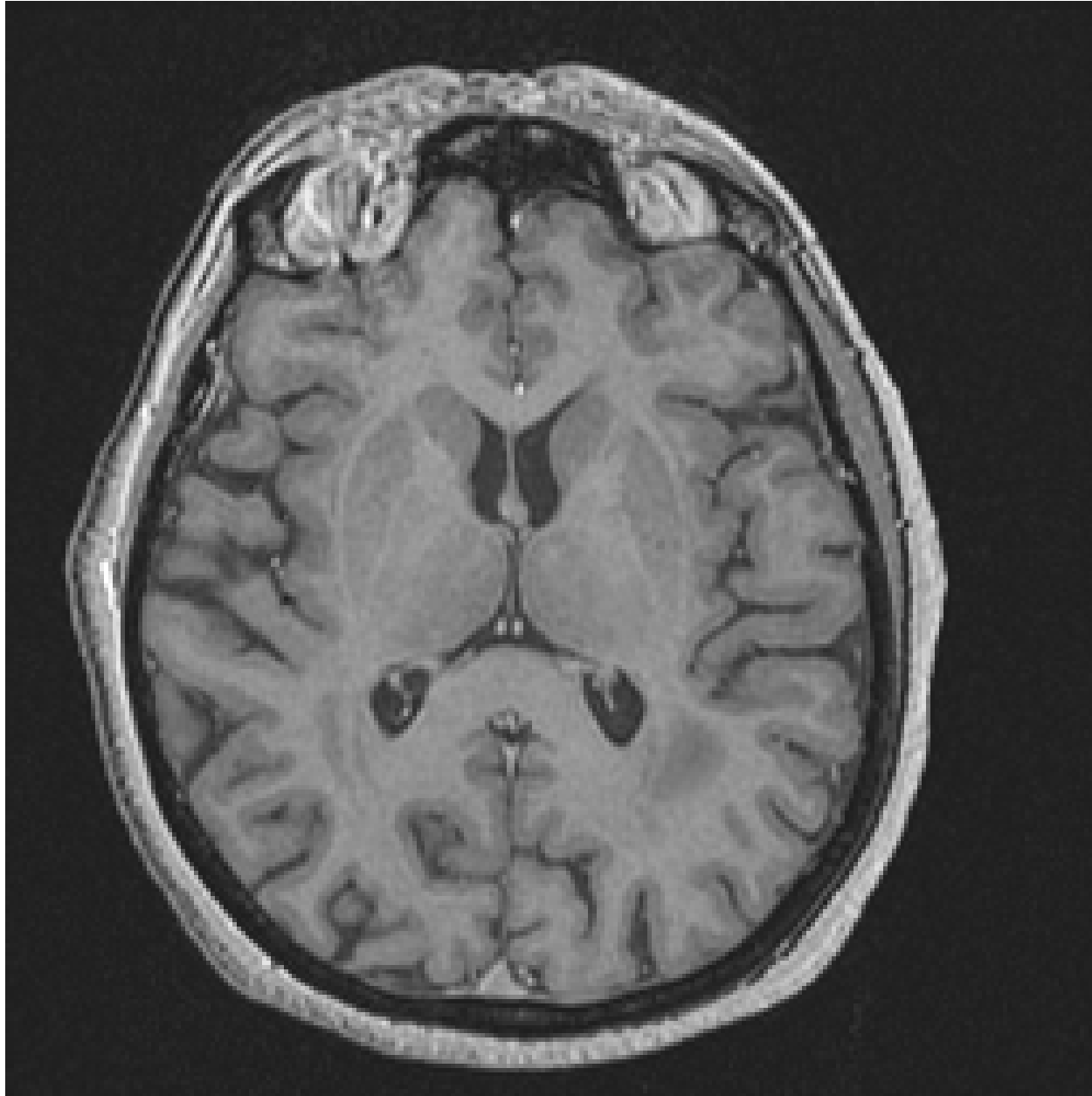
Imprécision en traitement d'images : exemples



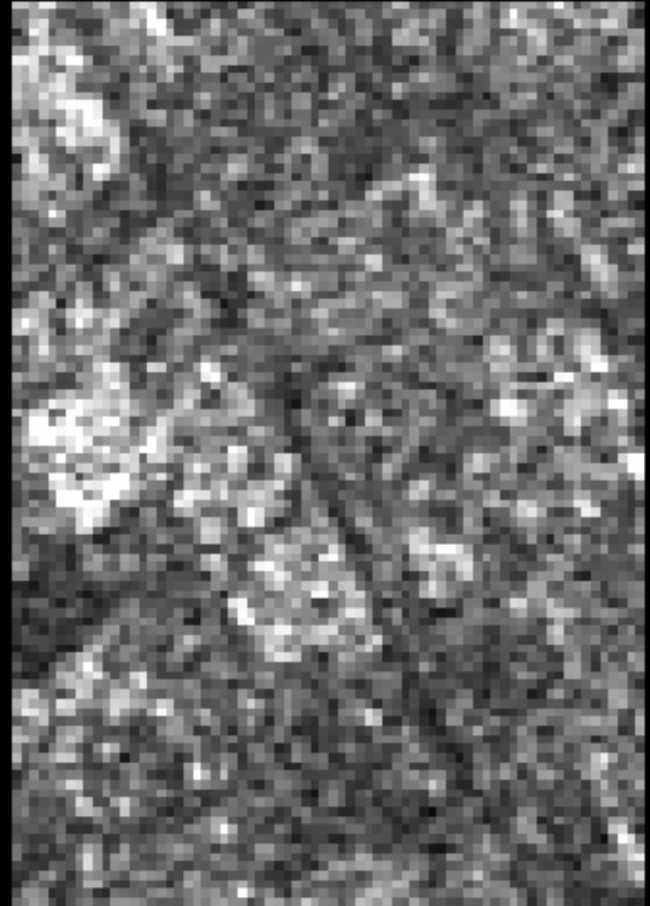
Imprécision en traitement d'images : exemples



Imprécision en traitement d'images : exemples



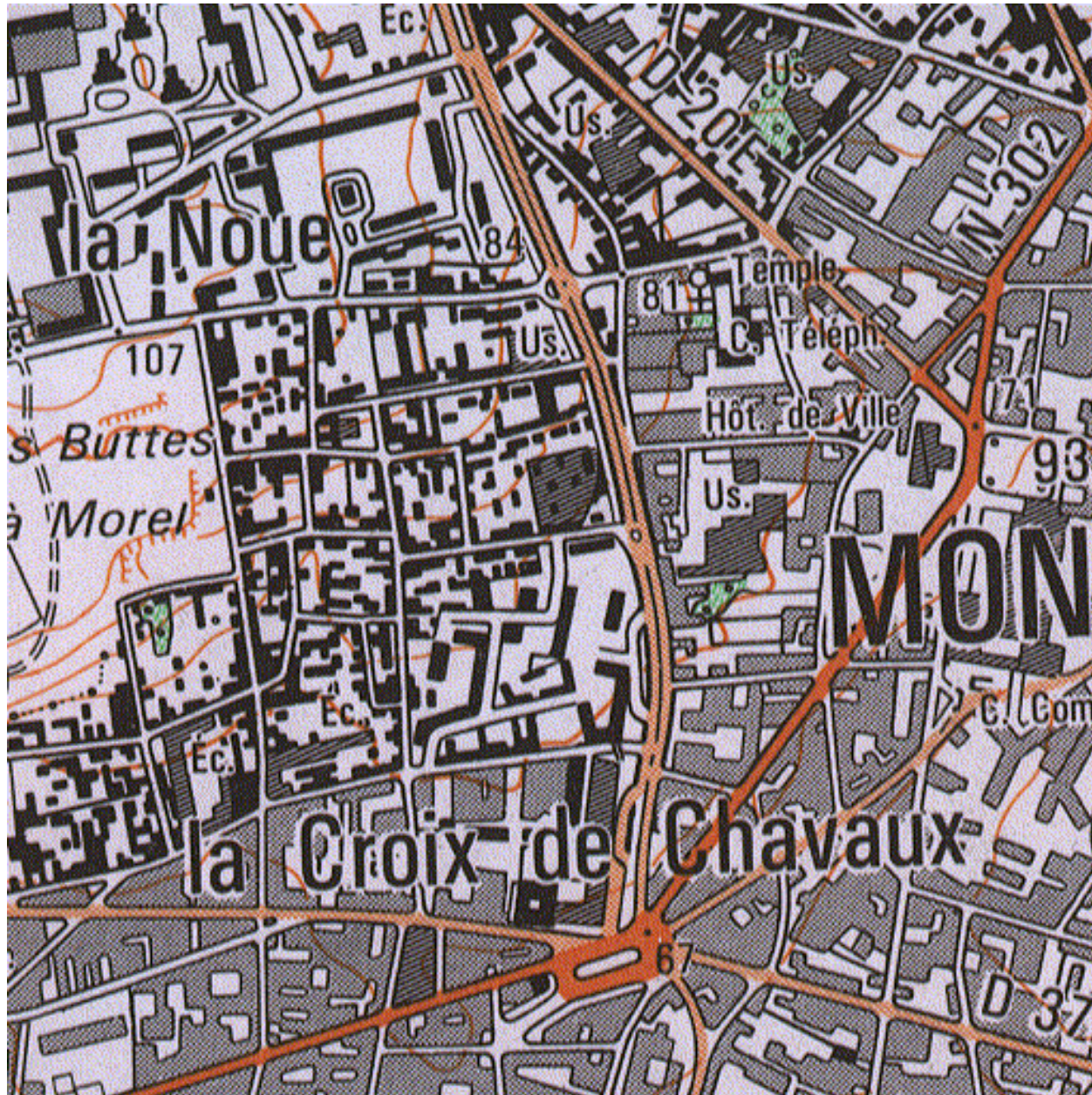
Imprécision en traitement d'images : exemples



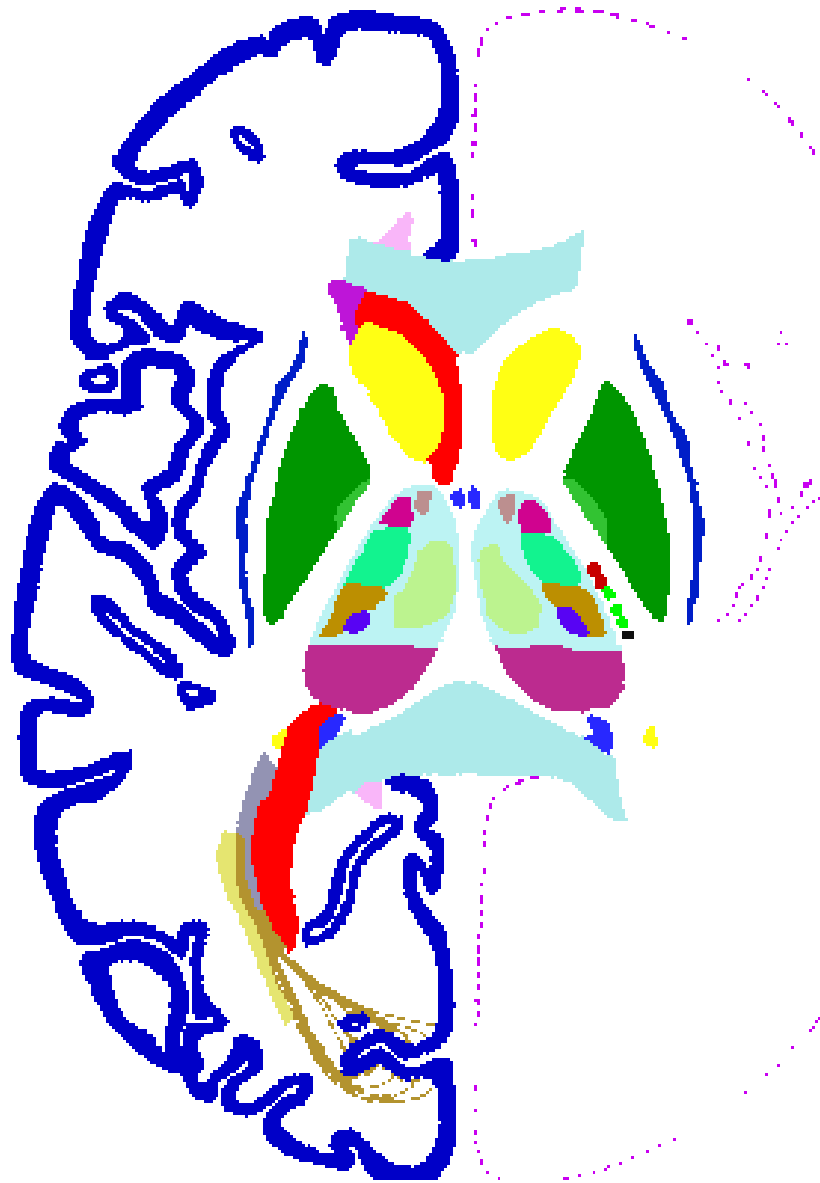
Imprécision en traitement d'images : exemples



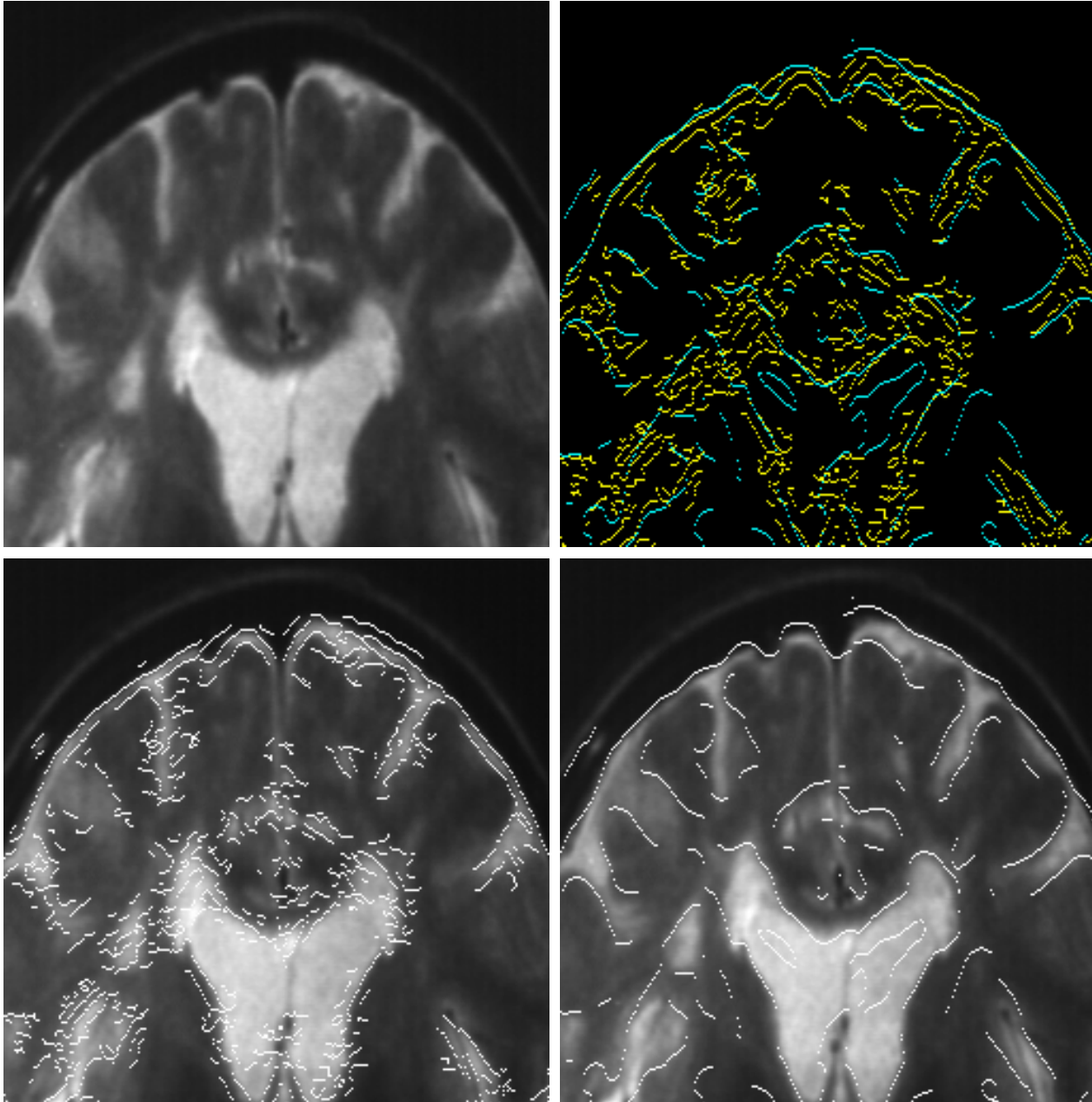
Imprécision en traitement d'images : exemples



Imprécision en traitement d'images : exemples

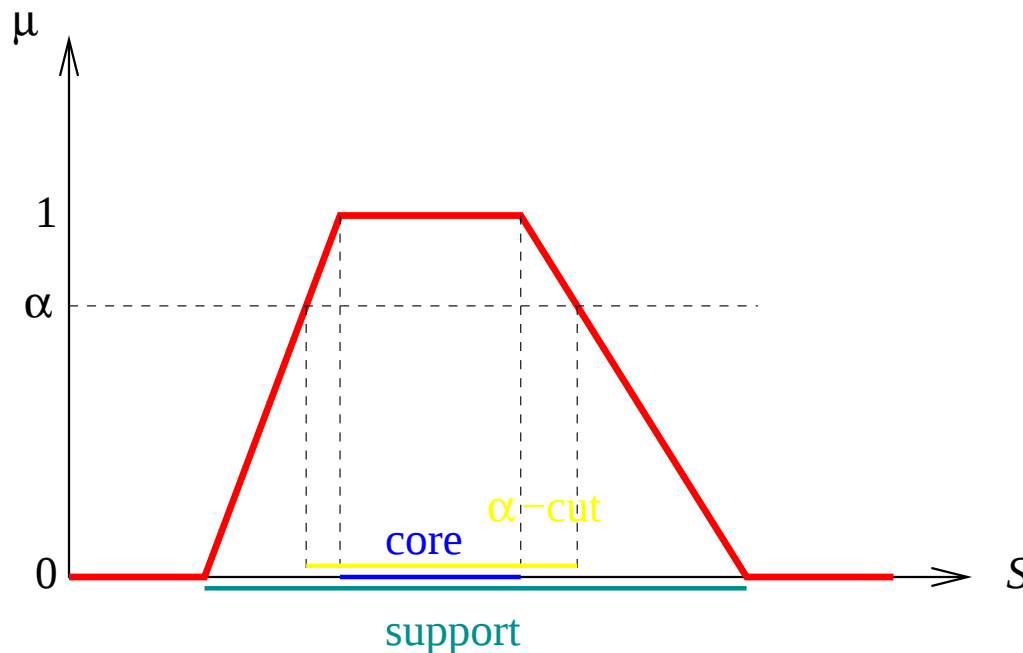


Imprécision en traitement d'images : exemples



Définitions : ensembles flous

- Espace $\mathcal{S}$ (image, caractéristiques, etc.)
- Ensemble flou : $\mu : \mathcal{S} \rightarrow [0, 1]$ – $\mu(x)$ = degré d'appartenance de x à μ
- Support : $Supp(\mu) = \{x \in \mathcal{S}, \mu(x) > 0\}$ – Noyau : $\{x \in \mathcal{S}, \mu(x) = 1\}$
- α -coupe : $\mu_\alpha = \{x \in \mathcal{S}, \mu(x) \geq \alpha\}$
- Cardinal : $|\mu| = \sum_{x \in \mathcal{S}} \mu(x)$ (pour $\mathcal{S}$ fini)
- Convexité : $\forall (x, y) \in \mathcal{S}^2, \forall \lambda \in [0, 1], \mu[\lambda x + (1 - \lambda)y] \geq \min[\mu(x), \mu(y)]$
- Nombre flou : ensemble flou convexe sur $\mathbb{R}$, s.c.s., unimodal, de support compact.
Exemple : ensembles flous LR.



Opérations de base (Zadeh, 1965)

- Egalité : $\mu = \nu \Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{S}, \mu(x) = \nu(x)$
- Inclusion : $\mu \subseteq \nu \Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{S}, \mu(x) \leq \nu(x)$
- Intersection : $\forall x \in \mathcal{S}, (\mu \cap \nu)(x) = \min[\mu(x), \nu(x)]$
- Réunion : $\forall x \in \mathcal{S}, (\mu \cup \nu)(x) = \max[\mu(x), \nu(x)]$
- Complémentation : $\forall x \in \mathcal{S}, \mu^C(x) = 1 - \mu(x)$
- Propriétés :
 - cohérence avec les définitions binaires
 - $\mu = \nu \Leftrightarrow \mu \subseteq \nu$ et $\nu \subseteq \mu$
 - la complémentation floue est involutive : $(\mu^C)^C = \mu$
 - l'intersection et la réunion sont commutatives et associatives
 - l'intersection et la réunion sont idempotentes et mutuellement distributives
 - l'intersection et la réunion sont duales par rapport à la complémentation :
$$(\mu \cap \nu)^C = \mu^C \cup \nu^C$$
 - $(\mu \cup \nu)_\alpha = \mu_\alpha \cup \nu_\alpha$, etc.

MAIS : $\mu \cap \mu^C \neq \emptyset, \mu \cup \mu^C \neq \mathcal{S}$

Définitions : théorie des possibilités

Mesure de possibilité : fonction Π de $2^{\mathcal{S}}$ dans $[0, 1]$ telle que :

1. $\Pi(\emptyset) = 0$
2. $\Pi(\mathcal{S}) = 1$
3. $\forall I \subseteq N, \forall A_i \subseteq \mathcal{S} (i \in I), \Pi(\cup_{i \in I} A_i) = \sup_{i \in I} \Pi(A_i)$

Mesure de nécessité : $\forall A \subseteq \mathcal{S}, N(A) = 1 - \Pi(A^C)$

1. $N(\emptyset) = 0$
2. $N(\mathcal{S}) = 1$
3. $\forall I \subseteq N, \forall A_i \subseteq \mathcal{S} (i \in I), N(\cap_{i \in I} A_i) = \inf_{i \in I} N(A_i)$

Quelques propriétés :

- $\max(\Pi(A), \Pi(A^C)) = 1, \min(N(A), N(A^C)) = 0$
- $\Pi(A) \geq N(A)$
- $N(A) > 0 \Rightarrow \Pi(A) = 1, \Pi(A) < 1 \Rightarrow N(A) = 0$
- $N(A) + N(A^C) \leq 1, \Pi(A) + \Pi(A^C) \geq 1$

Distribution de possibilité : fonction π de $\mathcal{S}$ dans $[0, 1]$ avec la condition de normalisation $\sup_{x \in \mathcal{S}} \pi(x) = 1$

Cas fini : $\Pi(A) = \sup\{\pi(x), x \in A\}$

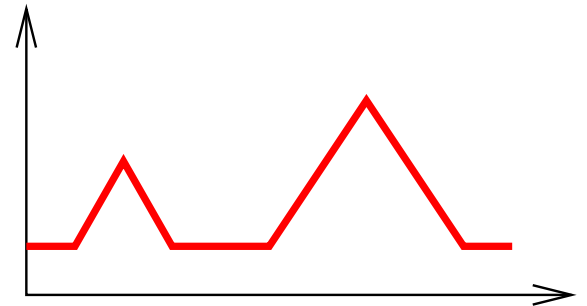
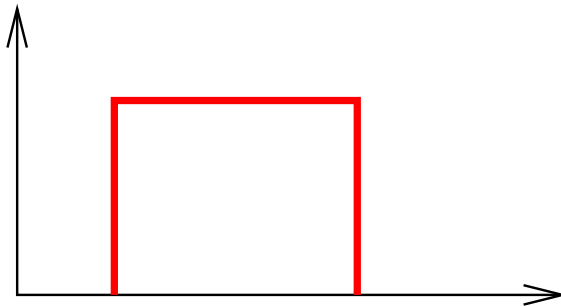
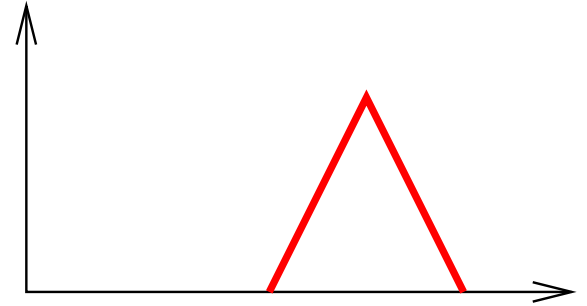
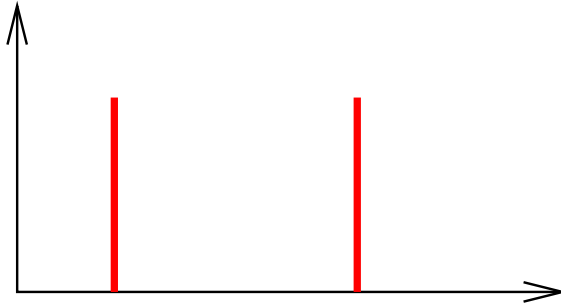
Inversement : $\forall x \in \mathcal{S}, \pi(x) = \Pi(\{x\})$

$N(A) = 1 - \sup\{\pi(x), x \notin A\} = \inf\{1 - \pi(x), x \in A^C\}$

Sémantique

- degré de **similarité** (notion de distance)
- degré de **plausibilité** (qu'un objet dont on ne connaît qu'une description imprécise soit bien celui qu'on cherche à identifier)
- degré de **préférence** (classe floue = ensemble des "bons" choix), proche de la notion de fonction d'utilité

Représentation de différents types d'imperfections



Opérations ensemblistes générales

Complémentation floue

fonction c de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ telle que :

1. $c(0) = 1$
2. $c(1) = 0$
3. c involutive : $\forall x \in [0, 1], c(c(x)) = x$
4. c strictement décroissante

Forme générale des complémentations continues : $c(x) = \varphi^{-1}[1 - \varphi(x)]$ avec $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$, φ strictement croissante.

Exemple : $\varphi(x) = x^n \Rightarrow c(x) = (1 - x^n)^{1/n}$

Opérations ensemblistes générales

Normes triangulaires (intersection floue)

t-norme $t : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ telle que :

1. commutativité : $\forall (x, y) \in [0, 1]^2, t(x, y) = t(y, x)$
2. associativité : $\forall (x, y, z) \in [0, 1]^3, t[t(x, y), z] = t[x, t(y, z)]$
3. 1 est élément neutre : $\forall x \in [0, 1], t(x, 1) = t(1, x) = x$
4. croissance par rapport aux deux variables :

$$\forall (x, x', y, y') \in [0, 1]^4, (x \leq x' \text{ et } y \leq y') \Rightarrow t(x, y) \leq t(x', y').$$

De plus : $t(0, 1) = t(0, 0) = t(1, 0) = 0, t(1, 1) = 1$, et 0 est absorbant ($\forall x \in [0, 1], t(x, 0) = 0$).

Exemples de t-normes : $\min(x, y), xy, \max(0, x + y - 1)$.

Opérations ensemblistes générales

Conormes triangulaires (réunion floue)

t-conorme $T : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ telle que :

1. commutativité
2. associativité
3. 0 est élément neutre
4. croissance par rapport aux deux variables

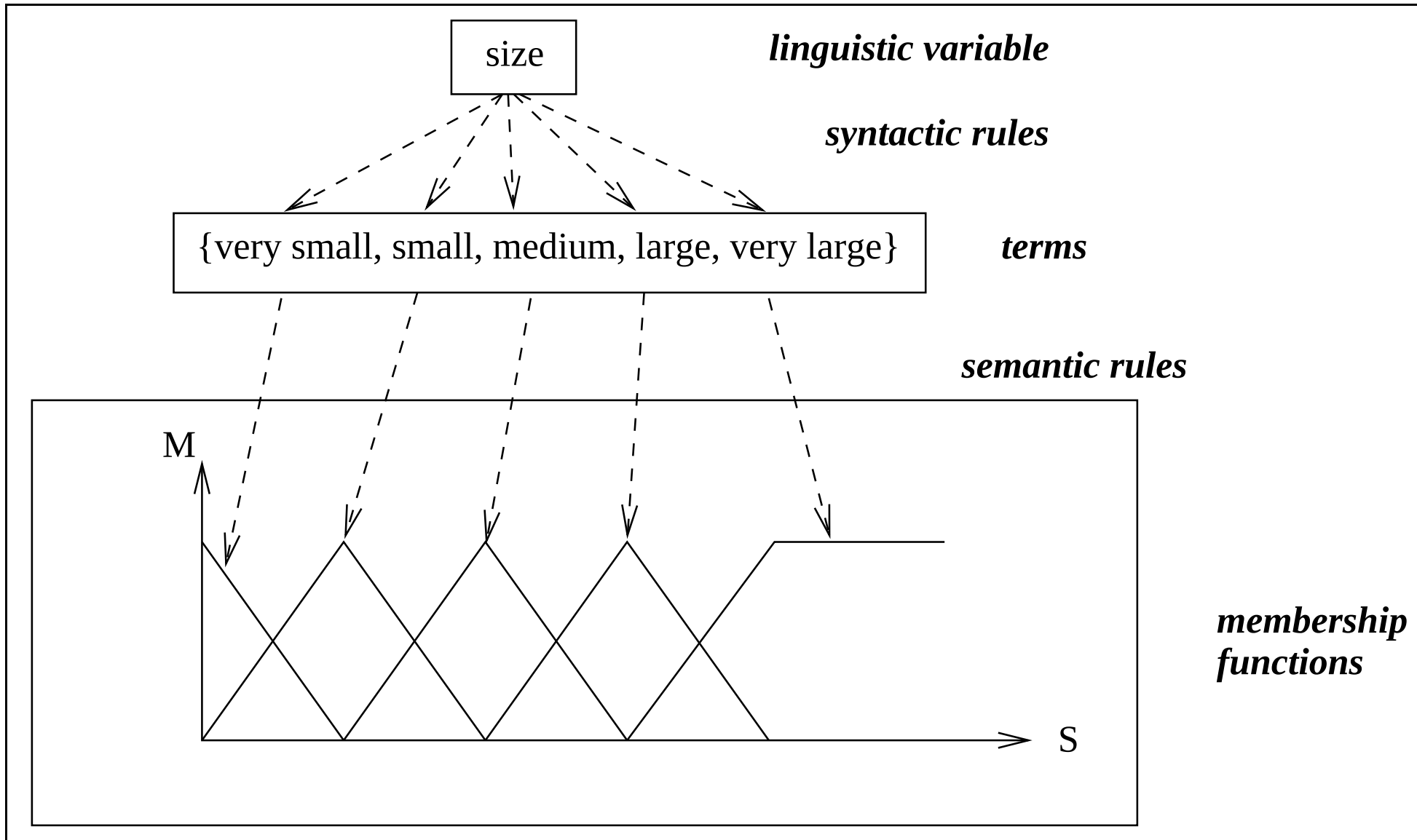
De plus : $T(0, 1) = T(1, 1) = T(1, 0) = 1$, $T(0, 0) = 0$, et 1 est absorbant.

Exemples de t-conormes : $\max(x, y)$, $x + y - xy$, $\min(1, x + y)$.

Dualité : $\forall (x, y) \in [0, 1]^2$, $T[c(x), c(y)] = c[t(x, y)]$

Autres opérateurs de combinaison (moyennes, sommes symétriques, etc.) : voir partie sur la fusion

Variable linguistique

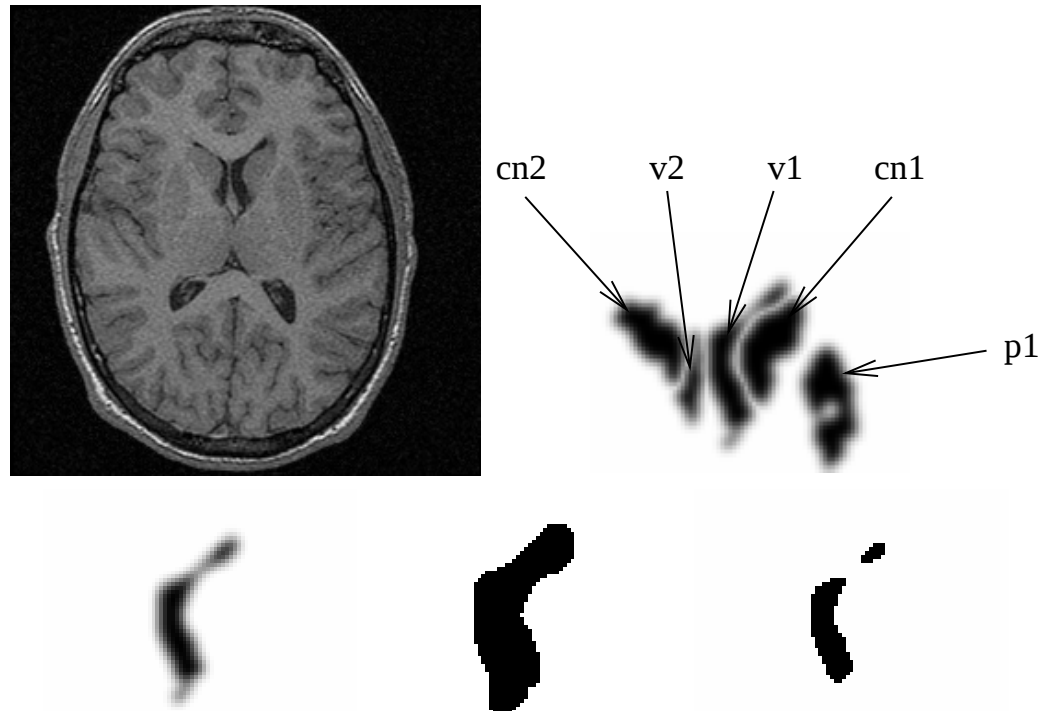


Objets flous spatiaux

$\mathcal{S} : \mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{Z}^3$ dans le cas discret

$$\mu : \mathcal{S} \rightarrow [0, 1]$$

$\mu(x)$ = degré avec lequel x appartient à l'objet flou



Définition des fonctions d'appartenance

- souvent très heuristique
- à partir de la fonction d'intensité I ou du gradient

$$\mu(x) = F_1[I(x)]$$

$$\mu(x) = F_2[\nabla I(x)]$$

- en fonction de la réponse à un détecteur
- par introduction d'imprécision à la frontière d'une détection binaire

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E^n(O) \\ 0 & \text{si } x \in \mathcal{S} - D^m(O) \\ F_3[d(x, E^n(O))] & \text{sinon} \end{cases}$$

- par classification

C-moyennes floues

- X = ensemble d'éléments à classer (définis dans un certain espace de caractéristiques)
- $P = \{C_1, C_2, \dots, C_C\}$ = ensemble de classes

Partition floue :

1. $\forall x_i \in X, \forall C_j \in P, \mu_{ij} \in [0, 1]$, où μ_{ij} = degré d'appartenance de x_i à C_j
2. $\forall x_i \in X, \sum_{j=1}^C \mu_{ij} = 1$
3. $\forall j \leq C, 0 < \sum_{i=1}^N \mu_{ij} < N$, où N = cardinal de X

Optimisation de :

$$J_m = \sum_{j=1}^C \sum_i^N \mu_{ij}^m ||x_i - m_j||^2$$

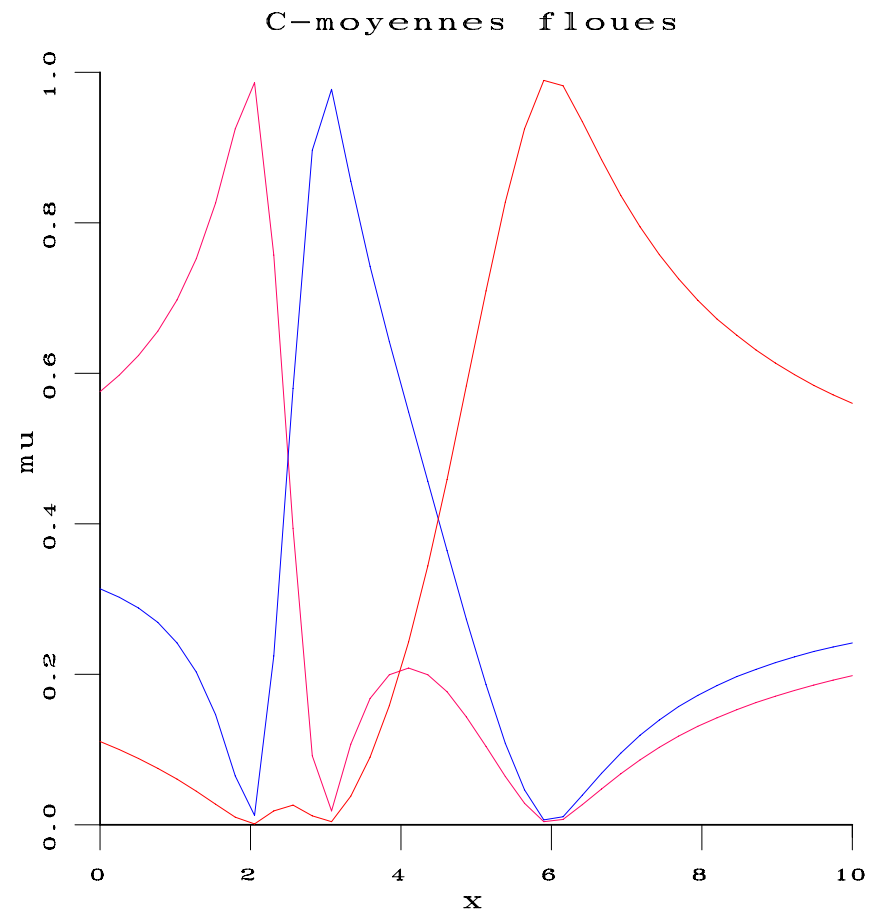
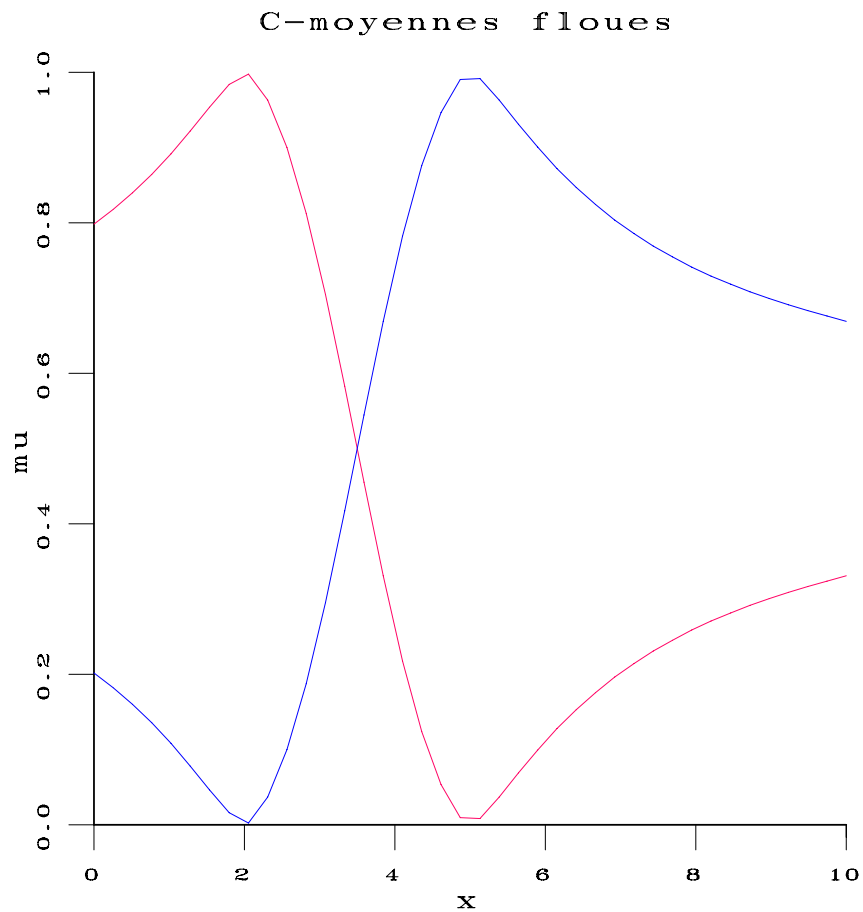
Solution itérative :

$$\mu_{ij} = \frac{1}{\sum_{k=1}^C \left[\frac{||x_i - m_j||}{||x_i - m_k||} \right]^{\frac{2}{m-1}}}$$

$$m_j = \frac{\sum_i \mu_{ij}^m x_i}{\sum_i \mu_{ij}^m}$$

Convergence vers un minimum local de J_m

C-moyennes floues : exemple en 1D



C-moyennes possibilistes

Optimisation de :

$$J = \sum_{j=1}^C \sum_{i=1}^N \mu_{ij}^m ||x_i - m_j||^2 + \sum_{j=1}^C \eta_j \sum_{i=1}^N (1 - \mu_{ij})^m ||x_i - m_j||^2$$

Solution itérative :

$$\mu_{ij} = \frac{1}{1 + \frac{||x_i - m_j||^2}{\eta_j} \frac{1}{m-1}}$$

⇒ Meilleure forme des fonctions d'appartenance

Détermination de η_j

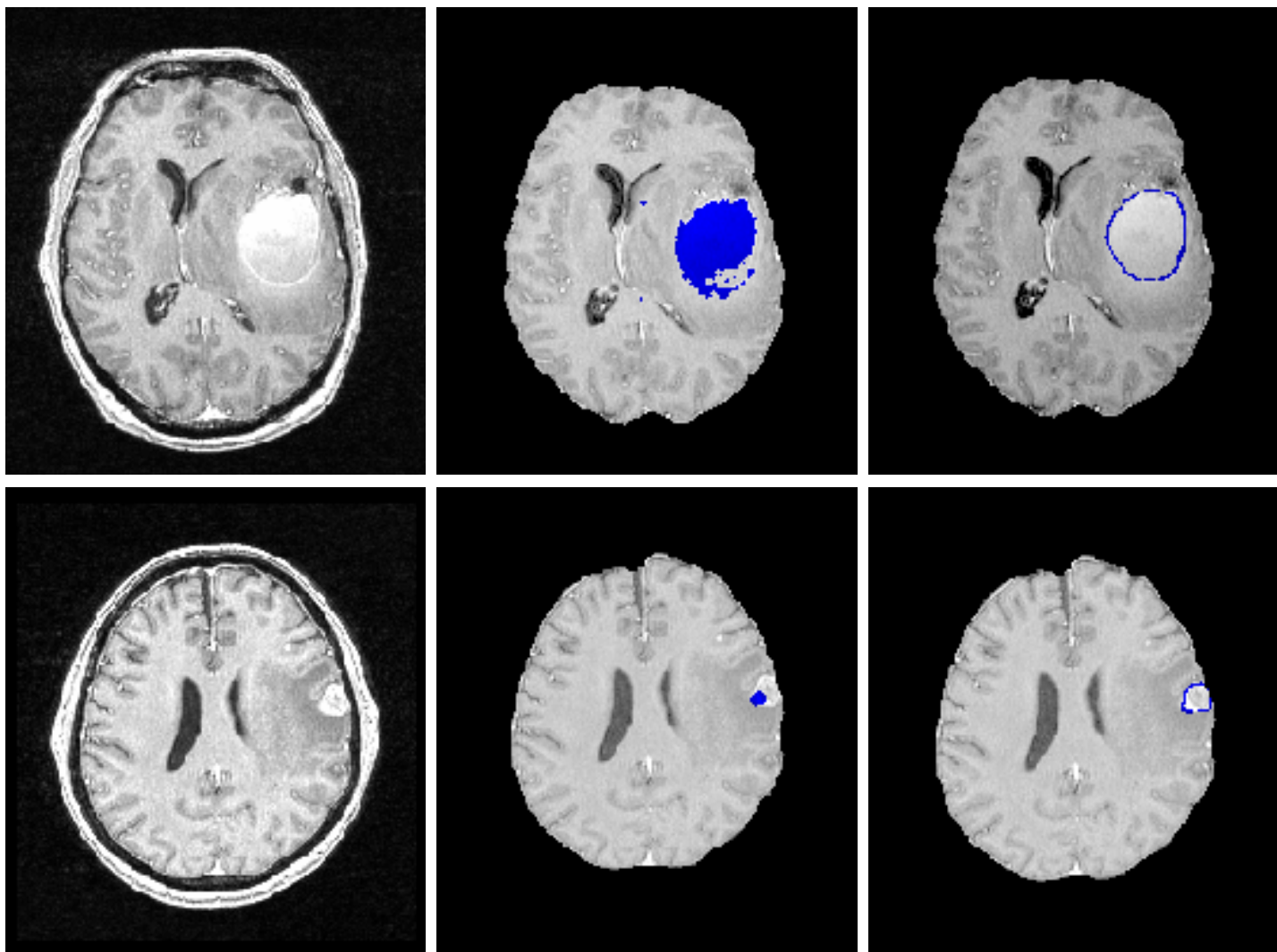
- à partir de la dispersion :

$$\eta_j = \frac{\sum_{i=1}^N \mu_{ij} ||x_i - m_j||^2}{\sum_{i=1}^N \mu_{ij}}$$

- à partir d'échantillons de la classe de $\mu_{ij} \geq \alpha$:

$$\eta_j = \frac{\sum_{i \in \{\mu_{ij}\}_\alpha} ||x_i - m_j||^2}{|\{\mu_{ij}\}_\alpha|}$$

Exemple sur des tumeurs cérébrales



k-plus proches voisins flous

Cas binaire :

$$\mu_i(x) = U\left[\sum_{j=1}^k \mu_i(x_j)\right]$$

avec

$$U(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > \frac{k}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cas flou :

$$\mu_i(x) = \frac{1}{1 + \exp\left[\frac{1}{b_i}\left(\frac{k}{2} - t_i(x)\right)\right]}$$

$$t_i(x) = \sum_{j=1}^k \mu_i(x_j) \quad t_i(x) = \sum_{j=1}^k \mu_i(x_j) \exp\left[-\lambda\left(\frac{d(x, x_j)}{d_m^i}\right)^2\right]$$

b_i : contrôle le flou, par exemple en fonction de l'entropie floue

$$b_i = H(i) = \frac{1}{K} \sum_x [\mu_i(x) \log(\mu_i(x)) + (1 - \mu_i(x)) \log(1 - \mu_i(x))]$$

Filtrage et segmentation (opérateurs locaux)

- Approches fonctionnelles
 - minimisation d'un indice de flou
 - fonction de pondération floue dans des filtres classiques

- Techniques à base de règles

- exemple de lissage :

SI	un pixel est <i>plus foncé</i> que ses voisins
ALORS	<i>augmenter</i> son niveau de gris
SINON SI	le pixel est <i>plus clair</i> que ses voisins
ALORS	<i>diminuer</i> son niveau de gris
SINON	le laisser inchangé

- exemple de détecteur de contour :

SI	un pixel <i>appartient au contour</i>
ALORS	<i>augmenter beaucoup</i> son niveau de gris
SINON	<i>diminuer beaucoup</i> son niveau de gris

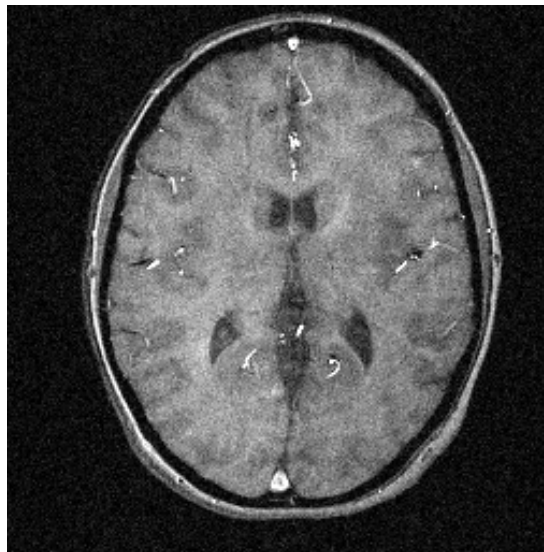
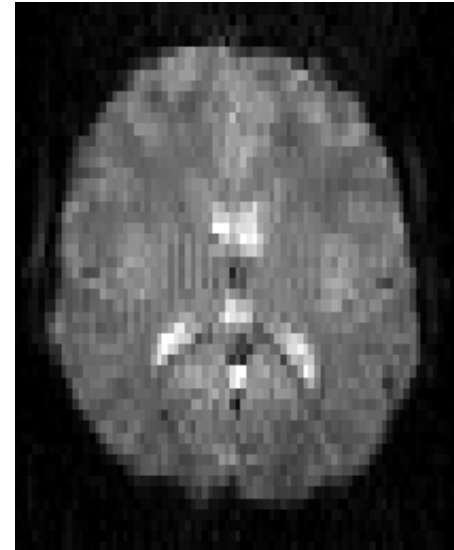
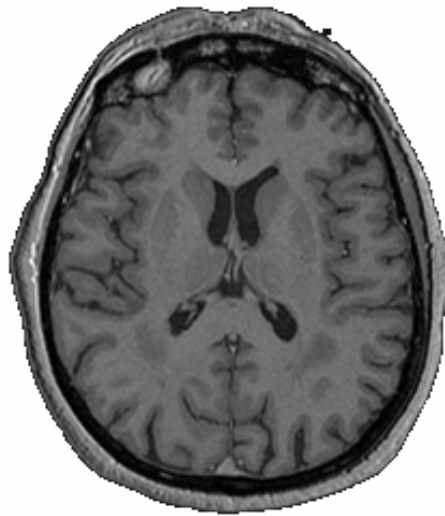
Nécessité de la fusion d'images

- techniques d'acquisition et sources de données multiples
 - un capteur, plusieurs images
 - plusieurs capteurs
 - une image, plusieurs types d'informations
 - images multi-dates, séquences
- phénomènes complexes
- problèmes complexes (détection, reconnaissance, interprétation)
- applications variées

Une définition

Combinaison d'informations issues de sources différentes
dans le but d'améliorer la décision

Variété, hétérogénéité et complexité des informations



Variété, hétérogénéité et complexité des informations

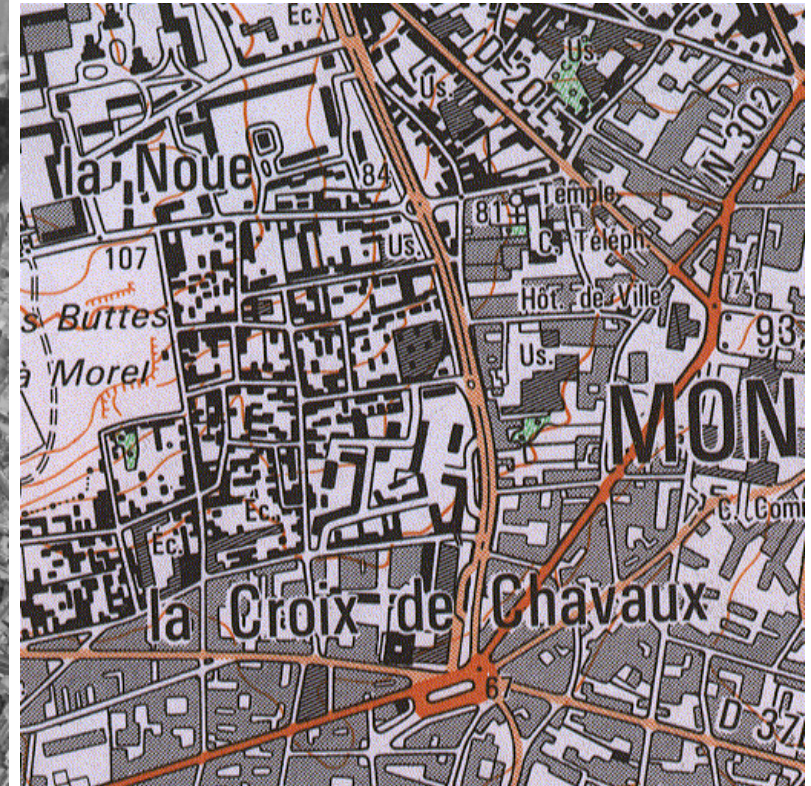
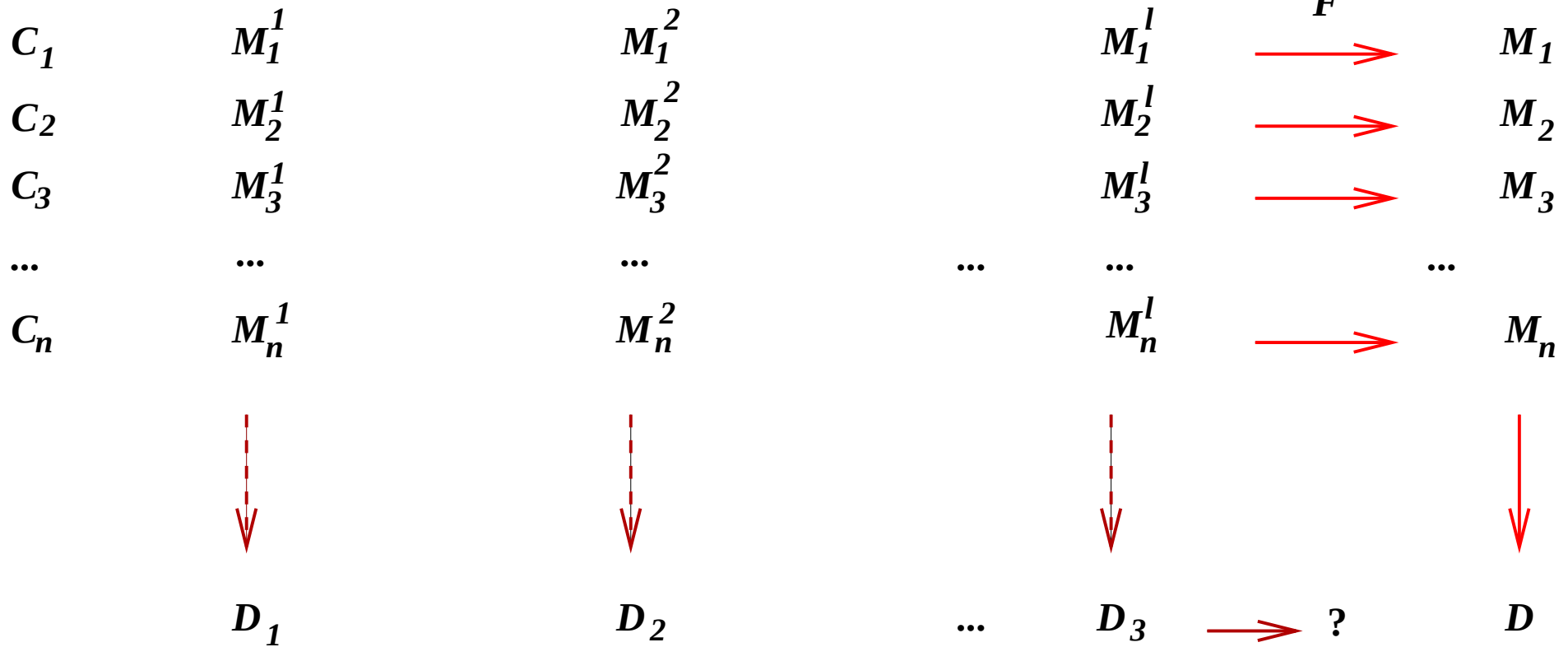
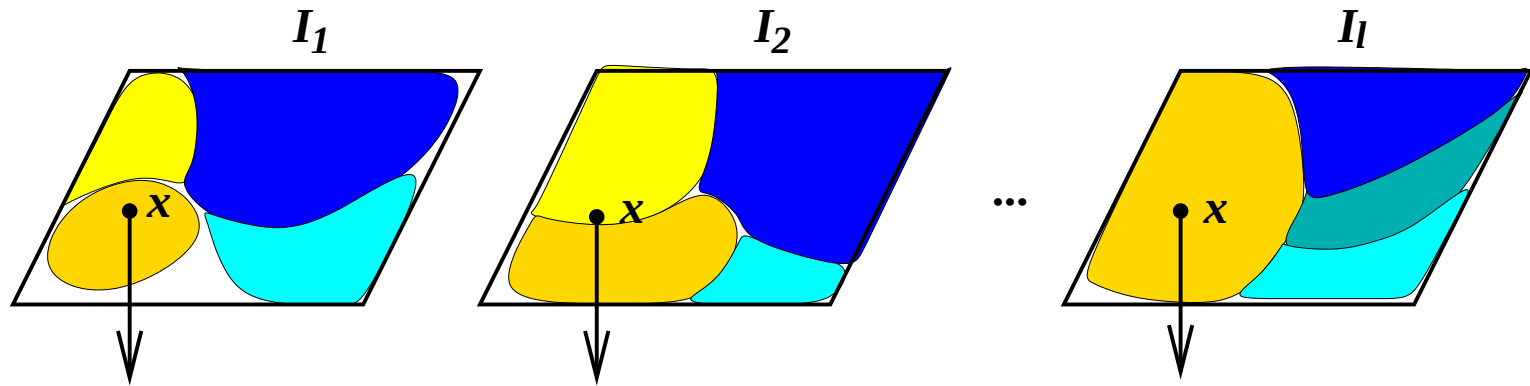


Schéma général



Conflit ?

Principales étapes

1. modélisation du problème et de l'information
2. estimation
3. combinaison
4. décision

Fusion floue et possibiliste

- imprécision ou imprécision et incertitude
- beaucoup d'opérateurs de combinaison
- grande souplesse dans les modes de combinaison

Fusion floue et possibiliste : modélisation

- Modèle flou :

$$M_i^j(x) = \mu_i^j(x)$$

sans contrainte particulière imposée

- Modèle possibiliste :

$$M_i^j(x) = \pi_j^x(C_i)$$

$$\Pi_j(\{C_i\}) = \pi_j(C_i), \quad N_j(\{C_i\}) = \inf\{(1 - \pi_j(C_k)), C_k \neq C_i\}$$

Opérateurs de fusion floue et possibiliste

- t-normes
- t-conormes
- moyennes
- sommes symétriques
- opérateurs dépendant du conflit - exemple :

$$\max\left[\frac{\min(\pi_1, \pi_2)}{1 - \text{conf}(\pi_1, \pi_2)}, \min[\max(\pi_1, \pi_2), \text{conf}(\pi_1, \pi_2)]\right]$$

- opérateurs dépendant de la fiabilité des sources - exemples :

$$\min[\pi_1, \max[\pi_2, \text{conf}(\pi_1, \pi_2)]] \quad \text{si } \pi_1 \text{ est plus fiable que } \pi_2$$

$$\max(\pi_j, 1 - w_j) \quad \text{puis fusion conjonctive}$$

- opérateurs dépendant de la fiabilité de chaque source pour chaque classe
- ...

Choix des opérateurs

- Comportement :
 - conjonctif $F(x, y) \leq \min(x, y)$
 - disjonctif $F(x, y) \geq \max(x, y)$
 - compromis $x \leq F(x, y) \leq y$ si $x \leq y$, et $y \leq F(x, y) \leq x$ sinon
- Comportement constant ou adaptatif (en fonction des valeurs à combiner) - exemple : sommes symétriques associatives (sauf médianes) :
 - conjonctif si $\max(x, y) < 1/2$: $\sigma(x, y) \leq \min(x, y)$
 - disjonctif si $\min(x, y) > 1/2$: $\sigma(x, y) \geq \max(x, y)$
 - compromis si $x \leq 1/2 \leq y$: $x \leq \sigma(x, y) \leq y$ (et l'inégalité contraire si $y \leq 1/2 \leq x$)
- Dépendance d'une information supplémentaire, du contexte
- Propriétés
- Caractère plus ou moins discriminant pour la décision

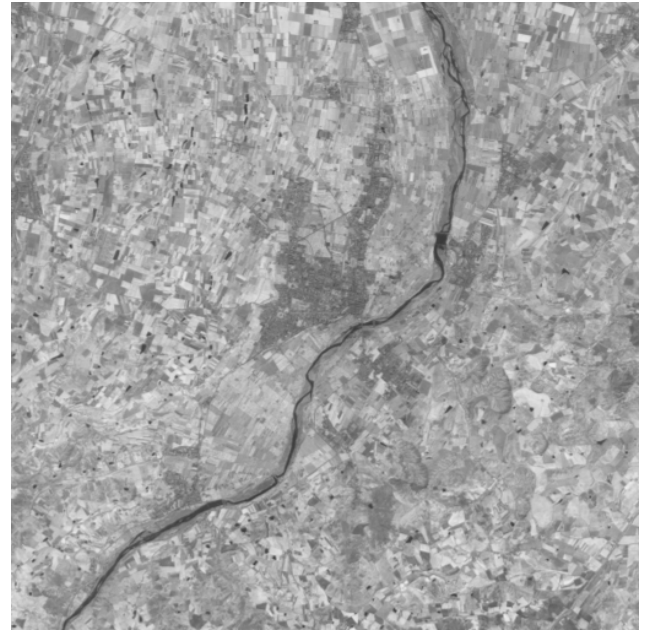
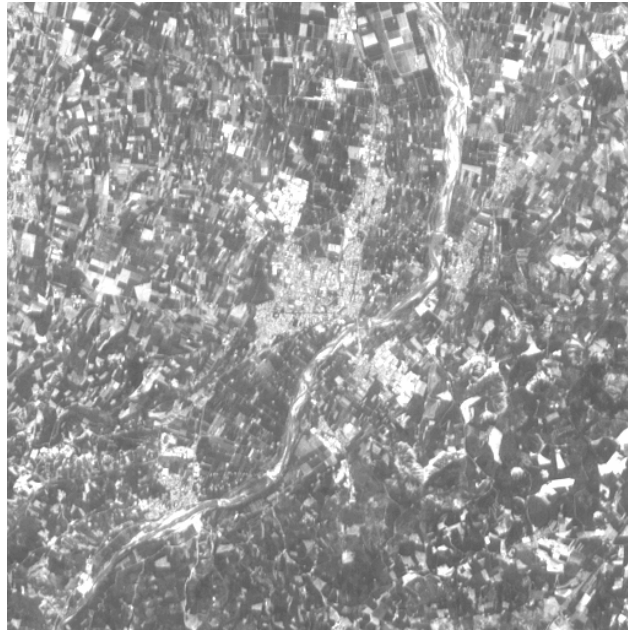
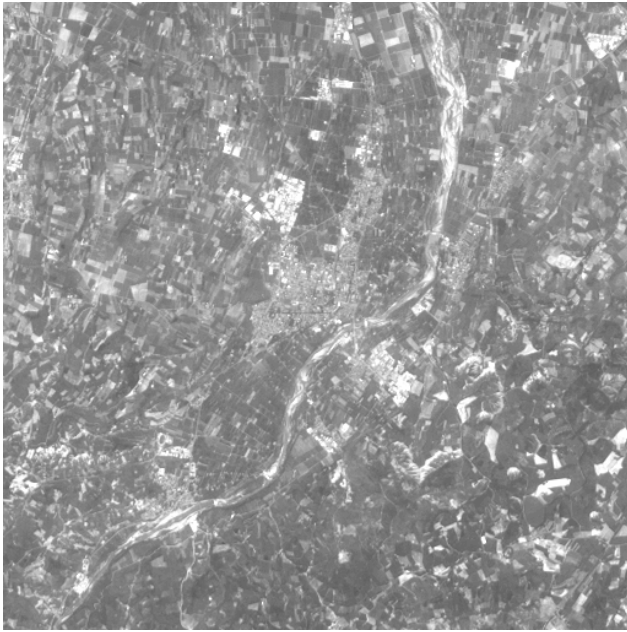
Fusion floue et possibiliste : décision

- Règle principale :

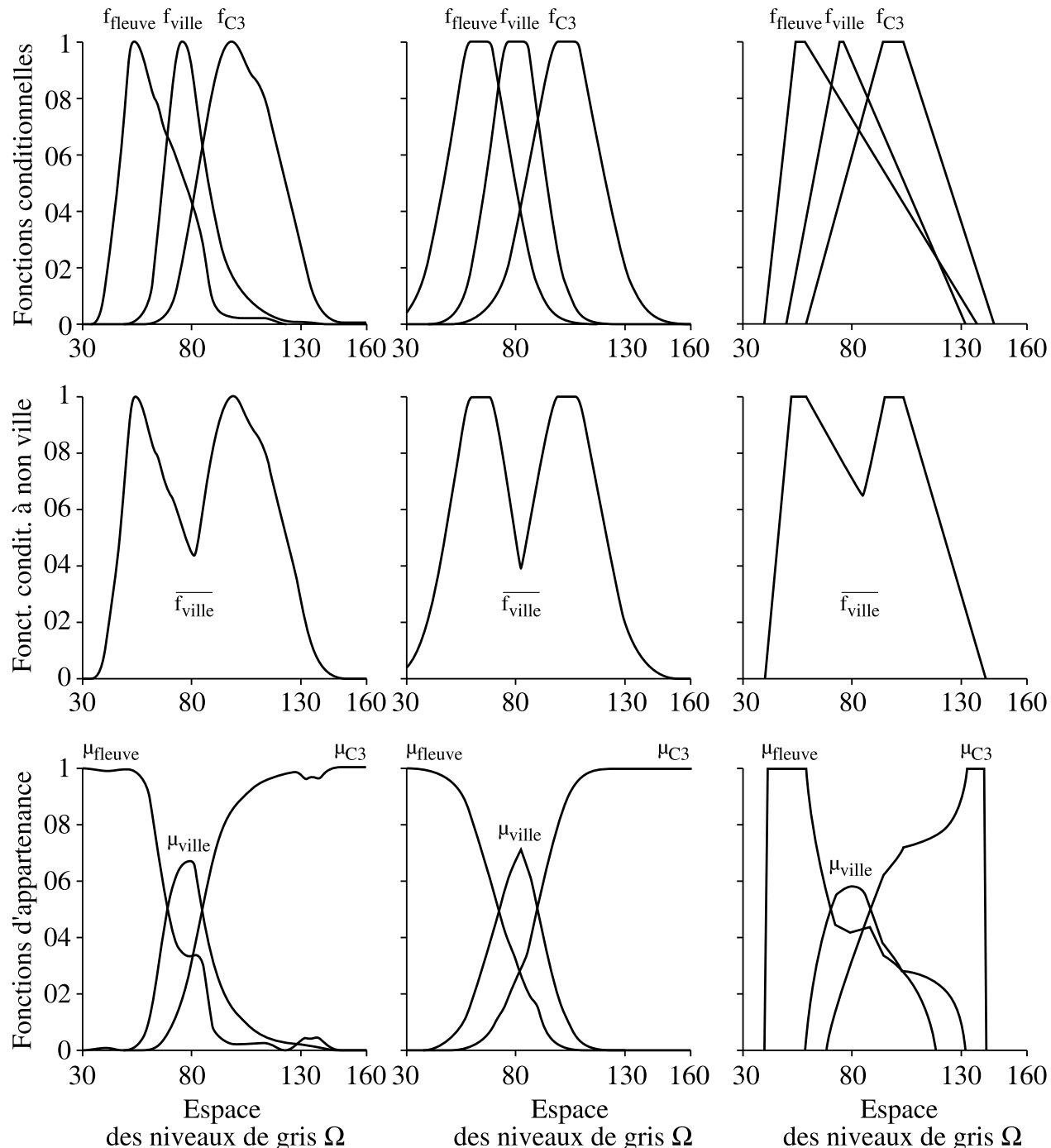
$$x \in C_i \text{ si } \mu_i(x) = \max\{\mu_k(x), 1 \leq k \leq n\}$$

- Qualité de la décision :
 - netteté de la décision : $\mu_i(x) \geq s$
 - caractère discriminant de la décision : $\mu_i(x) - \max\{\mu_k(x), k \neq i\} \geq \varepsilon$
- Classe de rejet
- Reclassification en fonction de contraintes spatiales

Exemple en imagerie satellitaire



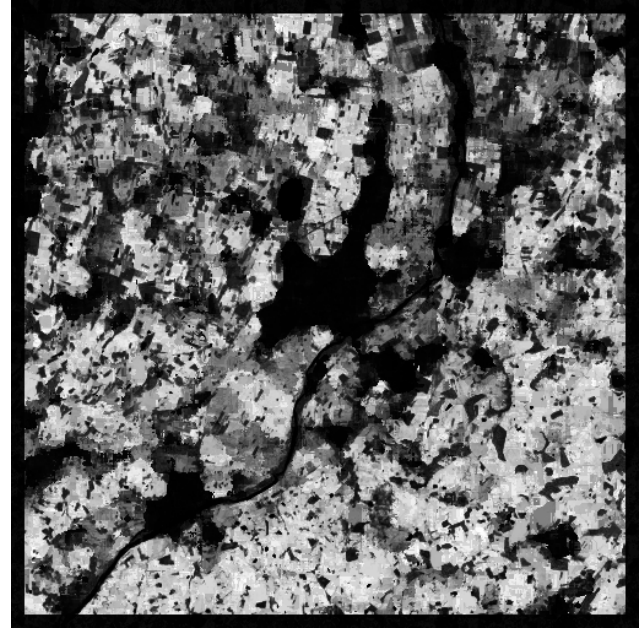
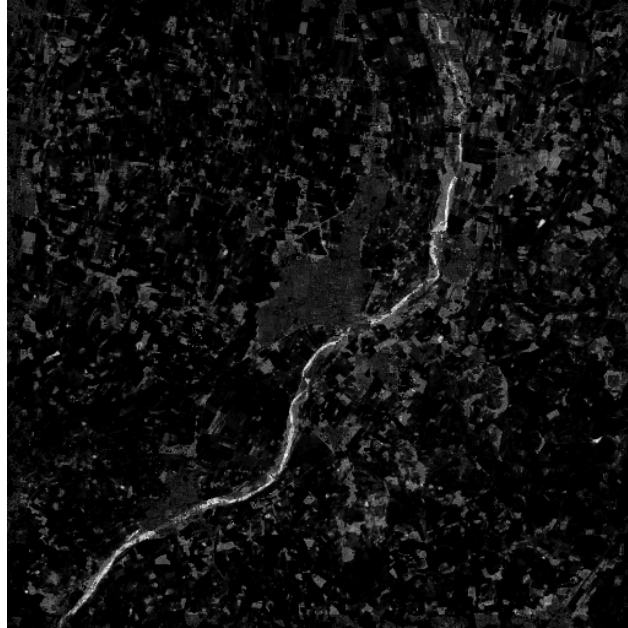
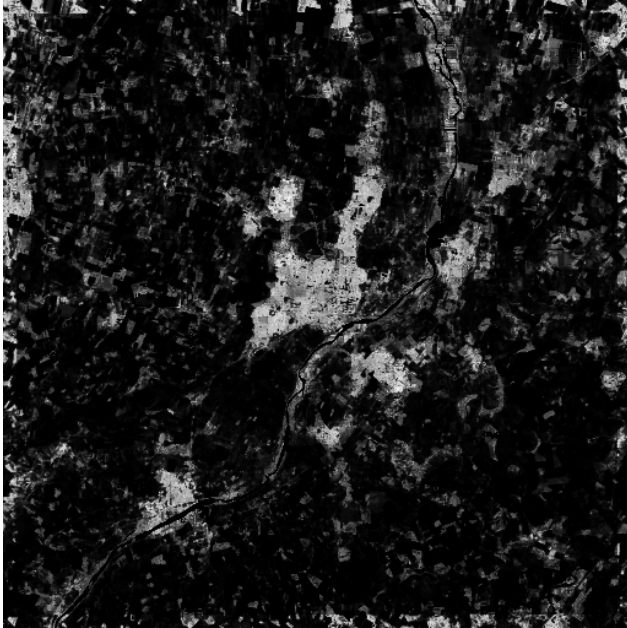
Exemple en imagerie satellitaire



Exemple en imagerie satellitaire

Opérateur adaptatif : $t^{1-\gamma}T^\gamma$ avec $t = \min$ et $T = \max$

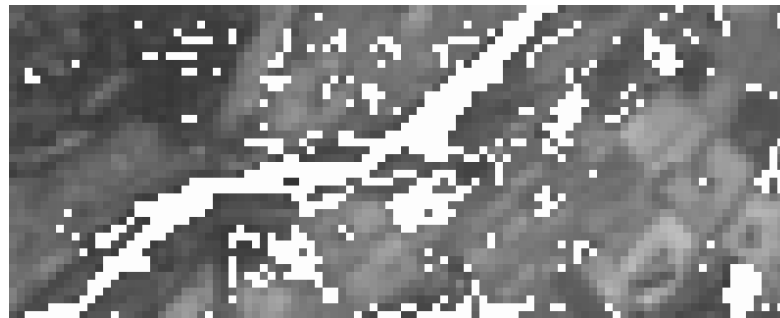
$\gamma = H^i(x)$ (conjonction normalisée des degrés d'appartenance en x) :



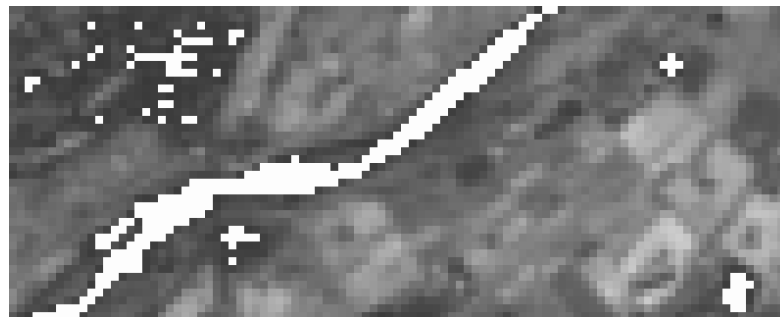
Exemple en imagerie satellitaire



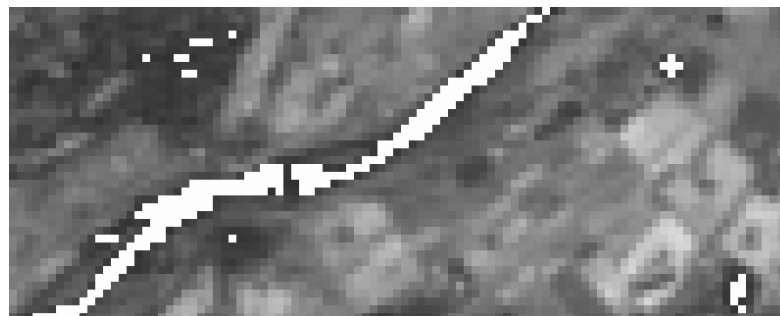
Canal 3



$H^i(x)$



Fusion par t-norme

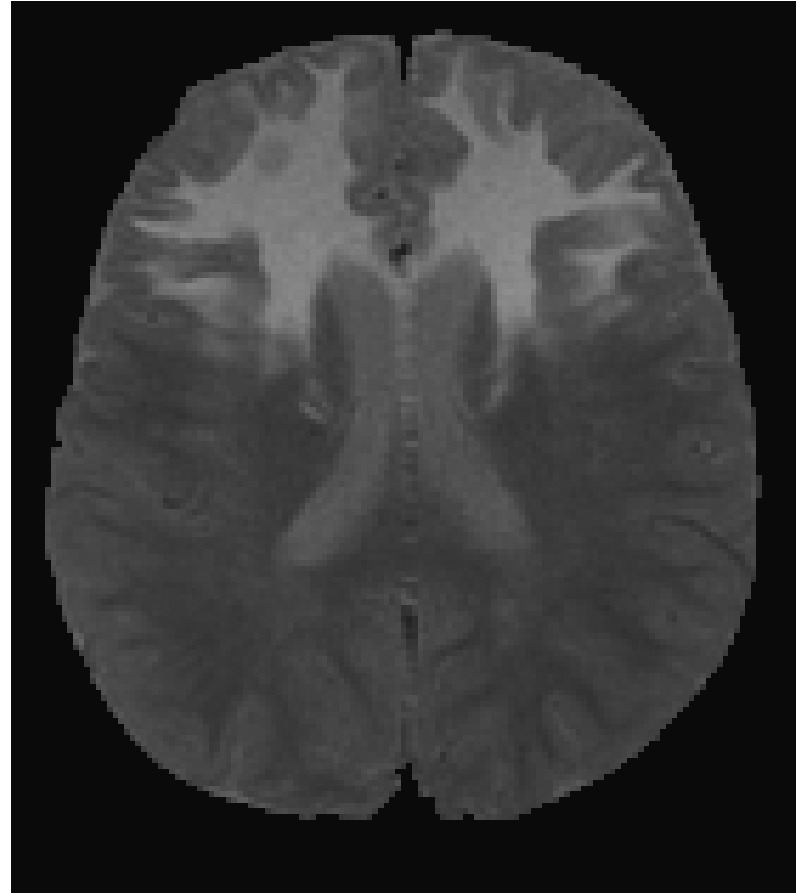


Fusion adaptative

Exemple en imagerie satellitaire



Exemple en imagerie médicale

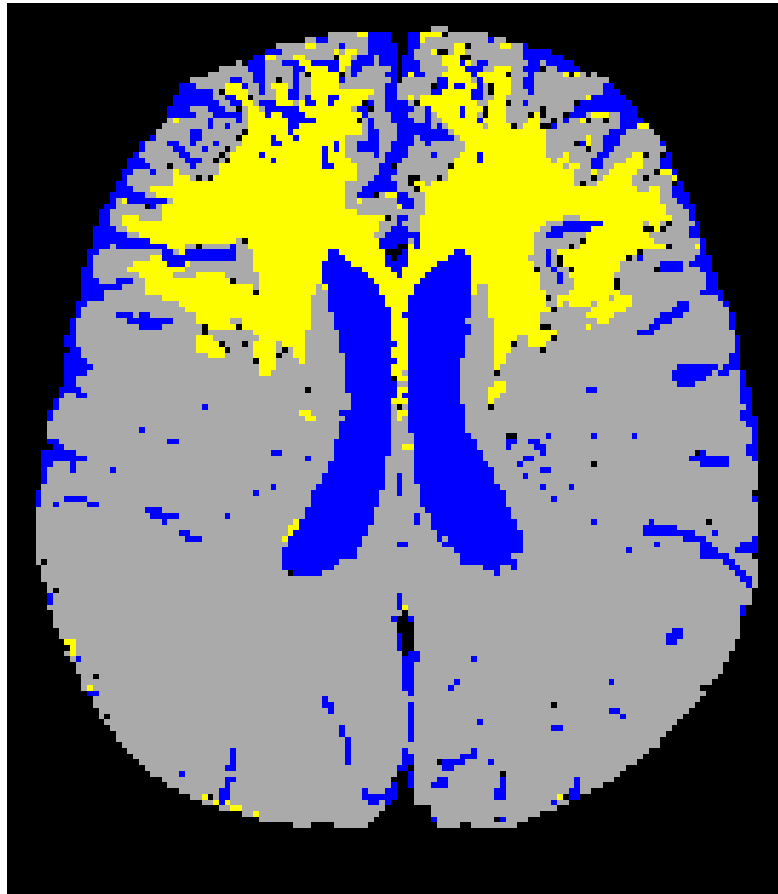


Exemple en imagerie médicale

μ_v^1 et μ_v^2 : moyenne arithmétique

μ_c^1 et μ_c^2 : moyenne arithmétique

μ_c^1 et μ_{path}^2 : somme symétrique $\frac{ab}{1-a-b+2ab}$



Introduction de l'information spatiale

- Au niveau de la modélisation

- localement :

$$M_i^j(x) = F_i[f_j(y), y \in \mathcal{V}(x)]$$

- primitives (segments, contours, régions) $\Rightarrow$ information spatiale locale est implicitement prise en compte dans la représentation
 - globalement : relations spatiales

- Au niveau de la décision

- reclassification par majorité absolue

$$x \in C_i \text{ si } |\{y \in \mathcal{V}(x), y \in C_i\}| \geq \frac{|\mathcal{V}|}{2}$$

- reclassification par règle majoritaire

$$x \in C_i \text{ si } |\{y \in \mathcal{V}(x), y \in C_i\}| = \max_k |\{y \in \mathcal{V}(x), y \in C_k\}|$$

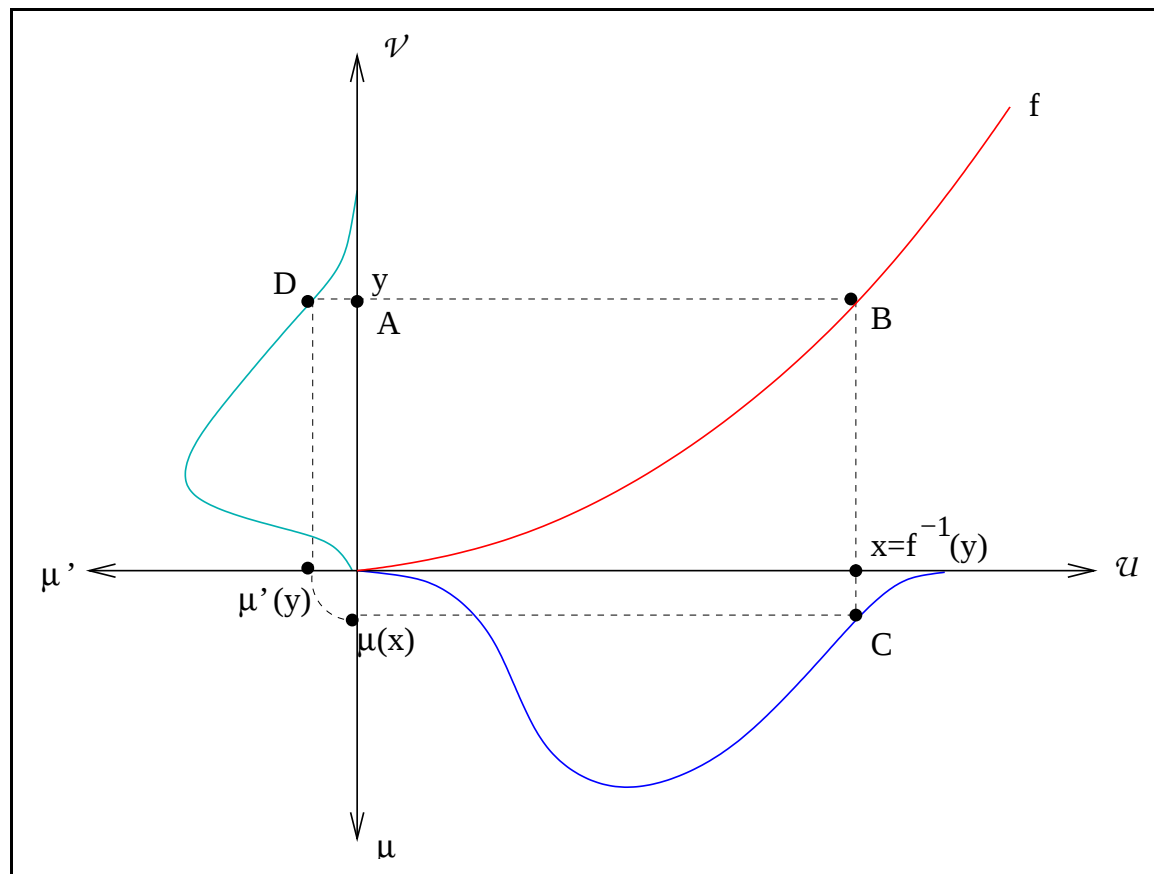
- Au niveau de la combinaison

- plus rare et plus délicate
 - information supplémentaire comme source supplémentaire

Comment étendre une opération ou relation au cas flou ?

Principe d'extension : f de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{V}$

$$\forall y \in \mathcal{V}, \mu'(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } f^{-1}(y) = \emptyset, \\ \sup_{x \in \mathcal{S} | y=f(x)} \mu(x) & \text{sinon} \end{cases}$$



Comment étendre une opération ou relation au cas flou ?

Utilisation des α -coupes :

$$R(\mu) = \int_0^1 R_B(\mu_\alpha) d\alpha$$

$$R(\mu) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \min(\alpha, R_B(\mu_\alpha))$$

$$R(\mu) = \sup_{\alpha \in [0,1]} (\alpha R_B(\mu_\alpha))$$

...

Principe d'extension fondé sur les α -coupes :

$$\forall n, R(\mu, \nu)(n) = \sup_{R_B(\mu_\alpha, \nu_\alpha) = n} \alpha$$

Comment étendre une opération ou relation au cas flou ?

Traduction formelle :

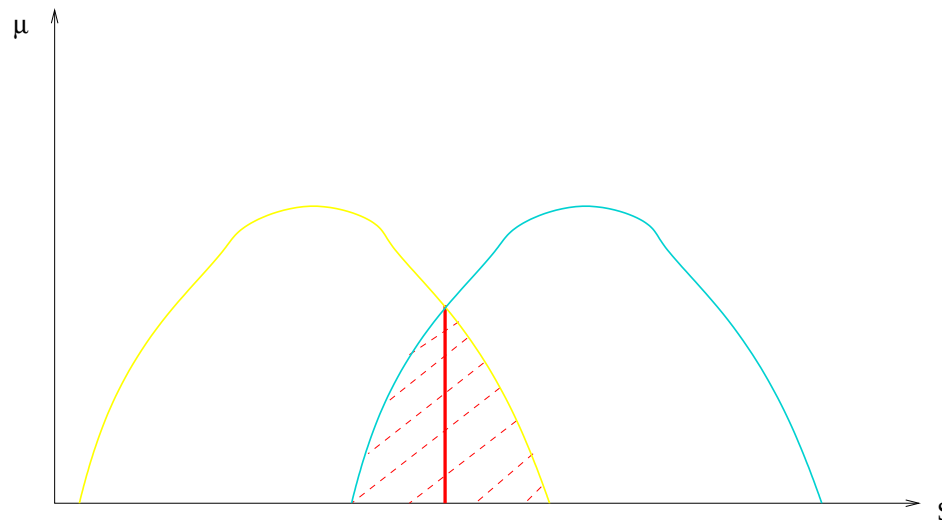
ensemble X	ensemble flou μ
complémentaire X^C	complémentation floue $c(\mu)$
intersection $\cap$	t-norme t
réunion $\cup$	t-conorme T
$\exists$	sup
$\forall$	inf

⇒ traduction aisée d'expressions algébriques et logiques

Relations ensemblistes

Ensembles flous $\Rightarrow$ une question de degré

- Degré d'intersection : $\mu_{int}(\mu, \nu) = \sup_{x \in \mathcal{S}} t[\mu(x), \nu(x)]$



ou : $\mu_{int}(\mu, \nu) = \frac{V_n[t(\mu, \nu)]}{\min[V_n(\mu), V_n(\nu)]}$

avec $V(\mu) = \sum_{x \in \mathcal{S}} \mu(x)$ (ou $V(\mu) = \int_{x \in \mathcal{S}} \mu(x) dx$)

- Degré d'inclusion :

$$\inf_{x \in \mathcal{S}} T[c(\nu(x)), \mu(x)]$$

Mesures géométriques d'objets flous

Surface ou volume : cardinal de l'ensemble flou

Périmètre :

$$p(\mu) = \int_{x \in \mathcal{S}} |\nabla \mu(x)| dx$$

Compacité :

$$c(\mu) = \frac{V(\mu)}{p(\mu)^2}$$

pour des disques flous convexes : $c(\mu) \geq \frac{1}{4\pi}$

⇒ plus faible compacité est obtenue pour des disques nets

Ou mesures géométriques **floues**

Forme floue d'une mesure M (surface, périmètre, etc.) :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^+, M(\mu)(\lambda) = \sup_{M(\mu_\alpha) = \lambda} \alpha$$

Morphologie mathématique floue

- Dilatation (degré d'intersection) :

$$D_\nu(\mu)(x) = \sup\{t[\nu(y - x), \mu(y)], y \in \mathcal{S}\}$$

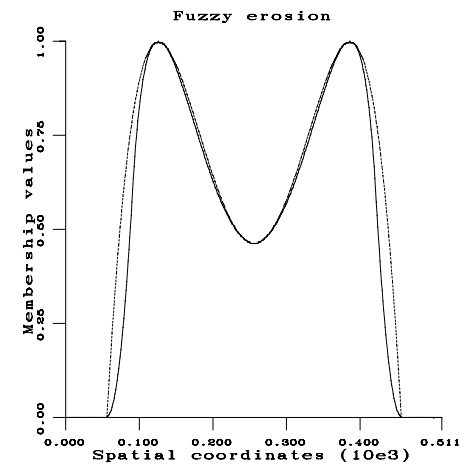
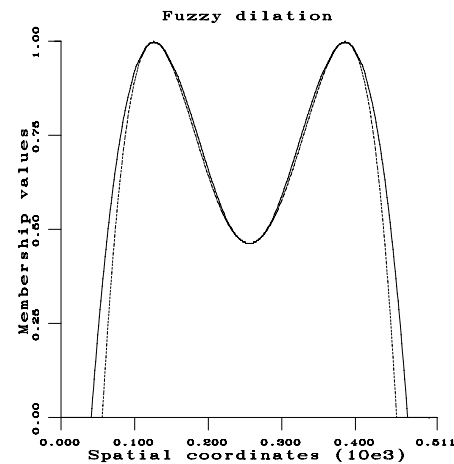
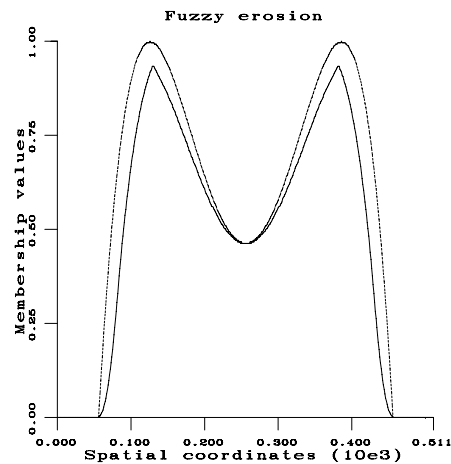
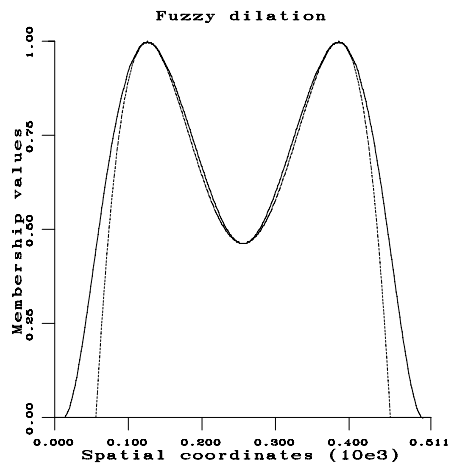
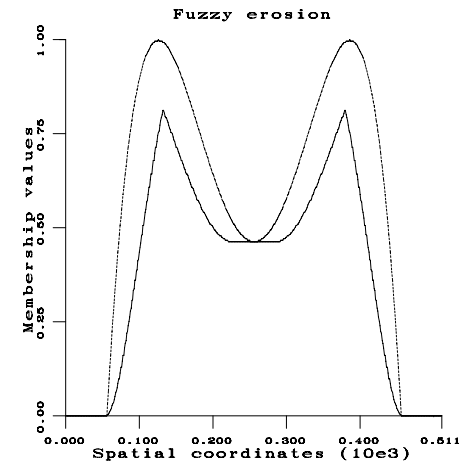
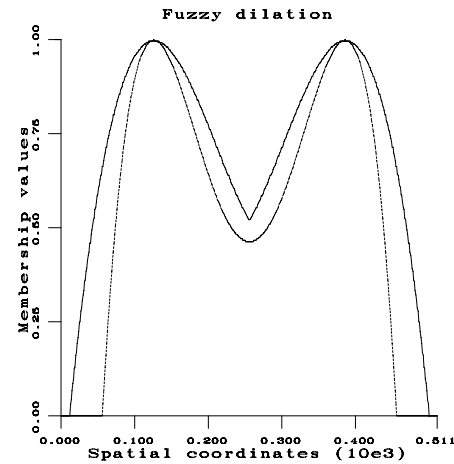
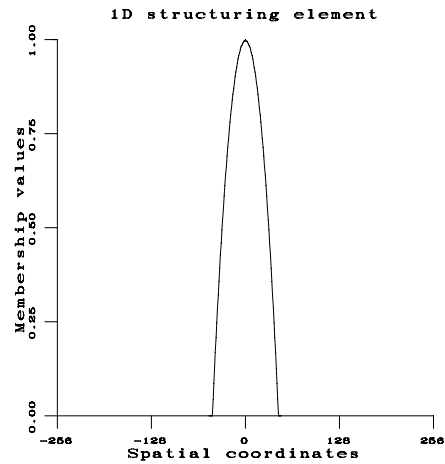
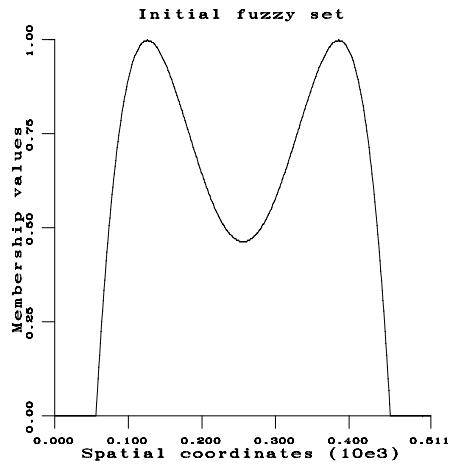
- Erosion (degré d'inclusion) :

$$E_\nu(\mu)(x) = \inf\{T[c(\nu(y - x)), \mu(y)], y \in \mathcal{S}\}$$

- Ouverture et fermeture par composition
- Propriétés similaires à celles de la morphologie classique

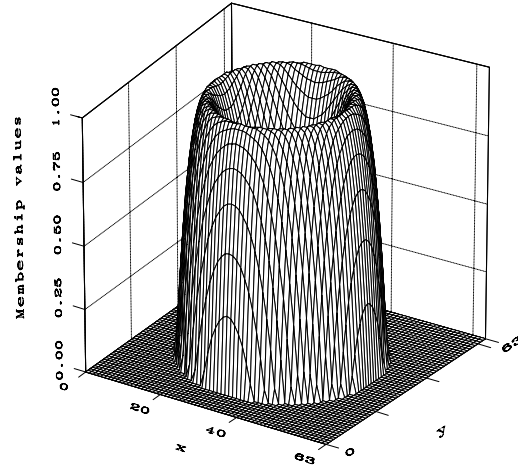
NB : il existe d'autres définitions

Exemples de dilatation et érosion floues

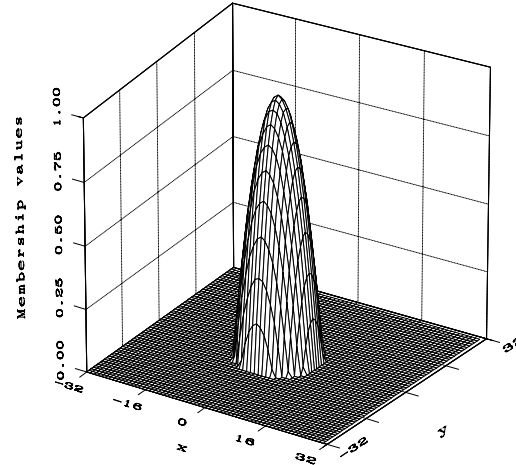


Exemples de dilatation et érosion floues

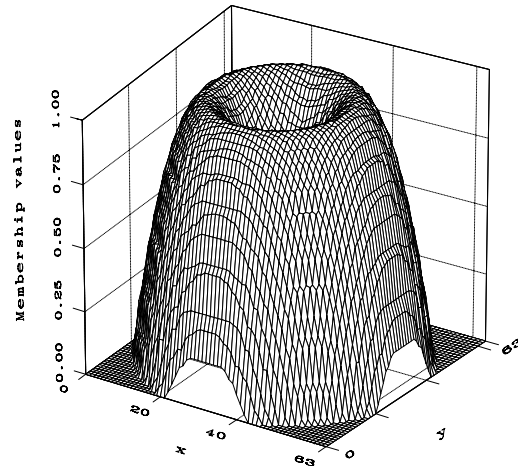
Initial 2D fuzzy set



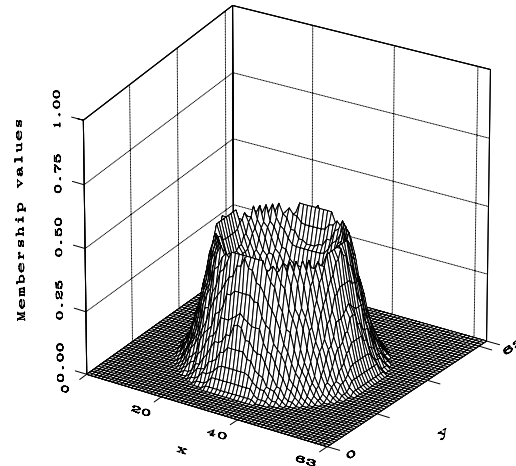
2D fuzzy structuring element



Fuzzy dilation

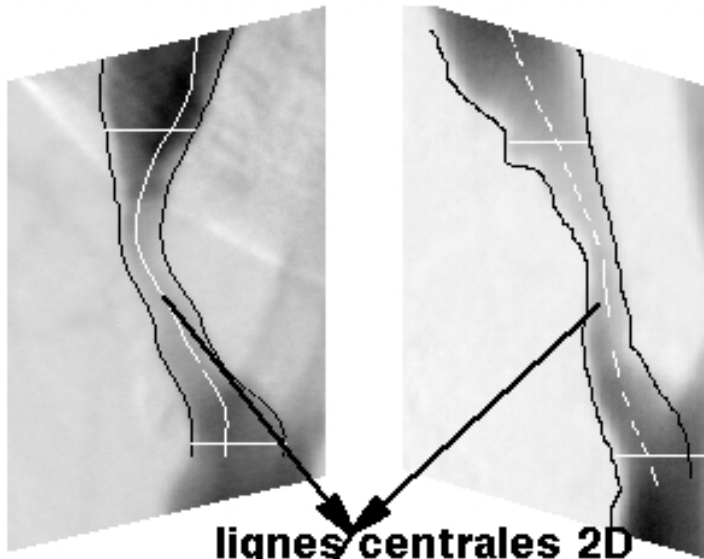


Fuzzy erosion

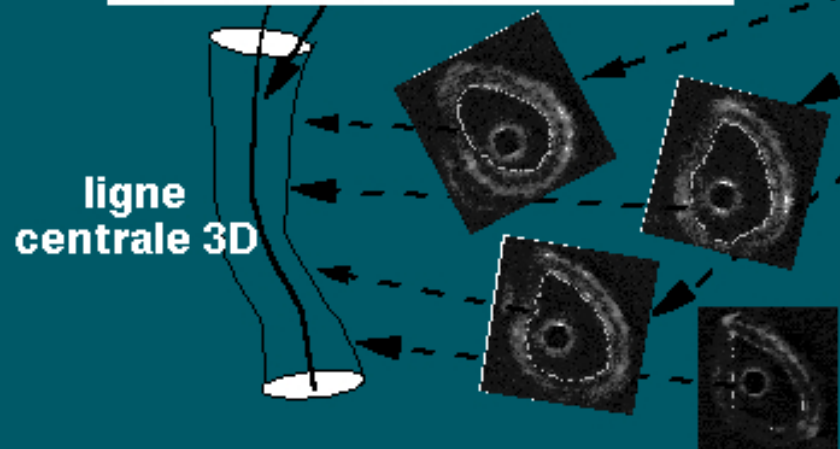


Application à la prise en compte d'imprécision en reconstruction vasculaire

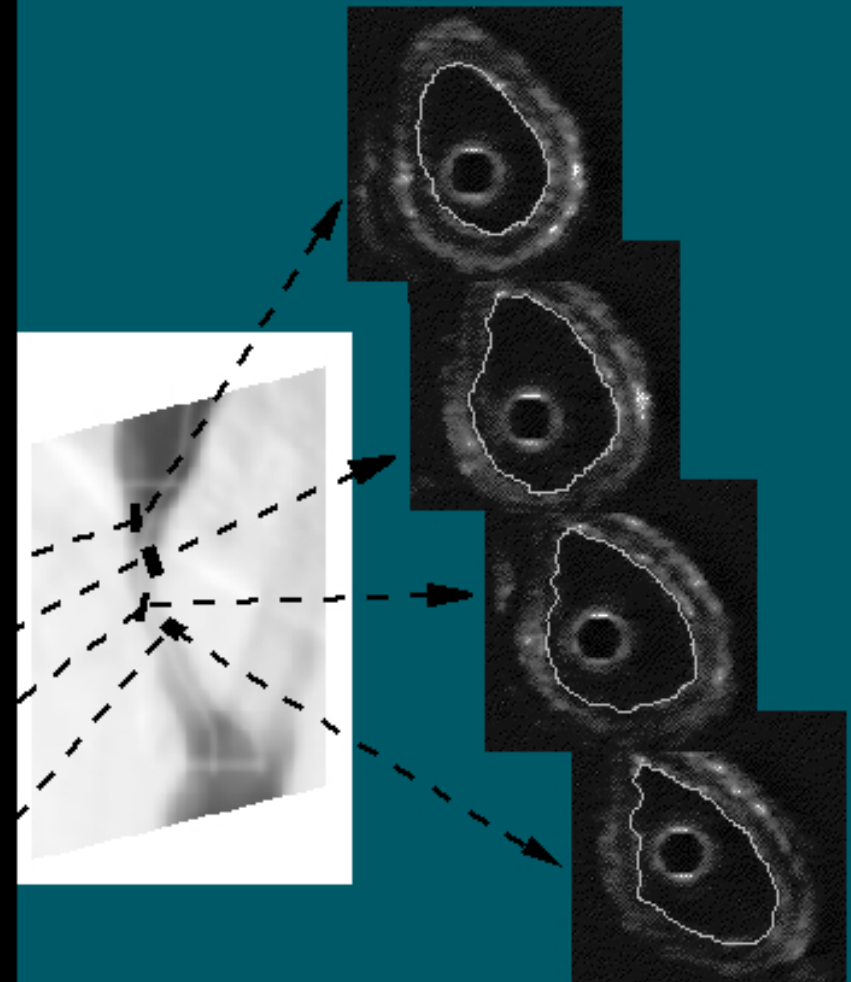
2 PROJECTIONS ANGIOGRAPHIQUES



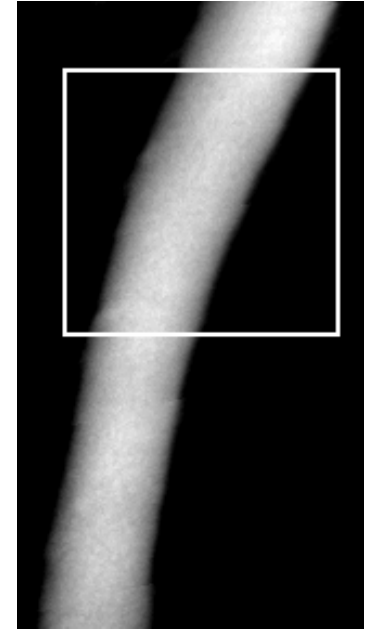
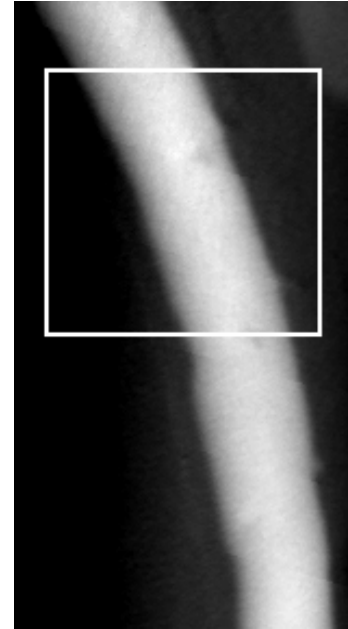
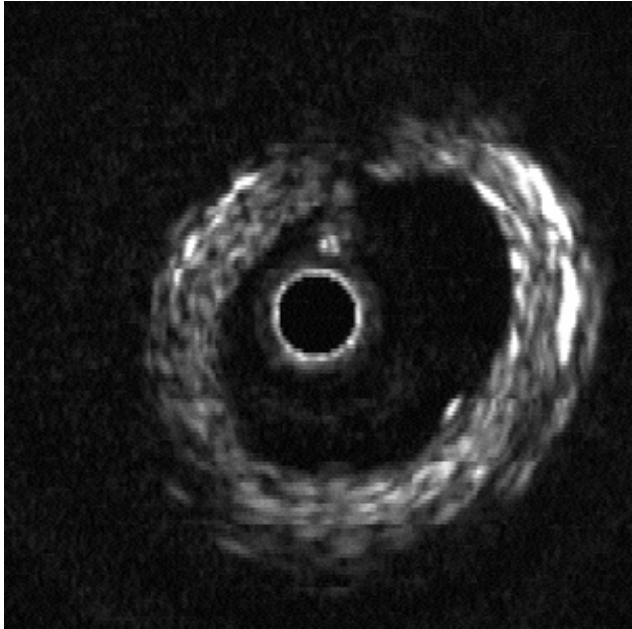
MISE EN CORRESPONDANCE



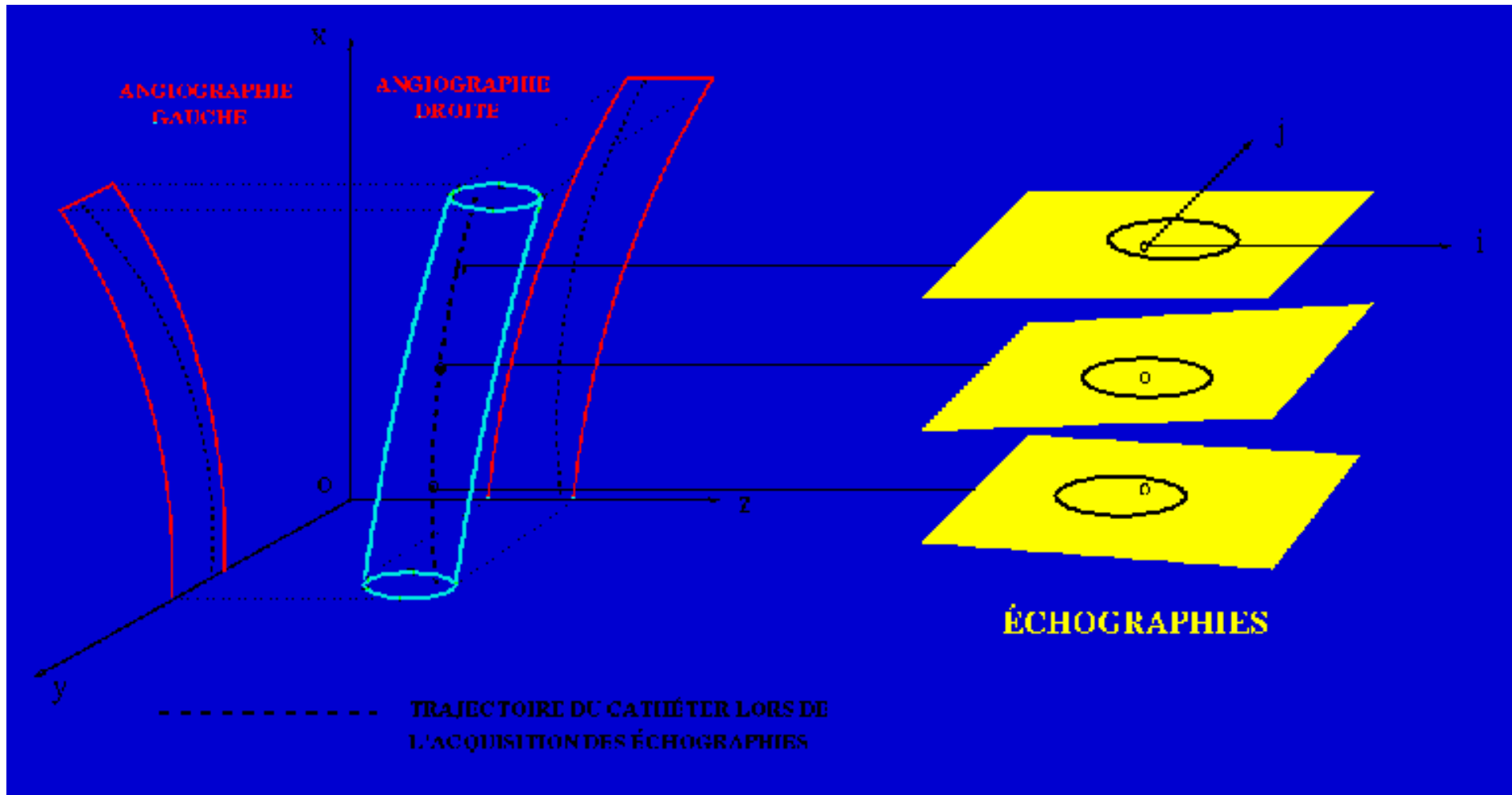
SERIE COUPES ECHOGRAPHIQUES CONTROLE RADIOSCOPIQUE



Application à la prise en compte d'imprécision en reconstruction vasculaire



Application à la prise en compte d'imprécision en reconstruction vasculaire

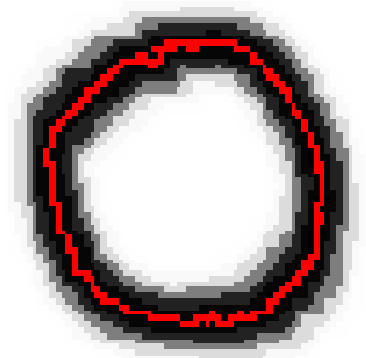
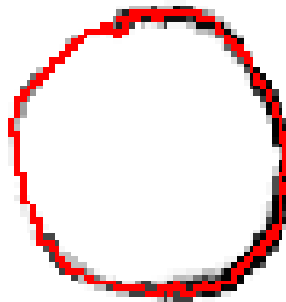
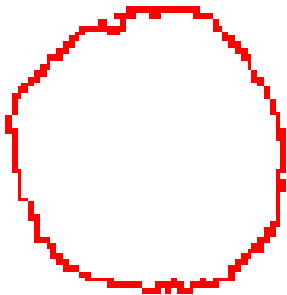


Application à la prise en compte d'imprécision en reconstruction vasculaire

Imprécisions en rotation et en translation :

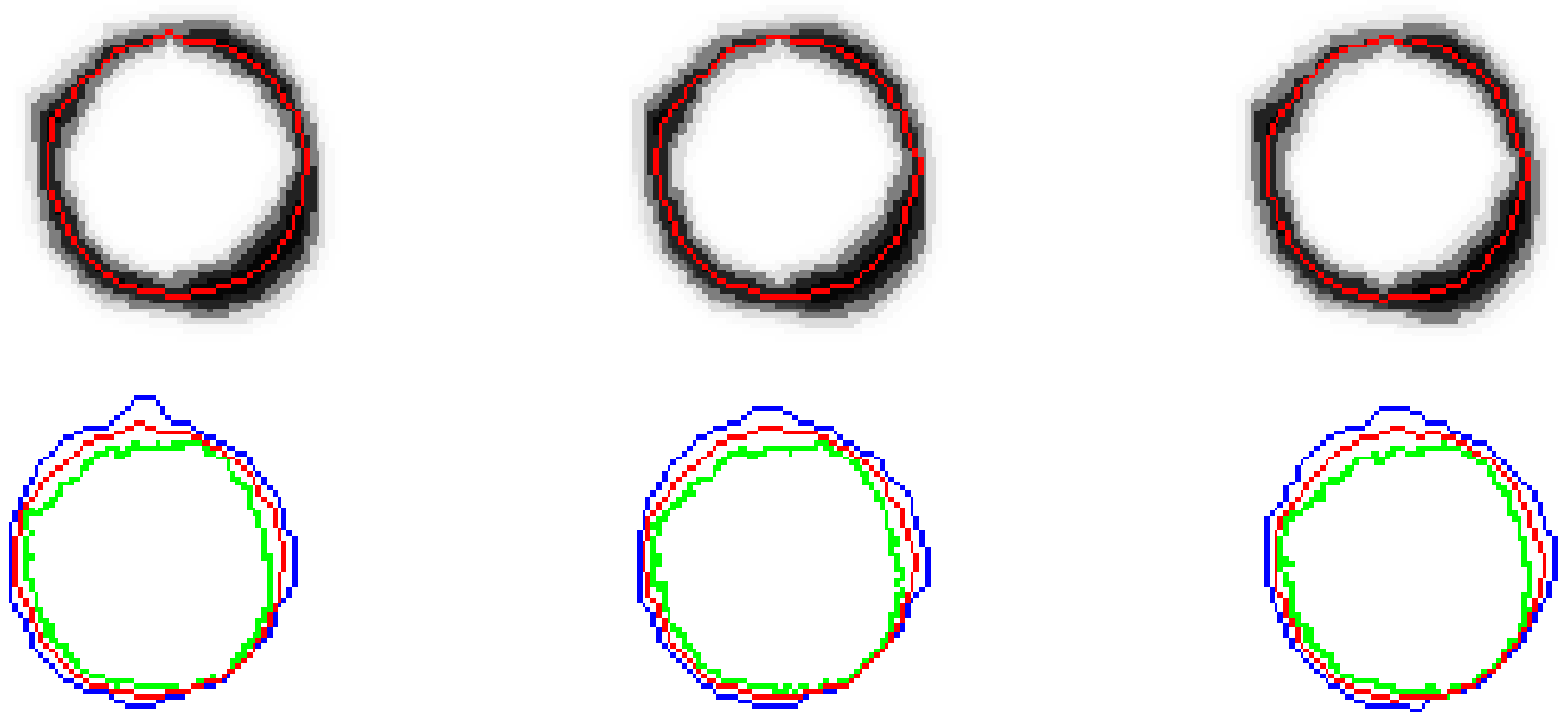
$$\mu_{V'_f}(x) = \sup\{\nu_1^y(x) \mid y \in V_{bin}\}$$

$$V_f = \bigcup \{D_{D_{\nu_2}(\nu_1^x)}(\{x\}) \mid x \in V_{bin}\} = D_{\nu_2}(V'_f)$$

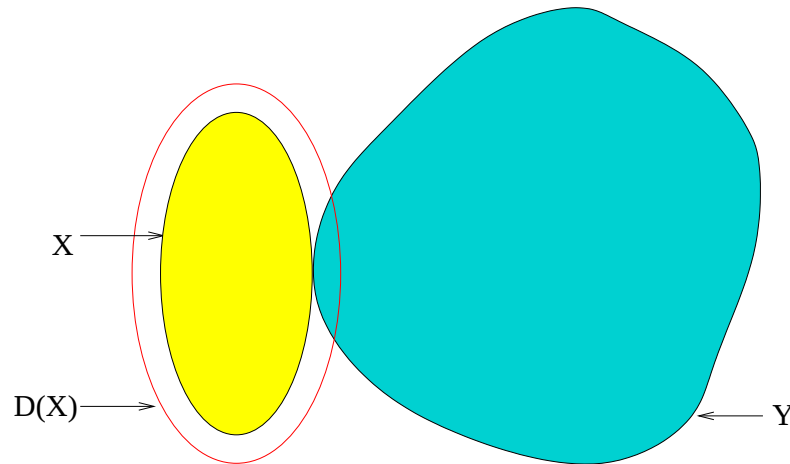


Application à la prise en compte d'imprécision en reconstruction vasculaire

Résultat après fusion et décision :



Adjacence



En termes morphologiques :

$$X \cap Y = \emptyset \text{ et } D_B(X) \cap Y \neq \emptyset, \quad D_B(Y) \cap X \neq \emptyset$$

Expression morphologique de l'adjacence floue :

$$\mu_{adj}(\mu, \nu) = t[\mu_{\neg int}(\mu, \nu), \mu_{int}[D_B(\mu), \nu], \mu_{int}[D_B(\nu), \mu]]$$

Distances entre ensembles flous

Comparaison des fonctions d'appartenance

- approche fonctionnelle : distance à partir d'une norme L_p

$$d_p(\mu, \nu) = [\sum_{x \in \mathcal{S}} |\mu(x) - \nu(x)|^p]^{1/p}$$

$$d_\infty(\mu, \nu) = \max_{x \in \mathcal{S}} |\mu(x) - \nu(x)|$$

- approche ensembliste

$$d(\mu, \nu) = 1 - \frac{\sum_{x \in \mathcal{S}} \min[\mu(x), \nu(x)]}{\sum_{x \in \mathcal{S}} \max[\mu(x), \nu(x)]}$$

- ...

- adaptées au cas où les deux ensembles flous à comparer représentent la même structure ou une structure issue d'une image et un modèle
 - reconnaissance des formes à partir d'un modèle
 - recherche d'analogies ou similarités entre cas

Distances entre ensembles flous

Prise en compte de la distance spatiale d_E

- approche géométrique
 - espace de dimension $n + 1$
 - fuzzification : $d(\mu, \nu) = \int_0^1 D(\mu_\alpha, \nu_\alpha) d\alpha$
 - pondération

$$d(\mu, \nu) = \frac{\sum_{x \in \mathcal{S}} \sum_{y \in \mathcal{S}} d_E(x, y) \min[\mu(x), \nu(y)]}{\sum_{x \in \mathcal{S}} \sum_{y \in \mathcal{S}} \min[\mu(x), \nu(y)]}$$

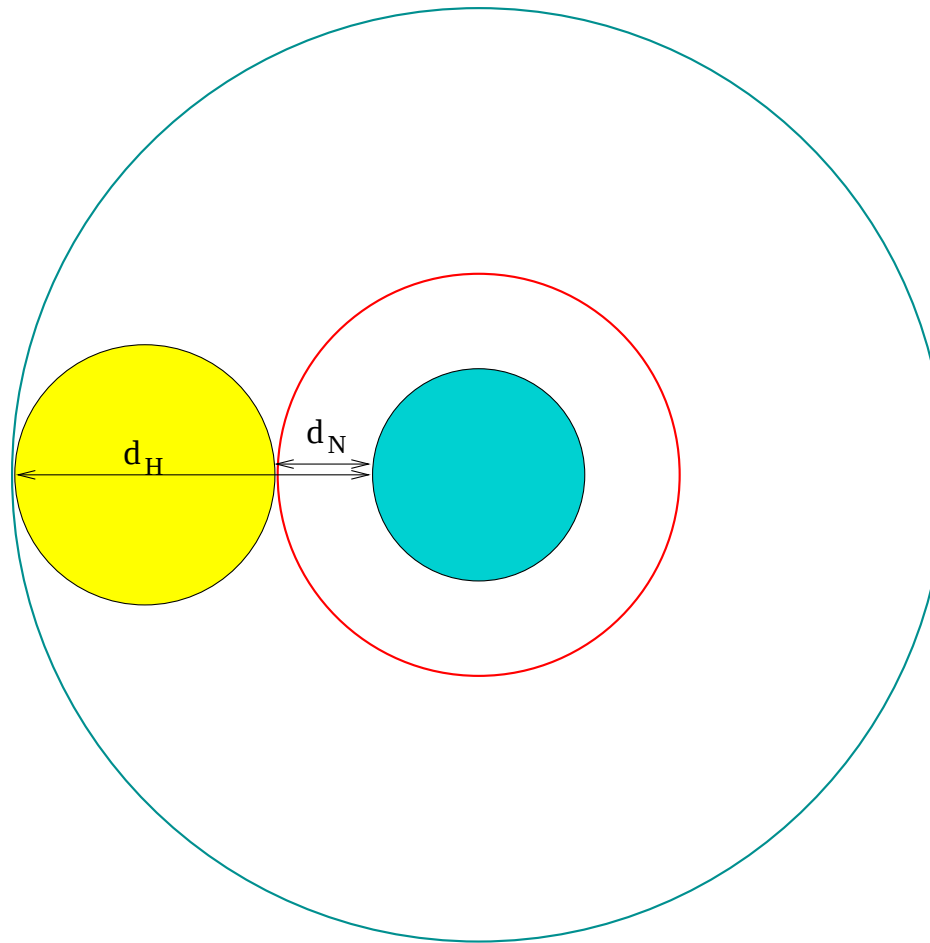
- nombre flou

$$d(\mu, \nu)(r) = \sup_{x, y, d_E(x, y) \leq r} \min[\mu(x), \nu(y)]$$

- approche morphologique

Distances entre ensembles flous : approche morphologique

Expression de distances (minimum, Hausdorff...) en termes morphologiques (i.e. algébriques) $\Rightarrow$ traduction aisée vers le cas flou



Distribution de distance minimum (point le plus proche)

$$d_N(X, Y) = \inf\{n \in \mathbb{N}, X \cap D^n(Y) \neq \emptyset\} = \inf\{n \in \mathbb{N}, Y \cap D^n(X) \neq \emptyset\}$$

Degré avec lequel la distance entre μ et μ' est inférieure à n (distribution de distance) :

$$\Delta_N(\mu, \mu')(n) = f\left[\sup_{x \in \mathcal{S}} t[\mu(x), D_\nu^n(\mu')(x)], \sup_{x \in \mathcal{S}} t[\mu'(x), D_\nu^n(\mu)(x)]\right]$$

Distance de Hausdorff : équations similaires

Densité de distance minimum (point le plus proche)

$$d_N(X, Y) = n \Leftrightarrow D^n(X) \cap Y \neq \emptyset \text{ et } D^{n-1}(X) \cap Y = \emptyset$$

$$d_N(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X \cap Y \neq \emptyset$$

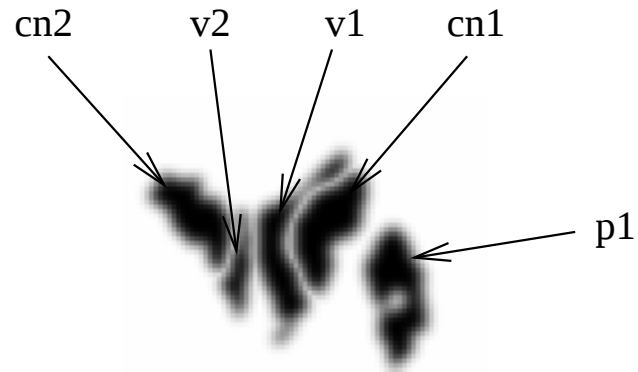
Degré avec lequel la distance entre μ et μ' est égale à n (densité de distance) :

$$\delta_N(\mu, \mu')(n) = t[\sup_{x \in \mathcal{S}} t[\mu'(x), D_\nu^n(\mu)(x)], c[\sup_{x \in \mathcal{S}} t[\mu'(x), D_\nu^{n-1}(\mu)(x)]]]$$

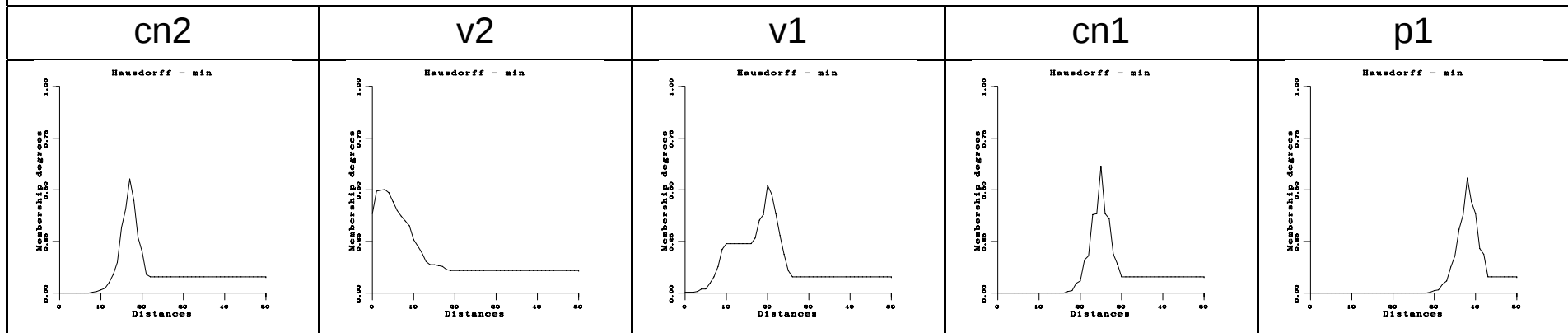
$$\delta_N(\mu, \mu')(0) = \sup_{x \in \mathcal{S}} t[\mu(x), \mu'(x)]$$

Distance de Hausdorff : équations similaires

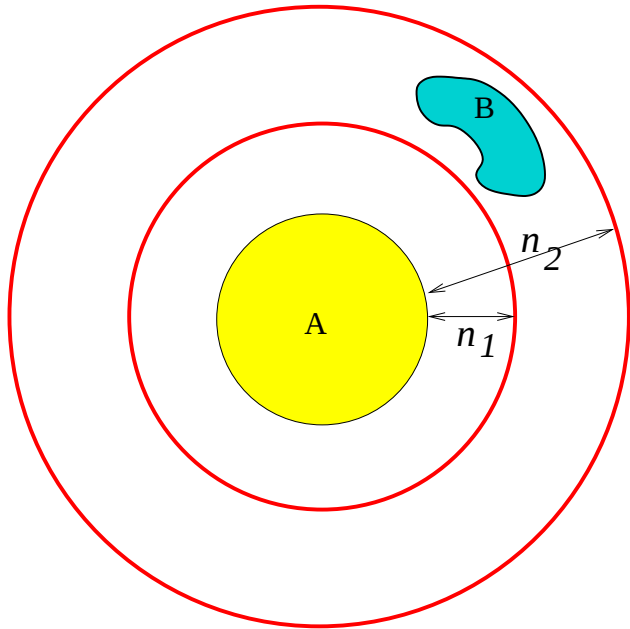
Distance floue : exemple



Distance entre un modèle de v2 et :



Représentation spatiale de connaissances sur la distance



- Cas binaire : B doit à une distance comprise entre n_1 et n_2 de $A \Rightarrow$ **région d'intérêt pour B** : $D^{n_2}(A) \setminus D^{n_1-1}(A)$
- Cas flou : distance approximative donnée par un intervalle flou $\Rightarrow$ deux éléments structurants :

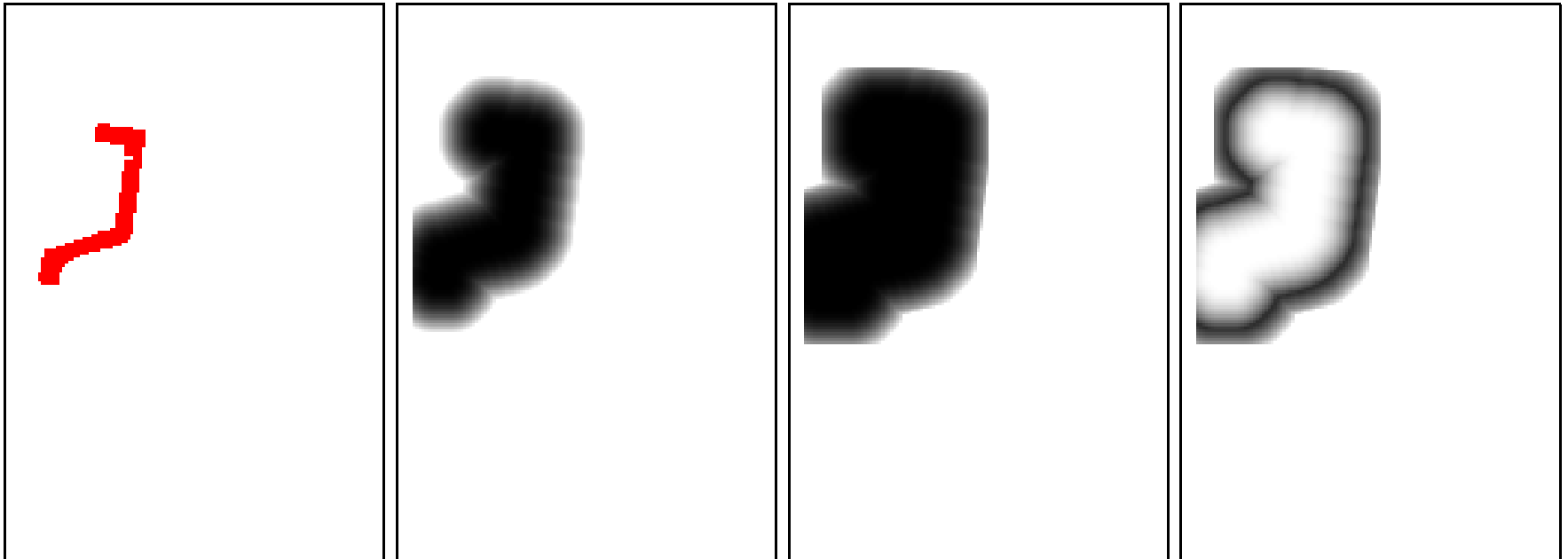
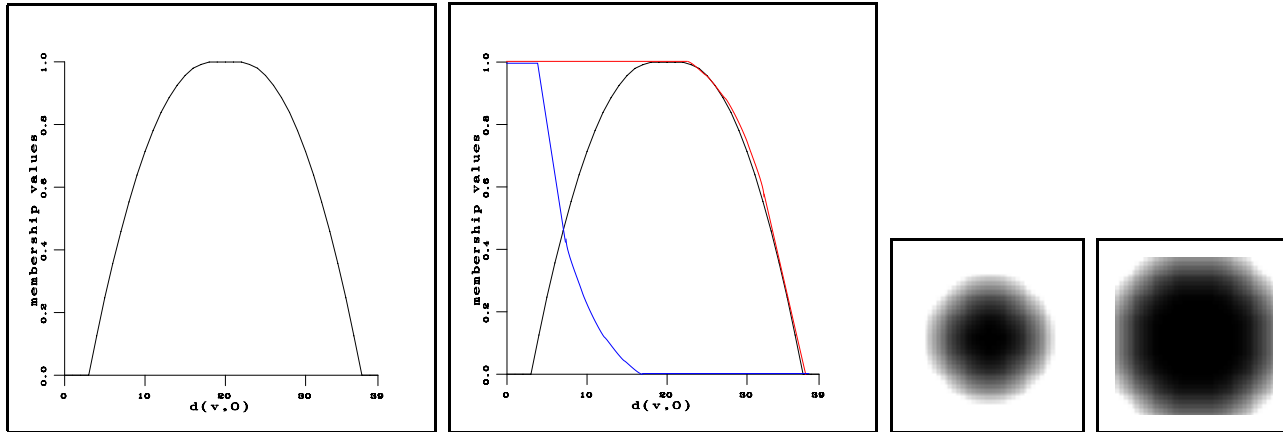
$$\nu_1(x) = 1 - \mu_n(d_E(x, 0)) \text{ si } d_E(x, 0) \leq n_1, \quad 0 \text{ sinon}$$

$$\nu_2(x) = 1 \text{ si } d_E(x, 0) \leq n_2, \quad \mu_n(d_E(x, 0)) \text{ sinon}$$

Région d'intérêt floue :

$$\mu_{distance} = t[D_{\nu_2}(\mu), 1 - D_{\nu_1}(\mu)]$$

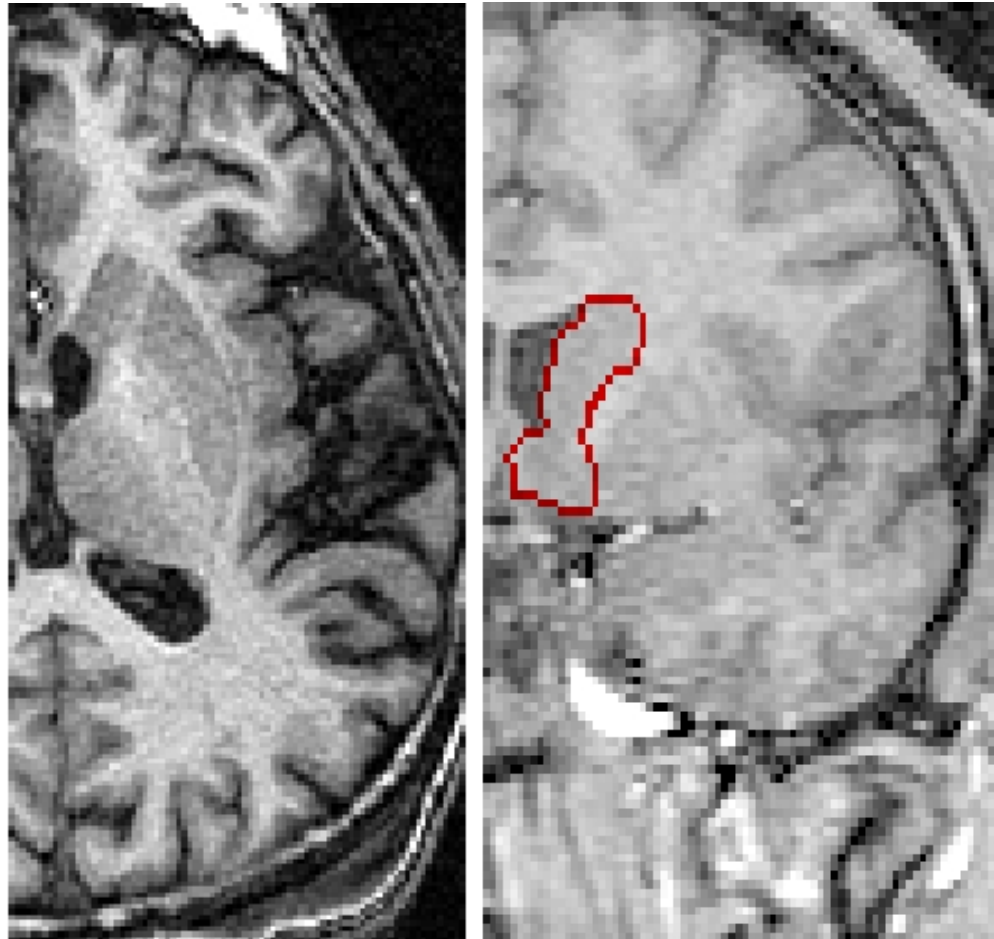
Représentation spatiale de connaissances sur la distance : exemple



Autres relations spatiales

- direction relative
 - histogramme d'angles
 - projection
 - dilatation directionnelle
- entre
- longe
- entoure
- parmi
- ...

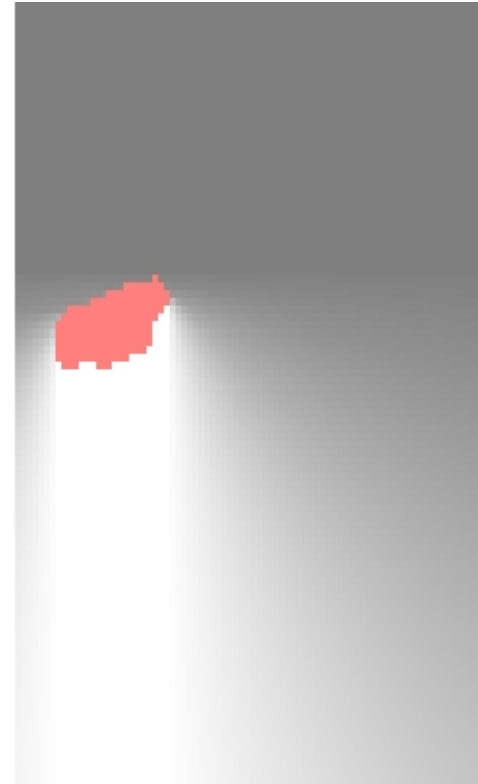
Fusion de relations spatiales pour guider la reconnaissance de structures du cerveau



Fusion de relations spatiales pour guider la reconnaissance de structures du cerveau

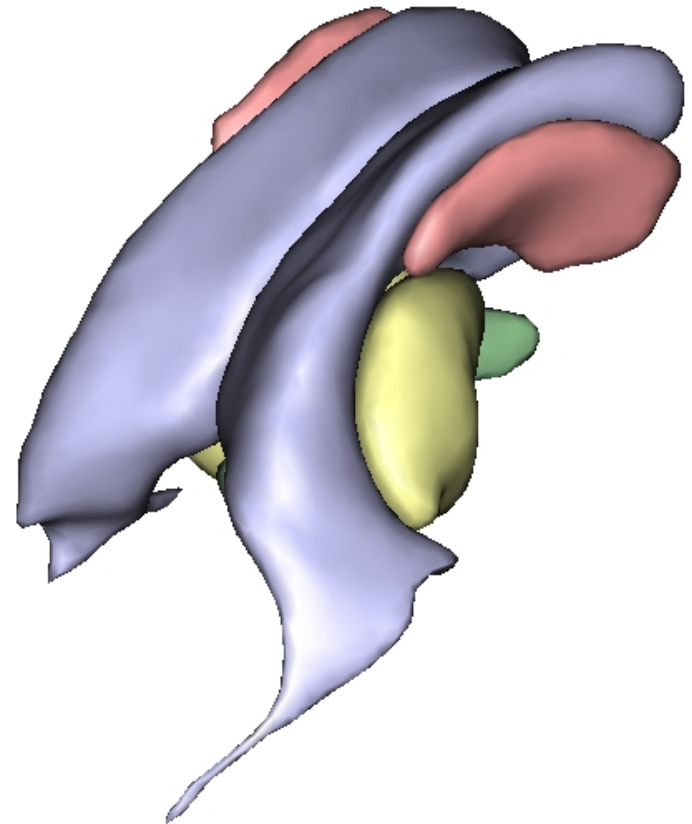


close to the lateral ventricle



below the lateral ventricle

Fusion de relations spatiales pour guider la reconnaissance de structures du cerveau



Exemples dans des cas pathologiques



Exemples dans des cas pathologiques

