Décompositions et unicité

Michaël Rao

LIRMM

20 Septembre 2007

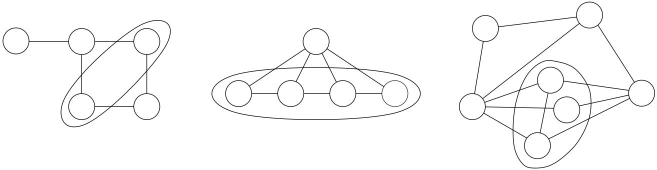
Définitions

Soit $G = (V, E)$ un graphe.

Définition (Module)

*Un **module** est un ensemble X de sommets de G tel que pour chaque sommet $x \notin X$, tous les sommets de X sont adjacents à x, ou aucun sommet de X n'est adjacent à x.*

Exemples :



Définitions

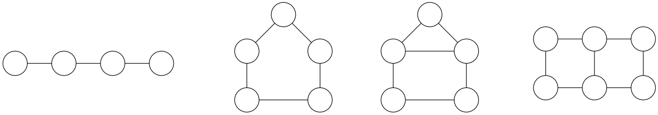
Définition (Module trivial)

*Un module X est **trivial** si $X = V$ ou $|X| = 1$.*

Définition (Graphe premier)

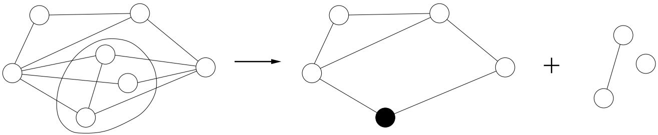
*Un graphe est **premier** si tous ses modules sont triviaux.*

Exemples :



Décomposition modulaire

Si un graphe n'est pas premier, on peut le factoriser :



La décomposition modulaire est la décomposition récursive par des modules non triviaux, jusqu'à ce que tous les graphes soient premiers.

Par cette définition, la décomposition n'est pas unique. Mais il est possible d'en définir une unique.

Les modules et la décomposition modulaire servent comme base à des algorithmes pour des problèmes (en général NP-complets) sur certaines classes de graphes “joliment” décomposables (Exemples : coloration, treewidth, max cut...).

Beaucoup de problèmes deviennent polynomiaux (voir linéaires) sur les cographes.

Ils servent également en théorie :

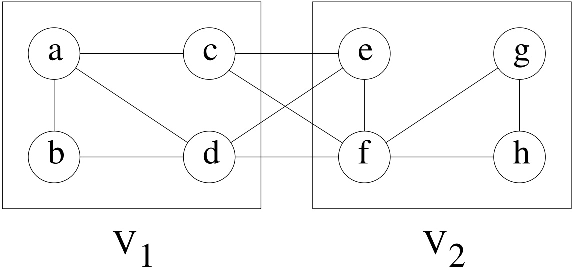
- théorème de décomposition pour certaines classes.
- pour monter qu'une classe est de clique-width borné.

La décomposition modulaire se généralise aux graphes orientés, 2-structures, k-structures...

Coupes

Définition (Coupe)

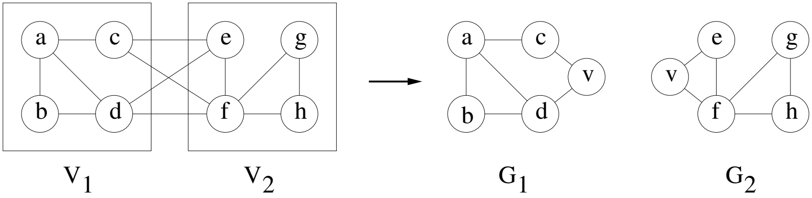
Une coupe dans un graphe $G = (V, E)$ est une partition de V en deux ensembles V_1 et V_2 tel que $|V_1| \geq 1$, $|V_2| \geq 1$, et tous les sommets dans V_1 avec un voisin dans V_2 ont le même voisinage dans V_2.



Une coupe est *triviale* si $|V_1| = 1$ ou $|V_2| = 1$.

Un graphe est *premier par rapport à la décomposition en coupes* si toutes ses coupes sont triviales.

Si un graphe n'est pas premier, alors on peut le décomposer :



Bi-joint

Définition (Bi-joint)

*Un **bi-joint** dans un graphe est une bi-partition $\{V_1, V_2\}$ de V telle qu'il existe $W_1 \subseteq V_1$ et $W_2 \subseteq V_2$ avec*

- *tous les sommets de W_1 sont adjacents avec les sommets de W_2,*
- *tous les sommets de $V_1 \setminus W_1$ sont adjacents avec les sommets de $V_2 \setminus W_2$,*
- *il n'y a pas d'autres arêtes entre V_1 et V_2.*

Bi-joint : Exemple

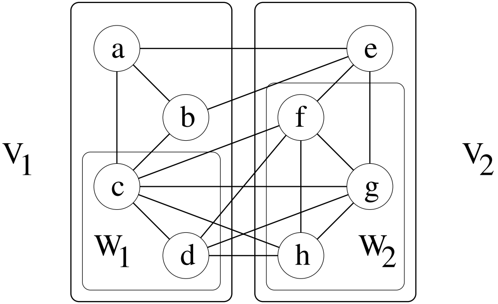
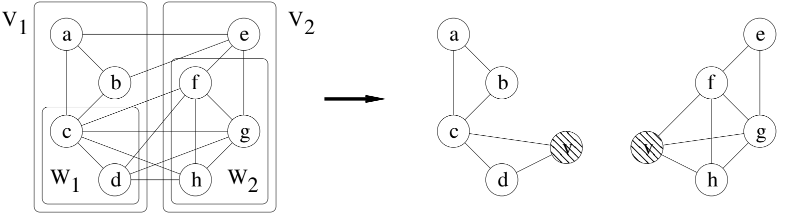


Fig.: *Un bi-joint* $\{V_1, V_2\}$ *dans un graphe.*

Décomposition “simple” associée :



- Comment définir une décomposition modulaire / en coupes / bi-joint unique ?

Familles partitives

Définition (Famille partitive)

*Une famille $\mathcal{F}$ de sous ensembles de V est **partitive** si :*

- $V \in \mathcal{F}$, $\emptyset \notin \mathcal{F}$ *et pour tout* $v \in V$, $\{v\} \in \mathcal{F}$,
- *pour tout* $X, Y \in \mathcal{F}$ *tels que* X *chevauche* Y, *on a :*
  (1) $X \cup Y \in \mathcal{F}$,
  (2) $X \cap Y \in \mathcal{F}$,
  (3) $X \setminus Y \in \mathcal{F}$,
  (4) $Y \setminus X \in \mathcal{F}$,
  (5) et $X \Delta Y \in \mathcal{F}$.

La famille est **faiblement partitive** si toutes les conditions sont respectés sauf la (5).

Familles bi-partitives

Définition (Famille bi-partitive)

Une famille $\mathcal{F}$ de bi-partitions de V est ***bi-partitive*** *si :*

- $\{V, \emptyset\} \notin \mathcal{F}$ *et pour tout* $v \in V$, $\{\{v\}, V \setminus \{v\}\} \in \mathcal{F}$,
- *pour tout* $\{X_1, X_2\}, \{Y_1, Y_2\} \in \mathcal{F}$ *tels que* $\{X_1, X_2\}$ *chevauche* $\{Y_1, Y_2\}$, *on a :*
  (1) $\{X_1 \cap Y_1, X_2 \cup Y_2\} \in \mathcal{F}$,
  (2) $\{X_1 \cap Y_2, X_2 \cup Y_1\} \in \mathcal{F}$,
  (3) $\{X_2 \cap Y_1, X_1 \cup Y_2\} \in \mathcal{F}$,
  (4) $\{X_2 \cap Y_2, X_1 \cup Y_1\} \in \mathcal{F}$,
  (5) et $\{X_1 \Delta Y_1, X_1 \Delta Y_2\} \in \mathcal{F}$.

La famille est **faiblement bi-partitive** si toutes les conditions sont respectés sauf la (5).

Les familles partitives (respectivement, bi-partitive) peuvent être représentées par un arbre enraciné (non enraciné).

Un élément d'une famille (bi)-partitive est *fort* si aucun élément de la famille le chevauche.

- Les éléments forts forment une famille d'inclusion.

Les noeuds de l'arbre d'inclusion sont étiquetés *premier* ou *dégénéré*, t.q. les éléments non forts soient des unions de fils d'un noeud dégénéré.

Pour les familles faiblement (bi)-partitives, un 3eme type de noeud apparaît : *linéaire*.

Familles bi-partitives

Théorème (Chein, Habib, Maurer 81)

La famille des modules d'un graphe est une famille partitive.

Théorème (Cunningham 82)

La famille des coupes d'un graphe connexe est une famille bi-partitive.

Théorème (De Montgolfier 03)

La famille des bi-joints dans un graphe est une famille bi-partitive.

- Décomposition modulaire : arbre représentatif des modules.
- Décomposition en coupes : arbre représentatif des coupes.
- Décomposition bi-joint : arbre représentatif des bi-joints.

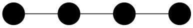
Cographes

Les graphes complètement décomposables par la décomposition modulaire sont les **cographes**.

Théorème (Corneil, Lerchs, Stewart 81 ; Sumner 73)

Les conditions suivantes sont équivalentes :

- *G est un cographe.*
- *G n'a pas de P_4 induit.*
- *G peut être obtenu par une séquence d'extension de sommets : ajout d'un vrai jumeau ou ajout d'un faux jumeau.*

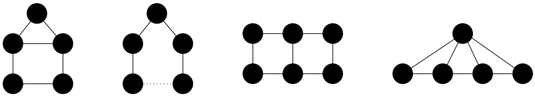
P_4 : 

Un graphe est **distance héréditaire** si tous les chemins sans cordes entre deux sommets ont la même longueur.

Théorème (Bandelt, Mulder 84 ; Hammer, Maffray 90)

Les conditions suivantes sont équivalentes :

- *G est complètement décomposable par la décomposition en coupes,*
- *G est un graphe distance héréditaire,*
- *G n'a pas de maison, trou, domino et gem induit,*

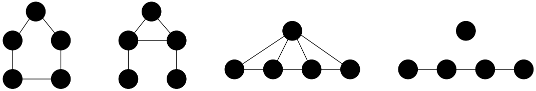


- *G peut être obtenu par une séquence d'extension de sommets : ajout d'un vrai/faux jumeau ou ajout d'un sommet pendant.*

Théorème (De Montgolfier, Rao 05)

Les conditions suivantes sont équivalentes

- *G est complètement décomposable par la décomposition bi-joint ;*
- *G est sans C_5, taureau, gem et co-gem induit ;*



- *G peut être obtenu par une séquence d'extension de sommets : ajout d'un vrai/faux jumeau ou ajout d'un vrai/faux anti-jumeau.*

Récapitulatif

Sur les graphes non orientés :

Décomposition	Unicité	Algorithme	Complètement décomp.
Modulaire	Oui	$O(n+m)$	Cographes (P_4-free)
Coupes	Oui	$O(n+m)$	D.H. (HHDG-free)
Co-Coupes	Oui	$O(n^2)$	Co-D.H.
Bi-joint	Oui...	$O(n+m)$	(C_5,bull,gem,co-gem)-free

Question : décomposition en co-coupes mieux qu'en $O(n^2)$?

2-Structures

Soit $\mathcal{Z}$ un ensemble. Une 2-**structure** sur $\mathcal{Z}$ est un couple (V, e), où V est l'ensemble des **sommets** et $e : V \times V \to \mathcal{Z}$ est la **fonction d'adjacence**.

Une 2-structure (V, e) est **symétrique** si $e(u, v) = e(v, u)$ pour tous $u, v \in V$.

Exemples :

- Les graphes orientés : 2-structures sur $\mathbb{Z}_2$.
- Les graphes non-orientés : 2-structures sur $\mathbb{Z}_2$ symétriques.

σ-Symétrie

Soit $\sigma : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}$ une involution (c.à.d. $\sigma(\sigma(x)) = x$ pour tout $x \in \mathcal{Z}$).
Une 2-structure (V, e) est σ-**symétrique** si $e(u, v) = \sigma(e(v, u))$ pour tout $u, v \in V$.

Une 2-structure sur $\mathcal{Z}$ peut être vue comme une 2-structure σ-symétrique sur $\mathcal{Z}^2$, avec $\sigma((x, y)) = (y, x)$.

Exemples :

- Les graphes orientés : 2-structures sur $\mathbb{Z}_2^2$ σ-symétriques avec $\sigma((x, y)) = (y, x)$.
- Les tournois : 2-structures sur $\mathbb{Z}_2$ σ-symétriques avec $\sigma(x) = 1 - x$.

G-joints

On fixe un groupe Abélien $(\mathcal{Z}, +)$.

Définition (G-joint)

*Soit $G = (V, e)$ une 2 structure sur $\mathcal{Z}$. Un couple (X, Y) tel que $V = X \uplus Y$ est un $(\mathcal{Z}, +)$-**G-joint** (ou **G-joint**) si il existe $(X_i)_{i \in \mathcal{Z}}$ et $(Y_i)_{i \in \mathcal{Z}}$ tels que :*

- $X = \biguplus_{i \in \mathcal{Z}} X_i$,
- $Y = \biguplus_{i \in \mathcal{Z}} Y_i$, *et*
- $\forall u \in X_i, \forall v \in Y_j, e(i, j) = i + j$.

Proposition

Si X est un module, alors $(X, V \setminus X)$ et $(V \setminus X, X)$ sont des G-joints.

Bi-partitivité

Soit un groupe Abélien $(\mathcal{Z}, +)$ et une involution σ.

Théorème

La famille de G-joints d'une 2-structure σ-symétrique est faiblement bi-partitive.

Théorème

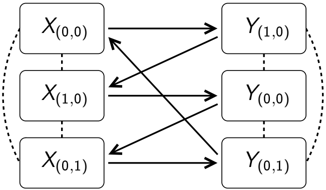
La famille de G-joints d'une 2-structure symétrique est bi-partitive.

- L'arbre représentatif des G-joints est unique.

Cas particuliers

- La décomposition bi-joint des graphes non orientés est la décomposition $(\mathbb{Z}_2,+)$-G-joint. (avec $\sigma = \left[\begin{smallmatrix}0&1\\0&1\end{smallmatrix}\right]$)
- La décomposition bi-joint des tournois est la décomposition $(\mathbb{Z}_2,+)$-G-joint. (avec $\sigma = \left[\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right]$)
- Sur les graphes orientés antisymétriques : $\sigma = \begin{bmatrix}(0,0) & (0,1) & (1,0)\\ (0,0) & (1,0) & (0,1)\end{bmatrix}$.

$+$	(0,0)	(1,0)	(0,1)
(0,0)	(0,0)	(1,0)	(0,1)
(1,0)	(1,0)	(0,1)	(0,0)
(0,1)	(0,1)	(0,0)	(1,0)



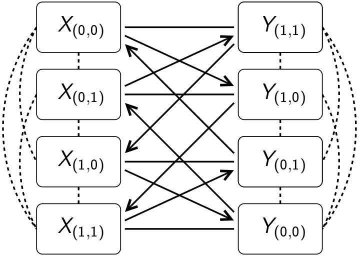
Décomposition des graphes orientés (1)

$\sigma = \begin{bmatrix} (0,0) & (0,1) & (1,0) & (1,1) \\ (0,0) & (1,0) & (0,1) & (1,1) \end{bmatrix}$.

Il y a deux groupes abéliens d'ordre 4 : $(\mathbb{Z}_2^2, +)$ et $(\mathbb{Z}_4, +)$.

Cas 1 : $(\mathcal{Z}, +) = (\mathbb{Z}_2^2, +)$.

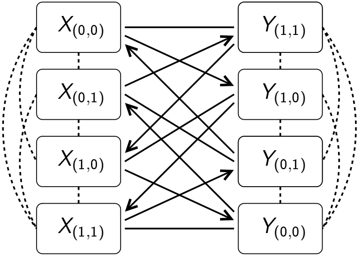
$+$	(0,0)	(1,0)	(0,1)	(1,1)
(0,0)	(0,0)	(1,0)	(0,1)	(1,1)
(1,0)	(1,0)	(0,0)	(1,1)	(0,1)
(0,1)	(0,1)	(1,1)	(0,0)	(1,0)
(1,1)	(1,1)	(0,1)	(1,0)	(0,0)



Décomposition des graphes orientés (2)

Cas 2 : $(\mathcal{Z}, +)$ isomorphe à $(\mathbb{Z}_4, +)$.

+	(0,0)	(1,0)	(0,1)	(1,1)
(0,0)	(0,0)	(1,0)	(0,1)	(1,1)
(1,0)	(1,0)	(1,1)	(0,0)	(0,1)
(0,1)	(0,1)	(0,0)	(1,1)	(1,0)
(1,1)	(1,1)	(0,1)	(1,0)	(0,0)



F-joints

On fixe un corps $(\mathcal{Z}, +, \times)$.

Définition (F-joint)

Soit $G = (V, e)$ une 2 structure sur $\mathcal{Z}$. Un couple (X, Y) tel que $V = X \uplus Y$ est un ***F-joint*** *si il existe $(X_i)_{i\in\mathcal{Z}}$ et $(Y_i)_{i\in\mathcal{Z}}$ tels que :*

- $X = \biguplus_{i\in\mathcal{Z}} X_i$,
- $Y = \biguplus_{i\in\mathcal{Z}} Y_i$, *et*
- $\forall u \in X_i, \forall v \in Y_j$, $e(i, j) = i \times j$.

Proposition

Si X est un module, alors $(X, V \setminus X)$ et $(V \setminus X, X)$ sont des F-joints.

Bi-partitivité

Soit un corps $(\mathcal{Z}, +, \times)$ et un automorphisme σ.

Théorème

La famille de F-joints d'une 2-structure σ-symétrique connexe est faiblement bi-partitive.

Théorème

La famille de F-joints d'une 2-structure symétrique connexe est bi-partitive.

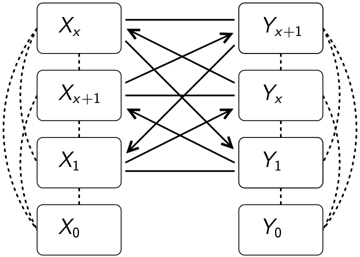
- L'arbre représentatif des F-joints est unique.

Exemples

- Sur les graphes non orientés (corps GF(2)), il s'agit exactement de la décomposition en coupes.

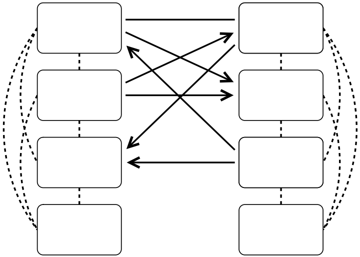
- Sur les graphes orientés (corps GF(4)) : $\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & x & x{+}1 \\ 0 & 1 & x{+}1 & x \end{bmatrix}$.

×	0	1	x	x+1
0	0	0	0	0
1	0	1	x	x+1
x	0	x	x+1	1
x+1	0	x+1	1	x



Coupes sur les graphes orientés (Cunningham 82)

Remarque : Cunningham a défini la décomposition en coupes sur les graphes orientés. La famille des coupes d'un graphe fortement connexe est une famille faiblement bi-partitive.



Les F-joints sur GF(4) forment une autre généralisation de la décomposition en coupes sur les graphes orientés.

Questions ouvertes

- Caractérisation des graphes complètement décomposables pour un groupe/corps fixé.
- Algorithmes efficaces de décomposition.

Remarque : Les graphes complètement décomposables par F-joints sur GF4 sont les graphes de rank-width orienté 1.

- Cadre plus général pour les familles (bi)-partitives
- Généralisation aux 2-structures non σ-symétriques ?
- Sur les k-structures ?

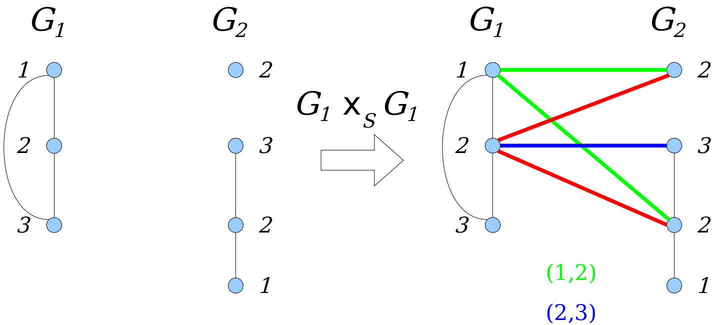
Largeur NLC [Wanke 94]

Un graphe k-**étiqueté** est un graphe où chaque sommet u a une étiquette $l(u)$ dans $\{1, \ldots, k\}$.

Soit H et G deux graphes k-étiquetés, et $i, j \in \{1, \ldots k\}$.

- $\cdot_i$ est le graphe d'un sommet étiqueté i,
- $\rho_{i \to j}(G)$ est le graphe G où tous les sommets étiquetés i sont ré-étiquetés j ,
- Soit $S \subseteq \{1, \ldots, k\}^2$. $G \times_S H$ est le graphe issu de l'union de G et H, puis ajout des arêtes $\{u, v\}$, avec $(u, v) \in V(G) \times V(H)$ et $(l(u), l(v)) \in S$.

Opération $\times_S$



S={(1,2),(2,3),(2,2)}

Largeur NLC [Wanke 94]

Une k-**expression** est une expression construite avec $\cdot$, ρ et $\times$.

Définition (Largeur NLC)

*La **largeur NLC** d'un graphe G (noté $\text{NLC-wd}(G)$) est le plus petit k tel qu'il existe une k-expression définissant G.*

- Généralise la largeur arborescente : $\text{NLC-wd}(G) \leq 3 \times 2^{\text{twd}(G)-1}$.
- Similaire à la largeur de clique : $\text{NLC-wd}(G) \leq \text{cwd}(G) \leq 2\,\text{NLC-wd}(G)$.

NLC-1

Les graphes NLC-1 sont exactement les cographes.

Les graphes NLC-2 contiennent :

- Probe Cographs.
- Bi-Cographs.
- Weak bisplits.

[Johansson 2000] donne un algorithme en $O(n^4 \log n)$ pour reconnaître les graphes NLC-2.

On présente un algorithme plus simple en $O(n^2 m)$ qui calcule une décomposition NLC-2 canonique.

Reconnaissance des NLC-2

Grandes lignes de l'algorithme

- Calculer la décomposition modulaire pour éviter les opérations ρ.
- Étape 1 : trouver une bonne coloration
- Étape 2 : calculer la décomposition canonique.

Éviter les opérations ρ

Théorème (Johansson 2000)

Si G est un graphe NLC-2 premier, alors G possède une expression NLC-2 sans opération ρ.

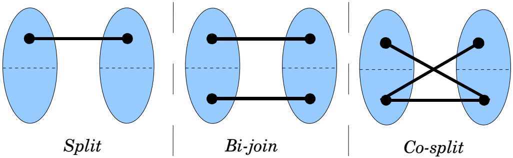
Théorème (Johansson 2000)

G est NLC-2 si et seulement si chaque graphe premier dans sa décomposition modulaire est NLC-2.

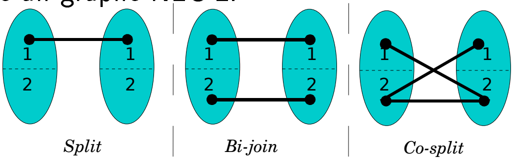
En conséquence

On travaille sur les graphes premiers.

Étape 1 : Trouver une bonne coloration



Une coupe (resp. co-coupe, bi-joint) est *bonne* si la coloration induite donne un graphe NLC-2.



Proposition

G est NLC-2 si et seulement si il a une bonne coupe, une bonne co-coupe ou bon bi-joint.

Étape 1 : Trouver une bonne coloration

Problème : il peut y avoir un nombre exponentiel de coupes.

Théorème

Si G a une bonne coupe (resp. co-coupe, bi-joint), alors G a une bonne coupe (resp. co-coupe, bi-joint) qui est forte.

Il y a $O(n)$ coupes (resp. co-coupes, bi-joints) fortes.

Étape 2 : Décomposer une graphe coloré

Soit $S \subseteq \{1,2\} \times \{1,2\}$, et $\{A, B\}$ une partition de V.

Definition

(A, B) est un S-*cut* si $G = G[A] \times_S G[B]$

Il y a deux cas :

- S est symétrique, i.e. $(1,2) \in S \iff (2,1) \in S$.
- S est non-symétrique.

Cas 1 : S est symétrique

Lemme

Il y a une unique partition P_S de V t.q. pour tout S-cut, il y a $P' \subseteq P_S$ avec $A = \cup_{W \in P'} W$ et $B = V \setminus A$.

Par exemple, si $S = \emptyset$:

- P_S est l'ensemble des composantes connexes de G.

Lemme

G est NLC-2 si et seulement si pour tout $W \in P_S$, $G[W]$ est NLC-2.

La partition P_S peut être calculée en temps linéaire.

Cas 2 : S est non symétrique

Lemme

Il y a une unique partition ordonnée P_S de V t.q. pour tout S-cut, il y a $W' \in P_S$ avec $A = \cup_{W \leq_{P_S} W'} W$ et $B = V \setminus A$.

Lemme

G est NLC-2 si et seulement si pour tout $W \in P_S$, $G[W]$ est NLC-2

La partition ordonnée P_S peut être calculée en temps linéaire (technique).

Arbre de décomposition canonique

Lemme

Si G est NLC-2, alors il y a un S t.q. $|P_S| > 1$.

Décomposition canonique

On fixe un ordre total sur $\mathcal{P}(\{1,2\} \times \{1,2\})$.
On décompose récursivement par le plus petit S t.q. $|P_S| > 1$.

La décomposition canonique d'un graphe colorié est unique.

Temps total : $O(nm)$

Reconnaissance : complexité

Algorithmes de décomposition

- Calculer la décomposition en coupes : $O(n+m)$ (Dahlhaus 2000).
- Calculer la décomposition en co-coupes : $O(n^2)$.
- Calculer la décomposition bi-joint : $O(n+m)$ (de Montgolfier, Rao 2005).

Pour chaque coupe, co-coupe, bi-joint fort (au plus $O(n)$) :

- Colorier le graphe.
- Essayer de décomposer en $O(nm)$.

Temps total : $O(n^2m)$.

Isomorphisme entre G et H.

- Fixer une bonne coupe forte dans G (ou co-coupe, bi-joint)
- Calculer la décomposition canonique T_1 de G avec les couleurs induites
- Pour chaque coupes (co-coupe ou bi-joint) forte de H :
  - Calculer la décomposition T_2 de H avec les couleurs
  - Tester l'isomorphisme entre les deux décompositions

Temps total : $O(n^2m)$.

Questions ouvertes

Représentation canonique pour :

- CWD-k, avec $k \geq 3$
- NLC-k, avec $k \geq 3$
- RWD-k, avec $k \geq 2$

Caractérisation des graphes NLC-2 par sous graphes interdits ?