

Une méthode combinatoire pour l'étude morphométrique 3D basée sur des points de repère, application à l'étude de crânes

Kevin Sol

Avec Emeric Gioan et Gérard Subsol

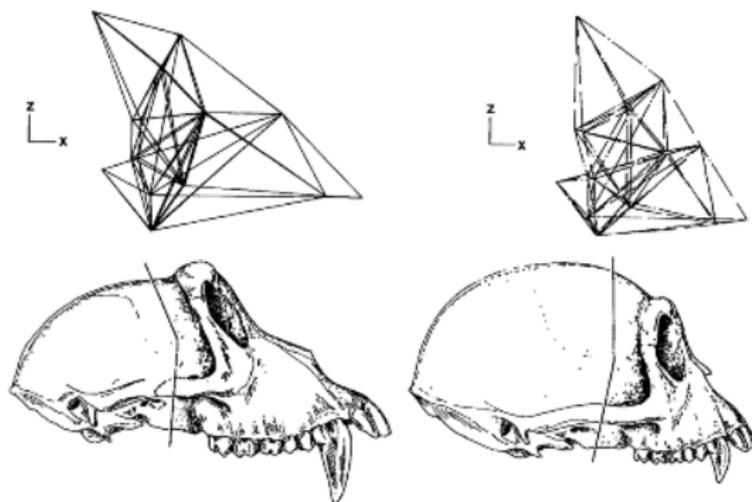
LIRMM - Montpellier
France

Séminaire AIGCo 12/09/2012



Morphométrie

Etude de la **forme 3D** de structures anatomiques. A partir des points de repère (*landmarks*) on souhaite **analyser** les formes, les **classer** et **caractériser** ces classes.



Applications :

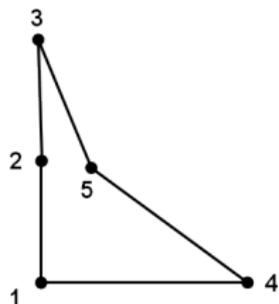
Anatomie, anthropologie, paléontologie, médecine

Morphométrie

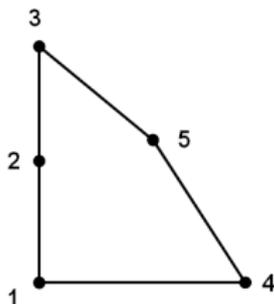
Exemple d'application de la méthode classique de morphométrie :

Morphométrie

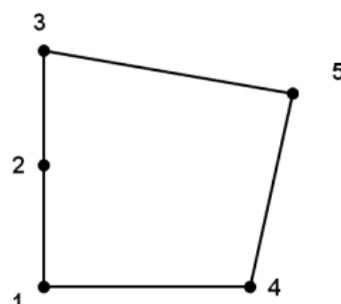
Exemple d'application de la méthode classique de morphométrie :



a



b



c

Etude en 2 temps :

- 1 Alignement et normalisation
- 2 Analyse en Composantes Principales

Morphométrie

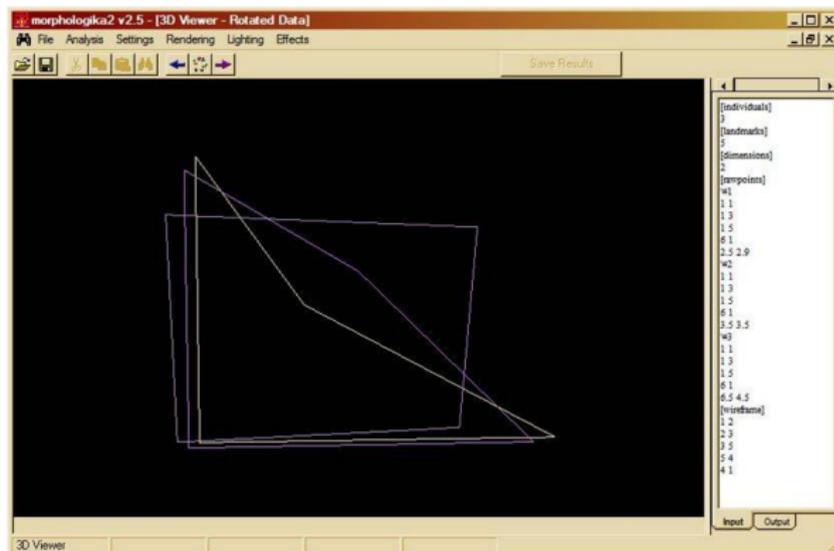
Exemple d'application de la méthode classique de morphométrie :

1 Alignement et normalisation

Alignement des
barycentres

Normalisation

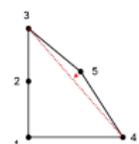
Rotation avec la
méthode des
moindres carrés



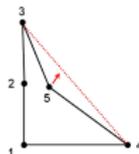
Morphométrie

Exemple d'application de la méthode classique de morphométrie :

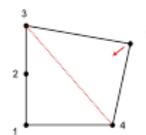
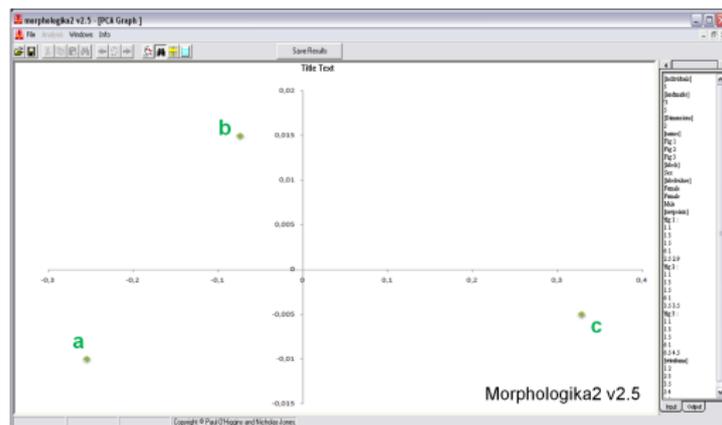
② Analyse en Composante Principale



b



a



c

On voudrait mettre en valeur les différences structurelles.

Plan

- 1 Codage combinatoire de formes
- 2 Méthodes de classification existantes
- 3 Notre méthode
- 4 Application

Plan

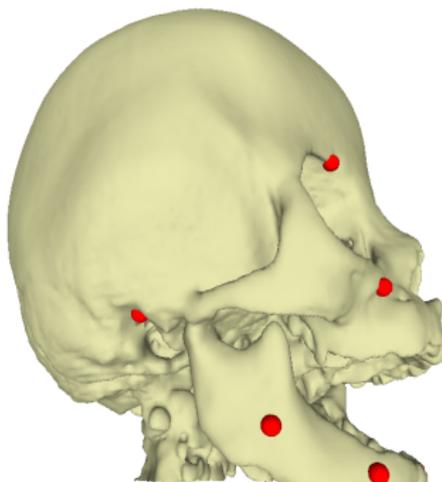
- 1 Codage combinatoire de formes
- 2 Méthodes de classification existantes
- 3 Notre méthode
- 4 Application

Notre codage

- Les experts mesurent les coordonnées des points de repère anatomiques

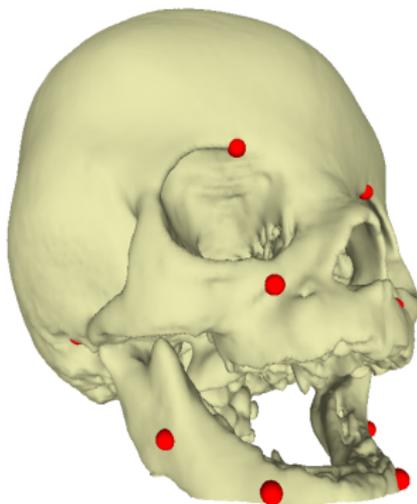
Notre codage

- Les experts mesurent les coordonnées des points de repère anatomiques



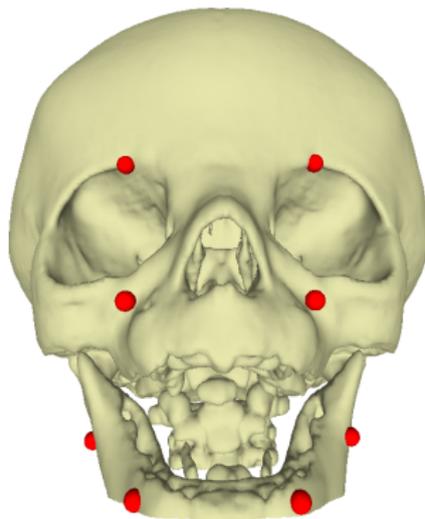
Notre codage

- Les experts mesurent les coordonnées des points de repère anatomiques



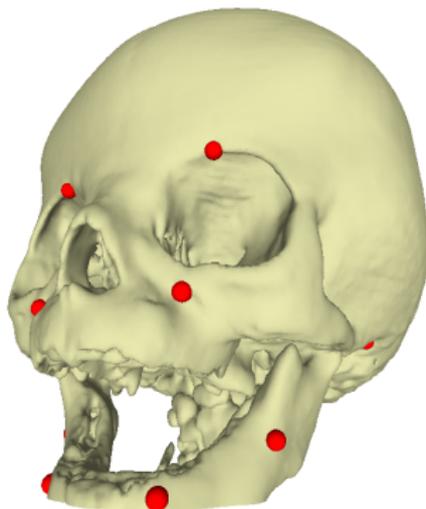
Notre codage

- Les experts mesurent les coordonnées des points de repère anatomiques



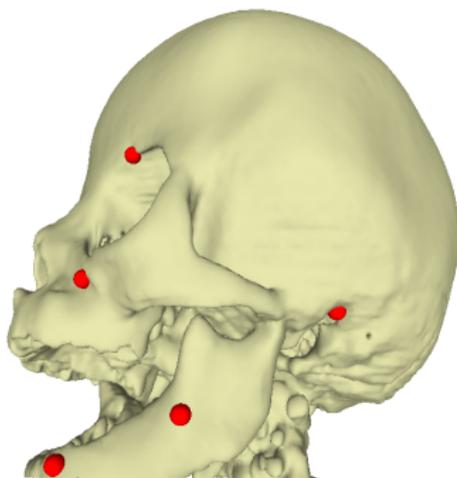
Notre codage

- Les experts mesurent les coordonnées des points de repère anatomiques



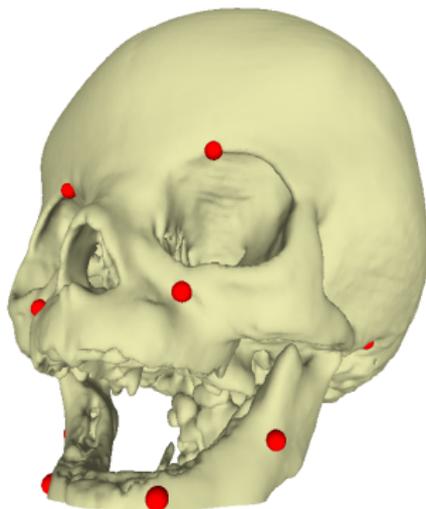
Notre codage

- Les experts mesurent les coordonnées des points de repère anatomiques



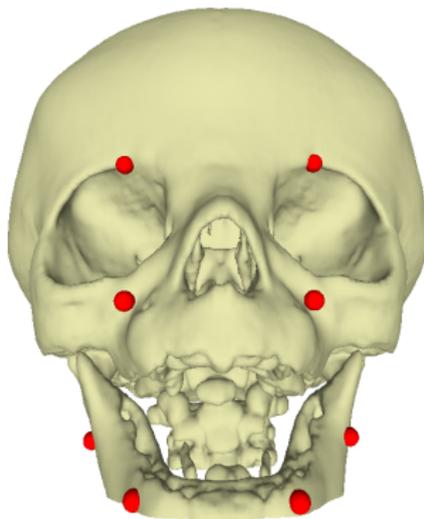
Notre codage

- Les experts mesurent les coordonnées des points de repère anatomiques



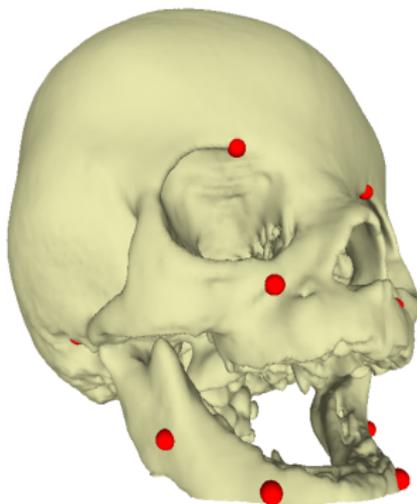
Notre codage

- Les experts mesurent les coordonnées des points de repère anatomiques



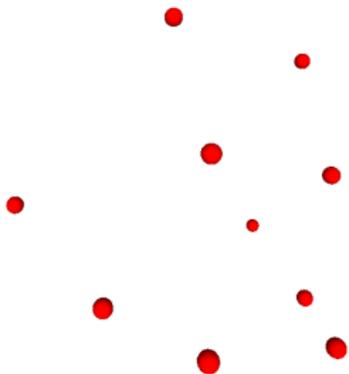
Notre codage

- Les experts mesurent les coordonnées des points de repère anatomiques



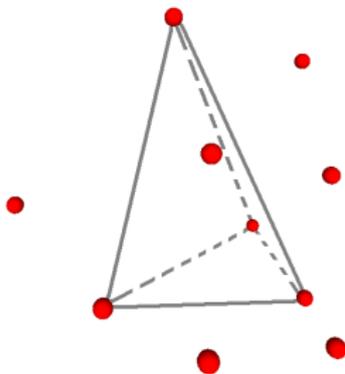
Notre codage

- Les experts mesurent les coordonnées des points de repère anatomiques



Notre codage

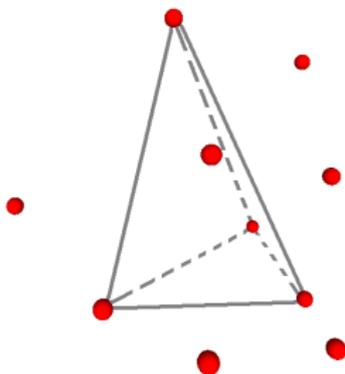
- Les experts mesurent les coordonnées des points de repère anatomiques



- Nous codons la forme de la structure anatomique par l'orientation de tous les quadruplets de points.

Notre codage

- Les experts mesurent les coordonnées des points de repère anatomiques



- Nous codons la forme de la structure anatomique par l'orientation de tous les quadruplets de points.
 \iff Matroïde orienté associé à l'ensemble de points

Orientation d'un $(d + 1)$ -uplet

Définition

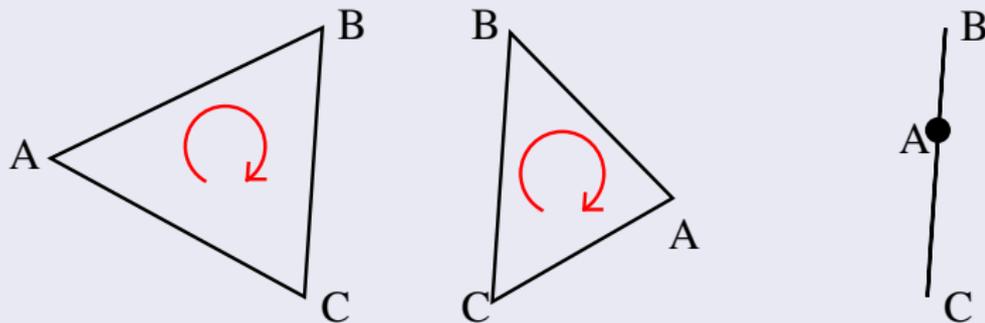
L'orientation d'un $(d + 1)$ -uplet $(\in \{+, -, 0\})$:

Orientation d'un $(d + 1)$ -uplet

Définition

L'orientation d'un $(d + 1)$ -uplet $(\in \{+, -, 0\})$:

Triplet (A, B, C) :

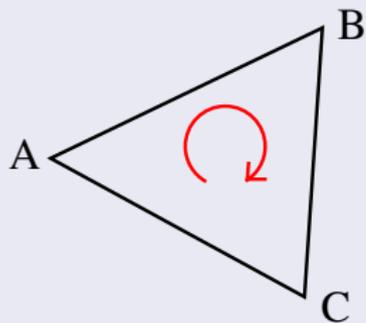


Orientation d'un $(d + 1)$ -uplet

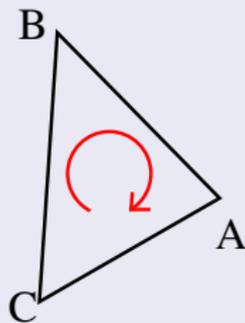
Définition

L'orientation d'un $(d + 1)$ -uplet $(\in \{+, -, 0\})$:

Triplet (A, B, C) :



+



-



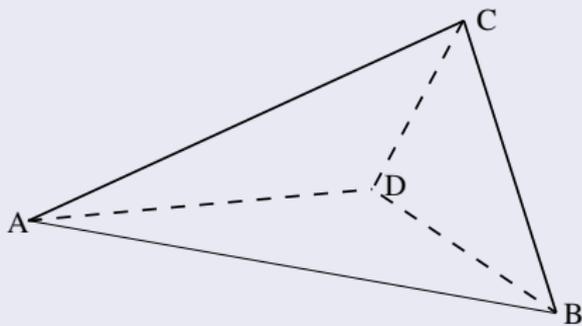
0

Orientation d'un $(d + 1)$ -uplet

Définition

L'orientation d'un $(d + 1)$ -uplet $(\in \{+, -, 0\})$:

Quadruplet (A, B, C, D) :

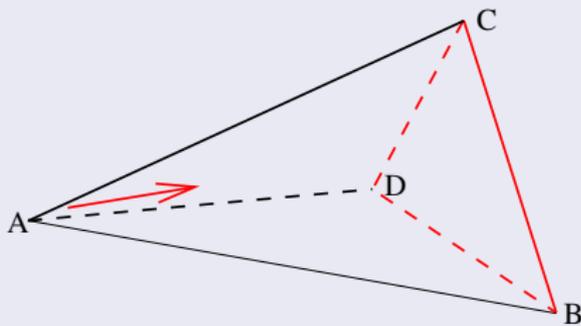


Orientation d'un $(d + 1)$ -uplet

Définition

L'orientation d'un $(d + 1)$ -uplet $(\in \{+, -, 0\})$:

Quadruplet (A, B, C, D) :

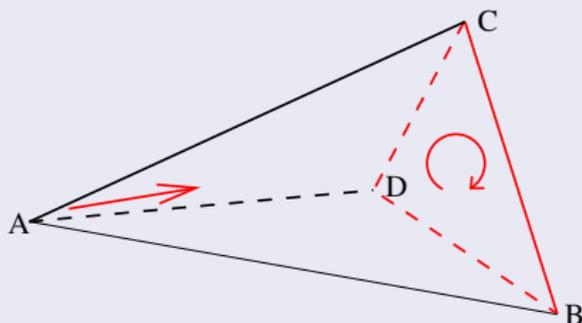


Orientation d'un $(d + 1)$ -uplet

Définition

L'orientation d'un $(d + 1)$ -uplet $(\in \{+, -, 0\})$:

Quadruplet (A, B, C, D) :



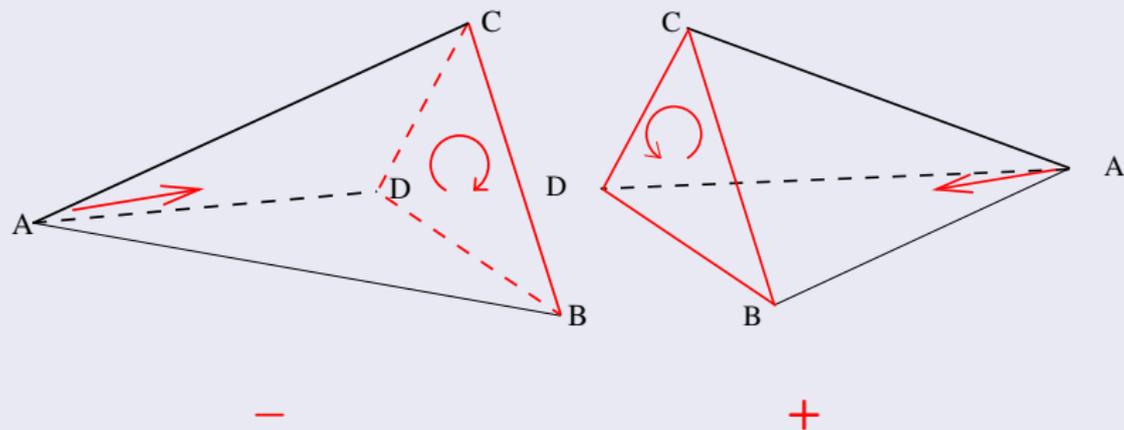
Orientation du triplet (B, C, D)

Orientation d'un $(d + 1)$ -uplet

Définition

L'orientation d'un $(d + 1)$ -uplet $(\in \{+, -, 0\})$:

Quadruplet (A, B, C, D) :



Matroïde orienté associé à un ensemble de points

Définition

Orientations des $(d + 1)$ -uplets

=

chirotopes du matroïde orienté associé à l'ensemble de points

Matroïde orienté associé à un ensemble de points

Définition

Orientations des $(d + 1)$ -uplets

=

chirotopes du matroïde orienté associé à l'ensemble de points

Définition

On dit qu'un matroïde orienté est *uniforme* si toutes les orientations des $(d + 1)$ -uplets appartiennent à $\{+, -\}$ (i.e. points en position générale).

Distance entre matroïdes orientés

Cas uniforme

On associe à chaque matroïde orienté un point de $[-1, 1]^{\binom{n}{4}}$:

$$+ \longleftrightarrow 1$$

$$- \longleftrightarrow -1$$

Distance entre matroïdes orientés

Cas uniforme

On associe à chaque matroïde orienté un point de $[-1, 1]^{\binom{n}{4}}$:

$$+ \longleftrightarrow 1$$

$$- \longleftrightarrow -1$$

Cas non-uniforme

On associe à chaque matroïde orienté un point de $[0, 1]^{3 \times \binom{n}{4}}$:

$$+ \longleftrightarrow (0, 0, 1)$$

$$0 \longleftrightarrow (0, 1, 0)$$

$$- \longleftrightarrow (1, 0, 0)$$

Distance entre matroïdes orientés

Définition d'une distance

Soient \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 deux matroïdes orientés et Q un ensemble de $(d + 1)$ -uplets. La *distance sur Q* entre \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 est le nombre de $(d + 1)$ -uplets de Q orientés différemment.

Distance entre matroïdes orientés

Définition d'une distance

Soient \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 deux matroïdes orientés et Q un ensemble de $(d + 1)$ -uplets. La *distance sur Q* entre \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 est le nombre de $(d + 1)$ -uplets de Q orientés différemment.

Remarques

- $d_Q(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) =$ distance de Hamming

Distance entre matroïdes orientés

Définition d'une distance

Soient \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 deux matroïdes orientés et Q un ensemble de $(d + 1)$ -uplets. La *distance sur Q* entre \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 est le nombre de $(d + 1)$ -uplets de Q orientés différemment.

Remarques

- $d_Q(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) =$ distance de Hamming
- Soient P_1 et P_2 les points associés à \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 . On a alors :

$$d_Q(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) = \frac{d_1(P_1, P_2)}{2}$$

Spécificité de notre codage

Notre codage = l'orientation de tous les quadruplets de points
= matroïde orienté associé à l'ensemble de points

Spécificité de notre codage

Notre codage = l'orientation de tous les quadruplets de points
= matroïde orienté associé à l'ensemble de points

Avantages

- Combinatoire (écriture en machine)

Spécificité de notre codage

Notre codage = l'orientation de tous les quadruplets de points
= matroïde orienté associé à l'ensemble de points

Avantages

- Combinatoire (écriture en machine)
- Calculs exacts (signes de déterminants, distance entière)

Spécificité de notre codage

Notre codage = l'orientation de tous les quadruplets de points
= matroïde orienté associé à l'ensemble de points

Avantages

- Combinatoire (écriture en machine)
- Calculs exacts (signes de déterminants, distance entière)
- Pas besoin de l'étape d'alignement et de normalisation

Spécificité de notre codage

Notre codage = l'orientation de tous les quadruplets de points
= matroïde orienté associé à l'ensemble de points

Avantages

- Combinatoire (écriture en machine)
- Calculs exacts (signes de déterminants, distance entière)
- Pas besoin de l'étape d'alignement et de normalisation

Inconvénient

- Temps de calcul

Plan

- 1 Codage combinatoire de formes
- 2 Méthodes de classification existantes
- 3 Notre méthode
- 4 Application

Clustering / Classification supervisée

Définitions

- Clustering : classification sans connaissances à priori
 - On regroupe les données en clusters.
- Classification supervisée : classification utilisant un algorithme d'apprentissage sur des données pré-classées
 - On regroupe les données dans les classes prédéfinies.

Clustering

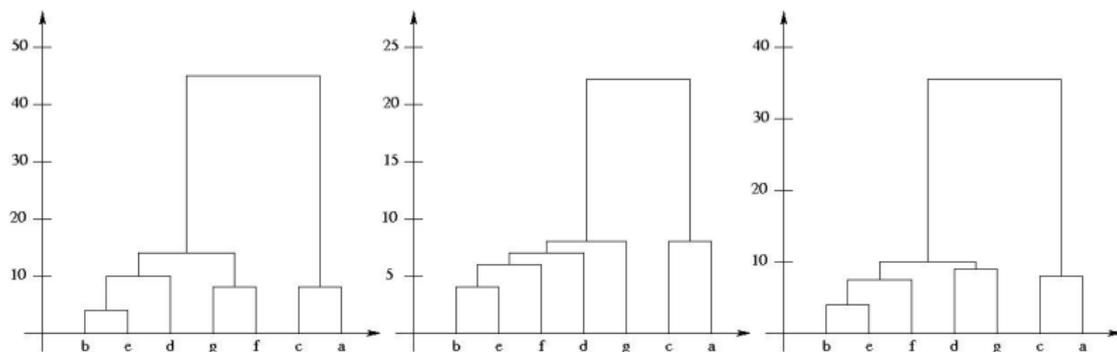
Classification ascendante hiérarchique

Principe : partir des éléments à classer et à chaque étape regrouper les 2 éléments/clusters les plus proches. On obtient à la fin une hiérarchie de nos données.

Clustering

Classification ascendante hiérarchique

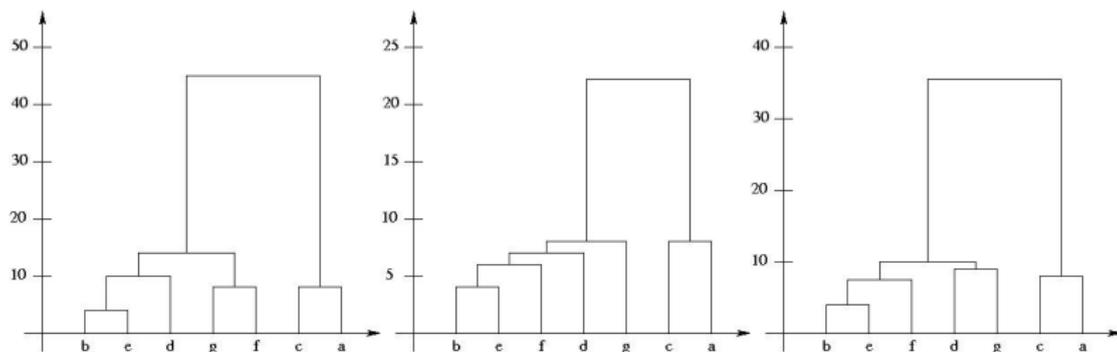
Principe : partir des éléments à classer et à chaque étape regrouper les 2 éléments/clusters les plus proches. On obtient à la fin une hiérarchie de nos données.



Clustering

Classification ascendante hiérarchique

Principe : partir des éléments à classer et à chaque étape regrouper les 2 éléments/clusters les plus proches. On obtient à la fin une hiérarchie de nos données.



Inconvénients

- Plusieurs hiérarchies différentes en fonction de la distance utilisée entre 2 clusters

Clustering

Classification ascendante hiérarchique

Principe : partir des éléments à classer et à chaque étape regrouper les 2 éléments/clusters les plus proches. On obtient à la fin une hiérarchie de nos données.

Inconvénients

- Plusieurs hiérarchies différentes en fonction de la distance utilisée entre 2 clusters
- Ne repose que sur la matrice des distances entre les éléments
⇒ pas de caractérisation

Clustering

k-means

Principe : partitionner les éléments en k clusters afin que chaque cluster soit regroupé autour de son centre de gravité

Formellement : Trouver $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_k$ minimisant

$\sum_{j=1}^k \sum_{e_i \in \mathcal{C}_j} d^2(e_i, c_j)$ où c_j est le centre de gravité de \mathcal{C}_j et d est la distance euclidienne.

Clustering

k-means

Principe : partitionner les éléments en k clusters afin que chaque cluster soit regroupé autour de son centre de gravité

Formellement : Trouver $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_k$ minimisant

$\sum_{j=1}^k \sum_{e_i \in \mathcal{C}_j} d^2(e_i, c_j)$ où c_j est le centre de gravité de \mathcal{C}_j et d est la distance euclidienne.

Avantage

- On peut obtenir les matroïdes les plus proches des centres de gravités (mais ces centres ne sont pas des matroïdes orientés).
- Utilisation de la distance L_1
⇒ caractérisation par les coordonnées des centres.

Clustering

k -medoids

Principe : Trouver $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_k$ minimisant $\sum_{j=1}^k \sum_{e_i \in \mathcal{C}_j} d(e_i, m_j)$ où m_j est l'élément le plus central (*medoid*) de \mathcal{C}_j et d est la distance L_1 .

Clustering

k -medoids

Principe : Trouver $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_k$ minimisant $\sum_{j=1}^k \sum_{e_i \in \mathcal{C}_j} d(e_i, m_j)$ où m_j est l'élément le plus central (*medoid*) de \mathcal{C}_j et d est la distance L_1 .

Avantage

- Les medoids sont les matroïdes orientés moyens de chaque classe.

Clustering

k -medoids

Principe : Trouver $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_k$ minimisant $\sum_{j=1}^k \sum_{e_i \in \mathcal{C}_j} d(e_i, m_j)$ où m_j est l'élément le plus central (*medoid*) de \mathcal{C}_j et d est la distance L_1 .

Avantage

- Les medoids sont les matroïdes orientés moyens de chaque classe.

Inconvénient

- Pas de caractérisation

Classification supervisée

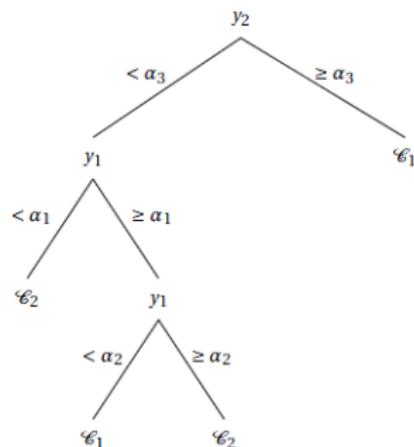
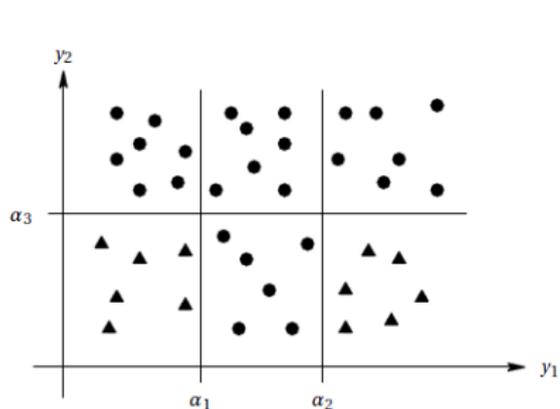
Arbres de décision

- Feuilles de l'arbre : façon de classer
- Nœuds internes : une seule variable
- Branches issues d'un nœud interne : différents choix sur la variable correspondante

Classification supervisée

Arbres de décision

- Feuilles de l'arbre : façon de classer
- Nœuds internes : une seule variable
- Branches issues d'un nœud interne : différents choix sur la variable correspondante



Classification supervisée

Arbres de décision

- Feuilles de l'arbre : façon de classer
- Nœuds internes : une seule variable
- Branches issues d'un nœud interne : différents choix sur la variable correspondante

Avantage

- Caractérisation simple

Inconvénient

- Les caractérisations des classes dépendent les unes des autres

Plan

- 1 Codage combinatoire de formes
- 2 Méthodes de classification existantes
- 3 Notre méthode**
- 4 Application

Principe

- 1 Utilisation des k-means avec notre distance et le point moyen comme centre des clusters

Principe

- ① Utilisation des k-means avec notre distance et le point moyen comme centre des clusters
 - Rapide et simple (pas de paramètres)

Principe

- ① Utilisation des k-means avec notre distance et le point moyen comme centre des clusters
 - Rapide et simple (pas de paramètres)
 - Permet de savoir si notre codage peut servir à retrouver les classes

Principe

- ① Utilisation des k-means avec notre distance et le point moyen comme centre des clusters
 - Rapide et simple (pas de paramètres)
 - Permet de savoir si notre codage peut servir à retrouver les classes
 - Permet de trouver les points atypiques (mal-classés ou loin du centre)

Principe

- ① Utilisation des k-means avec notre distance et le point moyen comme centre des clusters
 - Rapide et simple (pas de paramètres)
 - Permet de savoir si notre codage peut servir à retrouver les classes
 - Permet de trouver les points atypiques (mal-classés ou loin du centre)
- ② Recherche des $(d + 1)$ -uplets permettant de caractériser les classes grâce aux coordonnées des centres

Principe

- ① Utilisation des k-means avec notre distance et le point moyen comme centre des clusters
 - Rapide et simple (pas de paramètres)
 - Permet de savoir si notre codage peut servir à retrouver les classes
 - Permet de trouver les points atypiques (mal-classés ou loin du centre)
- ② Recherche des $(d + 1)$ -uplets permettant de caractériser les classes grâce aux coordonnées des centres
- ③ Caractérisation des classes sous forme de “boules”

Principe

- ① Utilisation des k-means avec notre distance et le point moyen comme centre des clusters
 - Rapide et simple (pas de paramètres)
 - Permet de savoir si notre codage peut servir à retrouver les classes
 - Permet de trouver les points atypiques (mal-classés ou loin du centre)
- ② Recherche des $(d + 1)$ -uplets permettant de caractériser les classes grâce aux coordonnées des centres
- ③ Caractérisation des classes sous forme de “boules”
- ④ Confirmer la caractérisation en la réalisant sur une partie des données (Leave-one-out cross-validation)

Cas uniforme

Notations

- $\chi_M(b)$: le chirotope (ou signe) du $(d + 1)$ -uplet b dans le matroïde orienté M $\chi_M(b) \in \{-, 0, +\}$

Cas uniforme

Notations

- $\chi_M(b)$: le chirotope (ou signe) du $(d + 1)$ -uplet b dans le matroïde orienté M $\chi_M(b) \in \{-, 0, +\}$
- \mathcal{M} : un ensemble des matroïdes orientés

Cas uniforme

Notations

- $\chi_M(b)$: le chirotope (ou signe) du $(d + 1)$ -uplet b dans le matroïde orienté M $\chi_M(b) \in \{-, 0, +\}$
- \mathcal{M} : un ensemble des matroïdes orientés
- $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}, \bar{\mathcal{C}} = \mathcal{M} \setminus \mathcal{C}$

Cas uniforme

Notations

- $\chi_M(b)$: le chirotope (ou signe) du $(d + 1)$ -uplet b dans le matroïde orienté M $\chi_M(b) \in \{-, 0, +\}$
- \mathcal{M} : un ensemble des matroïdes orientés
- $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}, \bar{\mathcal{C}} = \mathcal{M} \setminus \mathcal{C}$
- $m_{\mathcal{C}}$ centre des points associés aux matroïdes orientés de \mathcal{C} i.e.

$$m_{\mathcal{C}}(b) = \frac{\sum_{M \in \mathcal{C}} \chi_M(b)}{|\mathcal{C}|}$$

Cas uniforme

Définition

Soit $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}$. Pour tout $(d + 1)$ -uplet b on définit le *taux de discriminabilité* de b :

$$\tau(b, \mathcal{C}, \bar{\mathcal{C}}) = \frac{|m_{\mathcal{C}}(b) - m_{\bar{\mathcal{C}}}(b)|}{2}$$

Cas uniforme

Définition

Soit $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}$. Pour tout $(d + 1)$ -uplet b on définit le *taux de discriminabilité* de b :

$$\tau(b, \mathcal{C}, \bar{\mathcal{C}}) = \frac{|m_{\mathcal{C}}(b) - m_{\bar{\mathcal{C}}}(b)|}{2}$$

On a : $0 \leq \tau(b, \mathcal{C}, \bar{\mathcal{C}}) \leq 1$.

Plus le taux de discriminabilité est proche de 1 et plus le $(d + 1)$ -uplet permet de séparer \mathcal{C} et $\bar{\mathcal{C}}$.

On trie les $(d + 1)$ -uplets selon la valeur du taux de discriminabilité.

Cas uniforme

Définition

Soit $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}$. Pour tout $(d + 1)$ -uplet b on définit le *taux de discriminabilité* de b :

$$\tau(b, \mathcal{C}, \bar{\mathcal{C}}) = \frac{|m_{\mathcal{C}}(b) - m_{\bar{\mathcal{C}}}(b)|}{2}$$

Exemple

	-	+
\mathcal{C}	25%	75%
$\bar{\mathcal{C}}$	90%	10%

Cas uniforme

Définition

Soit $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}$. Pour tout $(d + 1)$ -uplet b on définit le *taux de discriminabilité* de b :

$$\tau(b, \mathcal{C}, \bar{\mathcal{C}}) = \frac{|m_{\mathcal{C}}(b) - m_{\bar{\mathcal{C}}}(b)|}{2}$$

Exemple

	-	+
\mathcal{C}	25%	75%
$\bar{\mathcal{C}}$	90%	10%

$$\tau(b, \mathcal{C}, \bar{\mathcal{C}}) = \frac{|(0, 75 - 0, 25) - (0, 1 - 0, 9)|}{2} = 0, 65$$

Cas non-uniforme

Notations

- $S \subseteq \{-, 0, +\}$, $\bar{S} = \{-, 0, +\} \setminus S$

Cas non-uniforme

Notations

- $S \subseteq \{-, 0, +\}$, $\bar{S} = \{-, 0, +\} \setminus S$
- $\rho_{\mathcal{M}}(b, S) = \#\{M \in \mathcal{M} \mid \chi_M(b) \in S\} / |\mathcal{M}|$

Cas non-uniforme

Notations

- $S \subseteq \{-, 0, +\}$, $\bar{S} = \{-, 0, +\} \setminus S$
- $\rho_{\mathcal{M}}(b, S) = \#\{M \in \mathcal{M} \mid \chi_M(b) \in S\} / |\mathcal{M}|$
- $\tau(b, \mathcal{C}, \bar{\mathcal{C}}, S) = \frac{\rho_{\mathcal{C}}(b, S) + \rho_{\bar{\mathcal{C}}}(b, \bar{S}) - \rho_{\mathcal{C}}(b, \bar{S}) - \rho_{\bar{\mathcal{C}}}(b, S)}{2}$

Cas non-uniforme

Notations

- $S \subseteq \{-, 0, +\}$, $\bar{S} = \{-, 0, +\} \setminus S$
- $\rho_{\mathcal{M}}(b, S) = \#\{M \in \mathcal{M} \mid \chi_M(b) \in S\} / |\mathcal{M}|$
- $\tau(b, \mathcal{C}, \bar{\mathcal{C}}, S) = \frac{\rho_{\mathcal{C}}(b, S) + \rho_{\bar{\mathcal{C}}}(b, \bar{S}) - \rho_{\mathcal{C}}(b, \bar{S}) - \rho_{\bar{\mathcal{C}}}(b, S)}{2}$

Exemple

	-	0	+
\mathcal{C}	45%	5%	50%
$\bar{\mathcal{C}}$	40%	30%	30%

$$\tau(b, \mathcal{C}, \bar{\mathcal{C}}, \{-\}) = \frac{0,45 + 0,30 + 0,30 - (0,05 + 0,50) - 0,40}{2}$$

Cas non-uniforme

Notations

- $S \subseteq \{-, 0, +\}$, $\bar{S} = \{-, 0, +\} \setminus S$
- $\rho_{\mathcal{M}}(b, S) = \#\{M \in \mathcal{M} \mid \chi_M(b) \in S\} / |\mathcal{M}|$
- $\tau(b, \mathcal{C}, \bar{\mathcal{C}}, S) = \frac{\rho_{\mathcal{C}}(b, S) + \rho_{\bar{\mathcal{C}}}(b, \bar{S}) - \rho_{\mathcal{C}}(b, \bar{S}) - \rho_{\bar{\mathcal{C}}}(b, S)}{2}$

Exemple

	-	0	+
\mathcal{C}	45%	5%	50%
$\bar{\mathcal{C}}$	40%	30%	30%

$$\tau(b, \mathcal{C}, \bar{\mathcal{C}}, \{-\}) = \frac{0,45 + 0,30 + 0,30 - (0,05 + 0,50) - 0,40}{2}$$

Cas non-uniforme

Notations

- $S \subseteq \{-, 0, +\}$, $\bar{S} = \{-, 0, +\} \setminus S$
- $\rho_{\mathcal{M}}(b, S) = \#\{M \in \mathcal{M} \mid \chi_M(b) \in S\} / |\mathcal{M}|$
- $\tau(b, \mathcal{C}, \bar{\mathcal{C}}, S) = \frac{\rho_{\mathcal{C}}(b, S) + \rho_{\bar{\mathcal{C}}}(b, \bar{S}) - \rho_{\mathcal{C}}(b, \bar{S}) - \rho_{\bar{\mathcal{C}}}(b, S)}{2}$

Remarques :

$$\tau(b, \mathcal{C}, \bar{\mathcal{C}}, S) = \rho_{\mathcal{C}}(b, S) - \rho_{\bar{\mathcal{C}}}(b, S)$$

Cas non-uniforme

Notations

- $S \subseteq \{-, 0, +\}$, $\bar{S} = \{-, 0, +\} \setminus S$
- $\rho_{\mathcal{M}}(b, S) = \#\{M \in \mathcal{M} \mid \chi_M(b) \in S\} / |\mathcal{M}|$
- $\tau(b, \mathcal{C}, \bar{\mathcal{C}}, S) = \frac{\rho_{\mathcal{C}}(b, S) + \rho_{\bar{\mathcal{C}}}(b, \bar{S}) - \rho_{\mathcal{C}}(b, \bar{S}) - \rho_{\bar{\mathcal{C}}}(b, S)}{2}$

Remarques :

$$\tau(b, \mathcal{C}, \bar{\mathcal{C}}, S) = \rho_{\mathcal{C}}(b, S) - \rho_{\bar{\mathcal{C}}}(b, S)$$

$$\sum_{\substack{S \subset \{-, 0, +\} \\ S \neq \{-, 0, +\}}} \tau(b, \mathcal{C}, \bar{\mathcal{C}}, S) = 0$$

Il nous suffit donc de calculer $\tau(b, \mathcal{C}, \bar{\mathcal{C}}, S)$ et $\tau(b, \bar{\mathcal{C}}, \mathcal{C}, S)$ pour les ensembles S de taille 1.

Cas non-uniforme

Notations

- $S \subseteq \{-, 0, +\}$, $\bar{S} = \{-, 0, +\} \setminus S$
- $\rho_{\mathcal{M}}(b, S) = \#\{M \in \mathcal{M} \mid \chi_M(b) \in S\} / |\mathcal{M}|$
- $\tau(b, \mathcal{C}, \bar{\mathcal{C}}, S) = \frac{\rho_{\mathcal{C}}(b, S) + \rho_{\bar{\mathcal{C}}}(b, \bar{S}) - \rho_{\mathcal{C}}(b, \bar{S}) - \rho_{\bar{\mathcal{C}}}(b, S)}{2}$
- $\tau(b, \mathcal{C}, \bar{\mathcal{C}}) = \max_S \tau(b, \mathcal{C}, \bar{\mathcal{C}}, S)$

Cas non-uniforme

Notations

- $S \subseteq \{-, 0, +\}$, $\bar{S} = \{-, 0, +\} \setminus S$
- $\rho_{\mathcal{M}}(b, S) = \#\{M \in \mathcal{M} \mid \chi_M(b) \in S\} / |\mathcal{M}|$
- $\tau(b, \mathcal{C}, \bar{\mathcal{C}}, S) = \frac{\rho_{\mathcal{C}}(b, S) + \rho_{\bar{\mathcal{C}}}(b, \bar{S}) - \rho_{\mathcal{C}}(b, \bar{S}) - \rho_{\bar{\mathcal{C}}}(b, S)}{2}$
- $\tau(b, \mathcal{C}, \bar{\mathcal{C}}) = \max_S \tau(b, \mathcal{C}, \bar{\mathcal{C}}, S)$

Exemple

	-	0	+
\mathcal{C}	45%	5%	50%
$\bar{\mathcal{C}}$	40%	30%	30%

$$\tau(b, \mathcal{C}, \bar{\mathcal{C}}) = \max_S \tau(b, \mathcal{C}, \bar{\mathcal{C}}, S) = \frac{0, 30 - 0, 05}{2}$$

Classification

Définition

Soit Q un ensemble de $(d + 1)$ -uplets, $x \subset \{-, 0, +\}^{\binom{n}{d}}$ et $l \in \mathbb{N}$.
On définit la boule sur Q de centre x et de rayon l par :

$$B(Q, x, l) = \{M \in \mathcal{M} \mid d_Q(\chi_M, x) \leq l\}$$

où $d_Q(\chi_M, x) = \sum_{q \in Q} \delta(q, \chi_M, x)$ et

$\delta(q, \chi_M, x) = 1$ si $\chi_M(q) \in x$ et $\delta(q, \chi_M, x) = 0$ sinon.

Classification

Définition

Soit Q un ensemble de $(d + 1)$ -uplets, $x \subset \{-, 0, +\}^{\binom{n}{d}}$ et $l \in \mathbb{N}$.
On définit la boule sur Q de centre x et de rayon l par :

$$B(Q, x, l) = \{M \in \mathcal{M} \mid d_Q(\chi_M, x) \leq l\}$$

où $d_Q(\chi_M, x) = \sum_{q \in Q} \delta(q, \chi_M, x)$ et
 $\delta(q, \chi_M, x) = 1$ si $\chi_M(q) \in x$ et $\delta(q, \chi_M, x) = 0$ sinon.

On souhaite caractériser chaque classe par une boule. Ainsi pour toute classe \mathcal{C} on cherche un ensemble de $(d + 1)$ -uplets Q (le plus petit possible), un centre x et un rayon l tels que $\mathcal{C} = B(Q, x, l)$.

Classification

Définition

Soit Q un ensemble de $(d + 1)$ -uplets, $x \subset \{-, 0, +\}^{\binom{n}{d}}$ et $l \in \mathbb{N}$.
On définit la boule sur Q de centre x et de rayon l par :

$$B(Q, x, l) = \{M \in \mathcal{M} \mid d_Q(\chi_M, x) \leq l\}$$

où $d_Q(\chi_M, x) = \sum_{q \in Q} \delta(q, \chi_M, x)$ et
 $\delta(q, \chi_M, x) = 1$ si $\chi_M(q) \in x$ et $\delta(q, \chi_M, x) = 0$ sinon.

On souhaite caractériser chaque classe par une boule. Ainsi pour toute classe \mathcal{C} on cherche un ensemble de $(d + 1)$ -uplets Q (le plus petit possible), un centre x et un rayon l tels que $\mathcal{C} = B(Q, x, l)$.

En pratique on prend x tel que pour tout b , $x(b)$ correspond à un ensemble de signe maximisant $\tau(b, \mathcal{C}, \bar{\mathcal{C}}, S)$

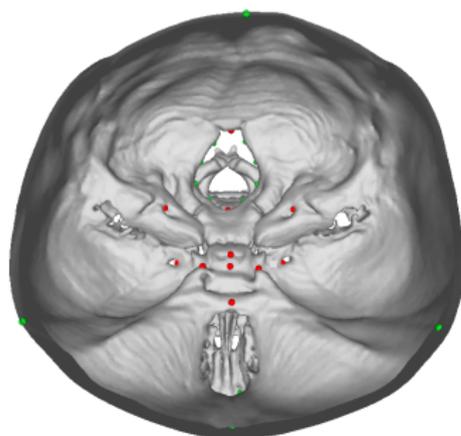
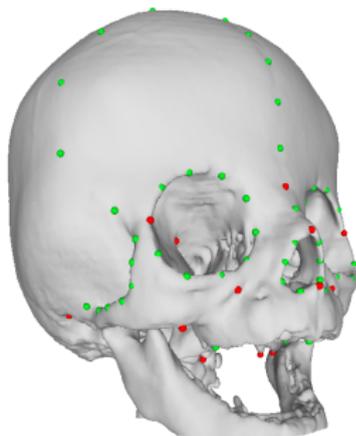
Plan

- 1 Codage combinatoire de formes
- 2 Méthodes de classification existantes
- 3 Notre méthode
- 4 Application**

Les données

Données provenant de scanners de crânes de 40 enfants atteints de fusion prématurée de la suture coronale et de 20 enfants non-atteints.

41 landmarks



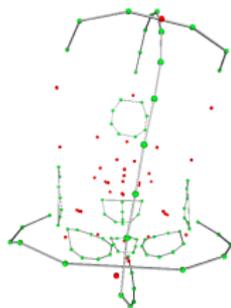
Les données

Données provenant de scanners de crânes de 40 enfants atteints de fusion prématurée de la suture coronale et de 20 enfants non-atteints.

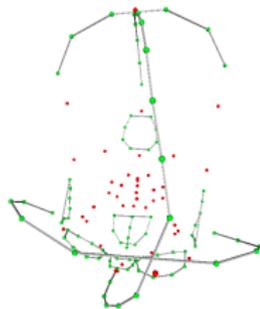
41 landmarks

Les 40 enfants ont été répartis en 3 classes en fonction de la position de la suture.

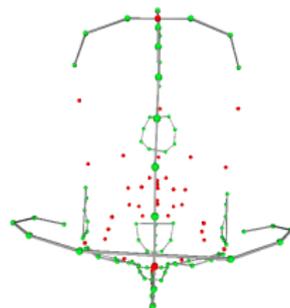
Left



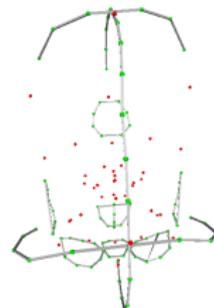
Right



Bilateral



Non-affecté



Clustering avec distance L_1 *k*-means*k*-medoids

	Left	Right	Bilateral	Unaffected
Cluster 1	8 spec.	0	0	0
Cluster 2	0	17 spec.	0	0
Cluster 3	0	0	15 spec.	0
Cluster 4	0	0	0	20 spec.

On retrouve les classes cliniques sans connaissance à priori.

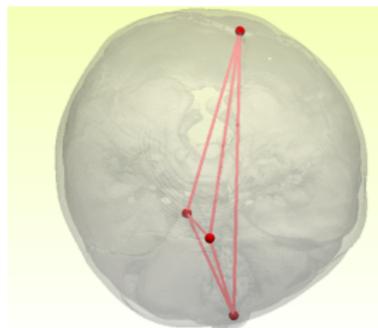
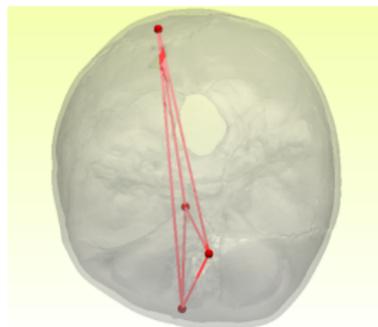
Quelques caractérisations

Right

Il existe 4 quadruplets dont le taux de discriminabilité est égal à 1. Chacun de ces quadruplets est composée de 3 points sur le plan médian sagittal et un 4ème dans la partie droite de la base du crâne.

Left

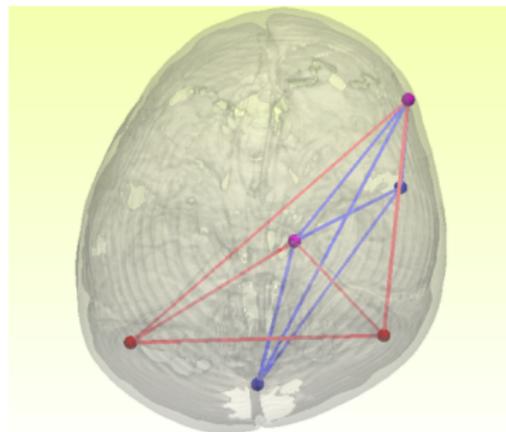
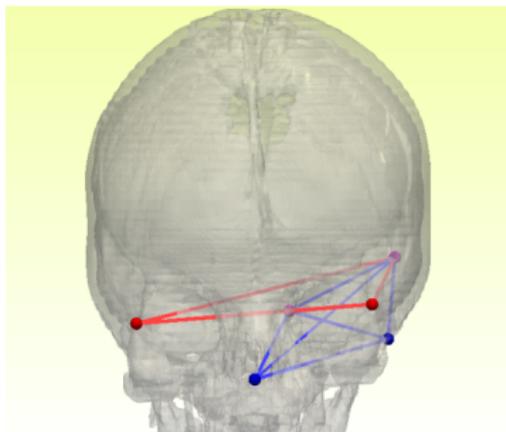
Les symétriques par rapport au plan médian sagittal des 4 quadruplets ont un taux de discriminabilité est égal à 1.



Quelques caractérisations

Bilateral

Il existe 2 quadruplets dont le taux de discriminabilité est environ de 0,95. Un crâne appartient à la classe Bilateral si et seulement si ces deux quadruplets ont pour orientation —.



Quelques caractérisations

Non-affectés

Nous avons trouvé un sous-ensemble Q de 5 quadruplets et un vecteur $x \in \{-, +\}^Q$ tels que un crâne appartient à la classe Non-affectés si et seulement si le matroïde orienté associé appartient à la boule $B(Q, x, 2)$ (i.e. les signes d'au moins 3 quadruplets parmi les 5 sont les mêmes).

Quelques caractérisations

Non-affectés

Nous avons trouvé un sous-ensemble Q de 5 quadruplets et un vecteur $x \in \{-, +\}^Q$ tels que un crâne appartient à la classe Non-affectés si et seulement si le matroïde orienté associé appartient à la boule $B(Q, x, 2)$ (i.e. les signes d'au moins 3 quadruplets parmi les 5 sont les mêmes).

Le taux de discriminabilité des 5 quadruplets est compris entre 0,85 et 0,875.

Questions ouvertes

- Comme on a peu de matroïdes orientés (une centaine), à quoi correspond l'espace engendré par ces matroïdes orientés ?
- Quel est le matroïde orienté le plus proche d'un point de $[-1, 1]^{\binom{n}{4}}$?
- Quel est le matroïde orienté le plus proche d'un point de $\{-1, 0, 1\}^{\binom{n}{4}}$?