L'intégrale de Sugeno discrète

Agnès Rico

14 octobre 2010

Plan

Plan

Les intégrales non additives / floues

- Le concept d'intégrale par rapport à une mesure a été étendu pour des mesures non additives : les **mesures floues** ou **capacités**.
  $\Rightarrow$ les intégrales floues

Les intégrales non additives / floues

- Le concept d'intégrale par rapport à une mesure a été étendu pour des mesures non additives : les **mesures floues** ou **capacités**.
  $\Rightarrow$ les intégrales floues
- Les deux intégrales non additives les plus connues sont
  - **l'intégrale de Choquet** (1953)
    utilisée sur les échelles cardinales
  - **l'intégrale de Sugeno** (1974)
    utilisée sur les échelles ordinales

Les intégrales non additives / floues

- Le concept d'intégrale par rapport à une mesure a été étendu pour des mesures non additives : les **mesures floues** ou **capacités**.
  $\Rightarrow$ les intégrales floues
- Les deux intégrales non additives les plus connues sont
  - **l'intégrale de Choquet** (1953)
    utilisée sur les échelles cardinales
  - **l'intégrale de Sugeno** (1974)
    utilisée sur les échelles ordinales
- En théorie de la décision ces intégrales sont
  - des opérateurs d'agrégation
  - des représentations de relations de préférence
  - des outils d'apprentissage ...

Décision multicritère

- $N = \{1, \ldots, n\}$ ensemble des critères
- L échelle d'évaluation commune pour tous les critères
- une alternative est un vecteur $x = (x_1, \ldots, x_n) \in L^n$
  où x_i est l'évaluation de l'alternative par rapport au critère i
- $\succeq$ est une relation de préférence sur l'ensemble des altenatives,
  relation reflexive transitive et complète,
- Un opérateur d'agrégation est une fonction $M : L^n \rightarrow L$,
  $x \rightarrow$ un score global,
- $\mu : 2^N \rightarrow L$ est une mesure floue ou capacité
  - $\mu(\emptyset) = 0$
  - $\mu(N) = 1$
  - si $A \subseteq B$ alors $\mu(A) \leq \mu(B)$

  représente le poids des ensembles de critères.

Décision dans l'incertain

- $N = \{1, \ldots, n\}$ ensemble des états possibles de la nature,
- X ensemble des conséquences possibles des actes,
- L est l'échelle d'évaluation des conséquences possibles,
- Un acte est une fonction $x : N \to X$,
  $A = X^N$ est l'ensemble des actes potentiels,
- $\mu : 2^N \to L$ est une mesure floue,
  représente ce que sait le décideur
  par rapport à l'actuel état de la nature.
- $\succeq$ est une relation de préférence sur l'ensemble des actes.

Plan

L'intégrale de Sugeno discrète

- $N = \{1, \ldots, n\}$,
- $(L, \wedge, \vee)$ un ensemble totalement ordonné,
  $\wedge$ le minimum, $\vee$ le maximum
  0 le plus petit élément, 1 le plus grand élément
- $\mu : 2^N \rightarrow L$ une mesure floue,

L'intégrale de Sugeno discrète

- $N = \{1, \ldots, n\}$,
- $(L, \wedge, \vee)$ un ensemble totalement ordonné,
  $\wedge$ le minimum, $\vee$ le maximum
  0 le plus petit élément, 1 le plus grand élément
- $\mu : 2^N \to L$ une mesure floue,
- $x = (x_1, \ldots, x_n) \in L^n$ une alternative
  $\Rightarrow$ () permutation sur N telle que $x_{(1)} \leq \ldots \leq x_{(n)}$,
  $\Rightarrow$ des ensembles $A_{(1)}, \ldots, A_{(n)}$
  pour $i = 1, \ldots, n$, $A_{(i)} = \{(i), \ldots, (n)\}$ et $A_{(n+1)} = \emptyset$,

L'intégrale de Sugeno discrète

- $N = \{1, \dots, n\}$,
- $(L, \wedge, \vee)$ un ensemble totalement ordonné,
  $\wedge$ le minimum, $\vee$ le maximum
  0 le plus petit élément, 1 le plus grand élément
- $\mu : 2^N \to L$ une mesure floue,
- $x = (x_1, \dots, x_n) \in L^n$ une alternative
  $\Rightarrow$ () permutation sur N telle que $x_{(1)} \leq \dots \leq x_{(n)}$,
  $\Rightarrow$ des ensembles $A_{(1)}, \dots, A_{(n)}$
  pour $i = 1, \dots, n$, $A_{(i)} = \{(i), \dots, (n)\}$ et $A_{(n+1)} = \emptyset$,
- **L'intégrale de Sugeno** de $x = (x_1, \dots, x_n)$ par rapport à μ est :

$$
\begin{aligned}
S_\mu(x) &= \bigvee_{i=1}^{n} (x_{(i)} \wedge \mu(A_{(i)})) \\
&= \bigwedge_{i=1}^{n} (x_{(i)} \vee \mu(A_{(i+1)}))
\end{aligned}
$$

Exemples

Soient $N = \{1, 2, 3, 4\}$
$\mu : 2^N \longrightarrow [0, 1]$ une mesure floue définie par

- $\mu(\{1\}) = 1, \mu(\{2\}) = 0.5, \mu(\{3\}) = 0, \mu(\{4\}) = 0,$
- $\mu(A) = \bigvee_{a \in A} \mu(a).$

$$
\begin{array}{ll}
S_\mu(1,1,1,1) = 1, & S_\mu(1,0,1,0) = 1, \\
S_\mu(1,1,0,0) = 1, & S_\mu(0,1,1,1) = 0.5
\end{array}
$$

Exemples

Soient $N = \{1, 2, 3, 4\}$

$\mu : 2^N \longrightarrow [0, 1]$ une mesure floue définie par

- $\mu(\{1\}) = 1, \mu(\{2\}) = 0.5, \mu(\{3\}) = 0, \mu(\{4\}) = 0,$
- $\mu(A) = \bigvee_{a \in A} \mu(a).$

$$S_\mu(1,1,1,1) = 1, \qquad S_\mu(1,0,1,0) = 1,$$
$$S_\mu(1,1,0,0) = 1, \qquad S_\mu(0,1,1,1) = 0.5$$

$\mu' : 2^N \longrightarrow [0, 1]$ une mesure floue définie par

- $\mu'(1) = 0, \mu'(2) = 0.5, \mu'(3) = 1, \mu'(4) = 0,$
- $\mu'(A) = \bigvee_{a \in A} \mu'(a).$

$$S_{\mu'}(1,1,1,1) = 1, \qquad S_{\mu'}(1,0,1,0) = 1,$$
$$S_{\mu'}(1,1,0,0) = 0.5, \qquad S_{\mu'}(0,1,1,1) = 1.$$

Exemple

Soient $N = \{1, 2, 3\}$ et 4 alternatives **a**, **b**, **c**,**d** évaluées dans $L = [0, 1]$.

	1	**2**	**3**
a	0	1/3	0
b	0	0	1/3
c	1/3	2/3	1
d	1/3	1	2/3

Le décideur donne la relation $a \sim b$ et $d \succ c$.

Exemple

Soient $N = \{1, 2, 3\}$ et 4 alternatives **a**, **b**, **c**,**d** évaluées dans $L = [0, 1]$.

	1	**2**	**3**
a	0	1/3	0
b	0	0	1/3
c	1/3	2/3	1
d	1/3	1	2/3

Le décideur donne la relation $a \sim b$ et $d \succ c$.

si μ est la mesure floue définie par

$\mu(\{2\}) = 1$, $\mu(\{3\}) = 2/3$, $\mu(\{2, 3\}) = 1$, $\mu(\{1, 2, 3\}) = 1$,

μ est égale à $1/3$ pour les autres ensembles,

Exemple

Soient $N = \{1, 2, 3\}$ et 4 alternatives **a**, **b**, **c**,**d** évaluées dans $L = [0, 1]$.

	1	**2**	**3**
a	0	1/3	0
b	0	0	1/3
c	1/3	2/3	1
d	1/3	1	2/3

Le décideur donne la relation $a \sim b$ et $d \succ c$.

si μ est la mesure floue définie par

$\mu(\{2\}) = 1$, $\mu(\{3\}) = 2/3$, $\mu(\{2, 3\}) = 1$, $\mu(\{1, 2, 3\}) = 1$,

μ est égale à $1/3$ pour les autres ensembles,

alors S_μ modélise la relation donnée :

$$S_\mu(a) = 1/3 \qquad S_\mu(b) = 1/3$$
$$S_\mu(c) = 2/3 \qquad S_\mu(d) = 1.$$

Propriétés

- $\min_{i=1}^{n} x_i \leq S_\mu(x_1, \cdots, x_n) \leq \max_{i=1}^{n} x_i$

Propriétés

- $\min_{i=1}^{n} x_i \leq S_\mu(x_1, \cdots, x_n) \leq \max_{i=1}^{n} x_i$

Propriétés

- $\min_{i=1}^{n} x_i \leq S_\mu(x_1, \cdots, x_n) \leq \max_{i=1}^{n} x_i$
- $\forall c \in L,\ S_\mu(c, \ldots, c) = c$

Propriétés

- $\min_{i=1}^{n} x_i \leq S_\mu(x_1, \cdots, x_n) \leq \max_{i=1}^{n} x_i$
- $\forall c \in L,\ S_\mu(c, \ldots, c) = c$
- L'intégrale de Sugeno est croissante :

$$(x_1, \cdots, x_n) \leq (y_1, \cdots, y_n) \Rightarrow S_\mu(x_1, \cdots, x_n) \leq S_\mu(y_1, \cdots, y_n)$$

Propriétés

- $\min_{i=1}^{n} x_i \leq S_\mu(x_1, \cdots, x_n) \leq \max_{i=1}^{n} x_i$
- $\forall c \in L,\ S_\mu(c, \ldots, c) = c$
- L'intégrale de Sugeno est croissante :

$$(x_1, \cdots, x_n) \leq (y_1, \cdots, y_n) \Rightarrow S_\mu(x_1, \cdots, x_n) \leq S_\mu(y_1, \cdots, y_n)$$

- $S_\mu(x \vee y) \geq S_\mu(x) \vee S_\mu(y)$

  $S_\mu(x \wedge y) \leq S_\mu(x) \wedge S_\mu(y)$

Propriétés

- $\min_{i=1}^{n} x_i \leq S_\mu(x_1, \cdots, x_n) \leq \max_{i=1}^{n} x_i$
- $\forall c \in L,\ S_\mu(c, \ldots, c) = c$
- L'intégrale de Sugeno est croissante :

$$(x_1, \cdots, x_n) \leq (y_1, \cdots, y_n) \ \Rightarrow\ S_\mu(x_1, \cdots, x_n) \leq S_\mu(y_1, \cdots, y_n)$$

- $S_\mu(x \vee y) \geq S_\mu(x) \vee S_\mu(y)$

  $S_\mu(x \wedge y) \leq S_\mu(x) \wedge S_\mu(y)$

  Les égalités sont vraies si les alternatives sont comonotones :

$$\forall i, j\ (x_i - x_j)(y_i - y_j) \geq 0$$

Propriétés

- $x = (x_1, \ldots, x_n)$
  () la permutation telle que $x_{(1)} \leq \cdots \leq x_{(n)}$
  $A_{(1)}, \ldots, A_{(n)}$ avec $A_{(i)} = \{(i), \ldots, (n)\}$

$$S_\mu(x) = median[x_1, \ldots, x_n, \mu(A_{(2)}), \ldots \mu(A_{(n)})]$$

Propriétés

- $x = (x_1, \ldots, x_n)$
  () la permutation telle que $x_{(1)} \leq \cdots \leq x_{(n)}$
  $A_{(1)}, \ldots, A_{(n)}$ avec $A_{(i)} = \{(i), \ldots, (n)\}$

$$S_\mu(x) = median[x_1, \ldots, x_n, \mu(A_{(2)}), \ldots \mu(A_{(n)})]$$

Exemple

$N = \{1, 2, 3, 4\}$
$\mu : 2^N \rightarrow [0, 1]$ définie par

- $\mu(1) = 1, \mu(2) = 0.5, \mu(3) = 0, \mu(4) = 0,$
- $\mu(A) = \bigvee_{a \in A} \mu(a).$

$$\begin{aligned} S_\mu(1,0,1,0) &= median(1,0,1,0,\mu(\{1,3,4\}),\mu(\{1,3\}),\mu(\{3\})) \\ &= median(1,0,1,0,1,1,0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Cas particuliers

- si μ est une mesure floue qui vaut 1 partout (sauf sur $\emptyset$) :

$$S_\mu(x_1, \ldots, x_n) = max_{i=1}^{n} x_i.$$

Cas particuliers

- si μ est une mesure floue qui vaut 1 partout (sauf sur $\emptyset$) :

$$S_\mu(x_1, \ldots, x_n) = max_{i=1}^{n} x_i.$$

- si μ est une mesure floue qui vaut 0 partout (sauf sur N) :

$$S_\mu(x_1, \ldots, x_n) = min_{i=1}^{n} x_i.$$

Cas particuliers

- si μ est une mesure floue qui vaut 1 partout (sauf sur $\emptyset$) :

$$S_\mu(x_1, \ldots, x_n) = max_{i=1}^{n} x_i.$$

- si μ est une mesure floue qui vaut 0 partout (sauf sur N) :

$$S_\mu(x_1, \ldots, x_n) = min_{i=1}^{n} x_i.$$

- Les polynômes booléens de $[0,1]^n \longrightarrow [0,1]$ sont définis récursivement
  - $\forall c \in [0,1]$, $x \mapsto c$ est un polynôme booléen,
  - $\forall i \in N$ $x \mapsto x_i$ est un polynôme booléen,
  - $\forall f, g$ polynômes booléens $f \wedge$ et $f \vee g$ sont des polynômes booléens

Un polynôme booléen P est une intégrale de Sugeno
si et seulement si $P(0, \ldots, 0) = 0$ et $P(1, \ldots, 1) = 1$.

Cas particuliers suite

Soit $w = (w_1, \ldots, w_n) \in [0,1]^n$ tel que $\vee_{i=1}^n w_i = 1$
et $x = (x_1, \cdots, x_n) \in [0,1]^n$

- l'opérateur maximum pondéré $pmax_w$ associé à w :

$$pmax_w(x) = \bigvee_{i=1}^{n} (w_i \wedge x_i) \ , \ x \in [0,1]^n,$$

- l'opérateur minimum pondéré $pmin_w$ associé à w :

$$pmin_w(x) = \bigwedge_{i=1}^{n} ((1 - w_i) \vee x_i) \ , \ x \in [0,1]^n,$$

Cas particuliers suite

Soit $w = (w_1, \ldots, w_n) \in [0,1]^n$ tel que $\vee_{i=1}^n w_i = 1$
et $x = (x_1, \cdots, x_n) \in [0,1]^n$

- l'opérateur maximum pondéré $pmax_w$ associé à w :

$$pmax_w(x) = \bigvee_{i=1}^{n} (w_i \wedge x_i) \ , \ x \in [0,1]^n,$$

- l'opérateur minimum pondéré $pmin_w$ associé à w :

$$pmin_w(x) = \bigwedge_{i=1}^{n} ((1 - w_i) \vee x_i) \ , \ x \in [0,1]^n,$$

Propriétés

- $pmax_w$ est une intégrale de sugeno S_μ
pour la possibilité $\mu(A) = \bigvee_{i \in A} w_i$ pour $A \subseteq N$,
- $pmin_w$ est une intégrale de sugeno S_μ
pour la nécessité $\mu(A) = \bigwedge_{i \in N \setminus A} w_i$ pour $A \subseteq N$,

Propriétés

Dans le cadre de la décision dans l'incertain,

- Une mesure floue μ est une possibilité :
  $\mu(A \cup B) = \mu(A) \vee \mu(B) \ \forall A, B \subseteq N$,

L'intégrale de Sugeno par rapport à une **possibilité** modélise

- le **penchant pour l'incertitude** du décideur,
- l'optimisme du décideur

Propriétés

Dans le cadre de la décision dans l'incertain,

- Une mesure floue μ est une possibilité :
  $\mu(A \cup B) = \mu(A) \vee \mu(B)\ \forall A, B \subseteq N$,

L'intégrale de Sugeno par rapport à une **possibilité** modélise

- le **penchant pour l'incertitude** du décideur,
- l'optimisme du décideur

- une mesure floue μ est une nécessité :
  $\mu(A \cap B) = \mu(A) \wedge \mu(B)\ \forall A, B \subseteq N$.

L'intégrale de Sugeno par rapport à une **nécessité** modélise

- l'**aversion pour l'incertitude** du décideur,
- le pessimisme du décideur.

Plan

Identification d'une mesure floue

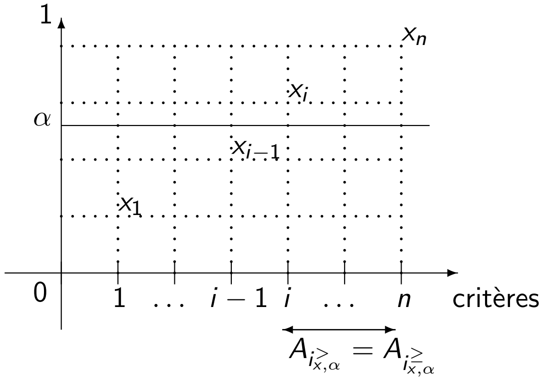
Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in [0,1]^n$ et $\alpha \in [0,1]$.
On cherche μ tq $S_\mu(x) = \alpha$.

Identification d'une mesure floue

Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in [0,1]^n$ et $\alpha \in [0,1]$.
On cherche μ tq $S_\mu(x) = \alpha$.
$A_{i^>_{x,\alpha}}$ est l'ensemble des critères dont le score est strictement supérieur à α.
$A_{i^\geq_{x,\alpha}}$ est l'ensemble des critères dont le score est supérieur ou égal à α.

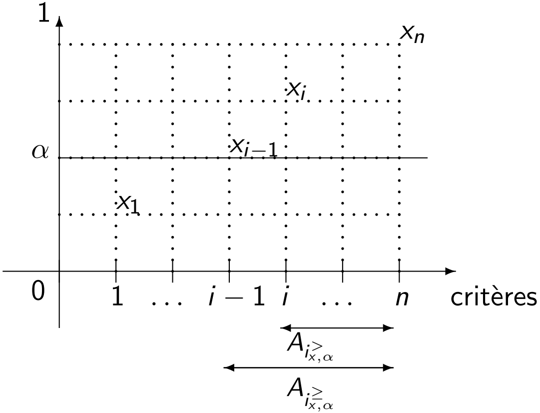
Identification d'une mesure floue

Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in [0,1]^n$ et $\alpha \in [0,1]$.
On cherche μ tq $S_\mu(x) = \alpha$.
$A_{i^>_{x,\alpha}}$ est l'ensemble des critères dont le score est strictement supérieur à α.
$A_{i^\geq_{x,\alpha}}$ est l'ensemble des critères dont le score est supérieur ou égal à α.



Identification d'une mesure floue

Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in [0,1]^n$ et $\alpha \in [0,1]$.
$A_{i^{>}_{x,\alpha}}$ est l'ensemble des critères dont le score est strictement supérieur à α.
$A_{i^{\geq}_{x,\alpha}}$ est l'ensemble des critères dont le score est supérieur ou égal à α.



Identification d'une mesure floue

Soient $x = (x_1, \ldots, x_n) \in [0,1]^n$ et $\alpha \in [0,1]$ donnés.

$$\forall A \in 2^N \backslash \{\emptyset, N\}, \quad \hat{\mu}^{x,\alpha}(A) = \begin{cases} \alpha & \text{si } A \subseteq A_{i^{>}_{x,\alpha}} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\hat{\mu}^{x,\alpha}(\emptyset) = 0,\ \hat{\mu}^{x,\alpha}(N) = 1.$$

Identification d'une mesure floue

Soient $x = (x_1, \ldots, x_n) \in [0,1]^n$ et $\alpha \in [0,1]$ donnés.

$$\forall A \in 2^N \backslash \{\emptyset, N\}, \quad \hat{\mu}^{x,\alpha}(A) = \begin{cases} \alpha & \text{si } A \subseteq A_{i^{>}_{x,\alpha}} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$
$$\hat{\mu}^{x,\alpha}(\emptyset) = 0,\ \hat{\mu}^{x,\alpha}(N) = 1.$$

$$\forall A \in 2^N \backslash \{\emptyset, N\}, \quad \check{\mu}^{x,\alpha}(A) = \begin{cases} \alpha & \text{si } A_{i^{\geq}_{x,\alpha}} \subseteq A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
$$\check{\mu}^{x,\alpha}(\emptyset) = 0,\ \check{\mu}^{x,\alpha}(N) = 1$$

Identification d'une mesure floue

Soient $x = (x_1, \ldots, x_n) \in [0,1]^n$ et $\alpha \in [0,1]$ donnés.

$$\forall A \in 2^N \backslash \{\emptyset, N\}, \quad \hat{\mu}^{x,\alpha}(A) = \begin{cases} \alpha & \text{si } A \subseteq A_{i^{\geq}_{x,\alpha}} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$
$$\hat{\mu}^{x,\alpha}(\emptyset) = 0,\ \hat{\mu}^{x,\alpha}(N) = 1.$$

$$\forall A \in 2^N \backslash \{\emptyset, N\}, \quad \check{\mu}^{x,\alpha}(A) = \begin{cases} \alpha & \text{si } A_{i^{\geq}_{x,\alpha}} \subseteq A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
$$\check{\mu}^{x,\alpha}(\emptyset) = 0,\ \check{\mu}^{x,\alpha}(N) = 1$$

Les mesures floues solutions de $S_\mu(x) = \alpha$

$$\{\mu | S_\mu(x) = \alpha\} = \begin{cases} \emptyset \text{ if } x_{(n)} < \alpha \text{ ou } x_{(1)} > \alpha \\ \{\mu | \check{\mu}^{x,\alpha} \leq \mu \leq \hat{\mu}^{x,\alpha}\} \text{ sinon} \end{cases}$$

Représentation d'une relation de préférence

- On a une relation de préférence sur des objets $x^1, \ldots, x^p$
  - représentée par un score global attribué aux objets.
  - Le score global de x^i est noté α^i.
- On cherche μ telle que S_μ représente cette relation.

Représentation d'une relation de préférence

- On a une relation de préférence sur des objets $x^1, \ldots, x^p$
  - représentée par un score global attribué aux objets.
  - Le score global de x^i est noté α^i.
- On cherche μ telle que S_μ représente cette relation.
- Pour chaque objet x^i on construit les mesures floues : $\check{\mu}^{x^i,\alpha^i}$ et $\hat{\mu}^{x^i,\alpha^i}$

Représentation d'une relation de préférence

- On a une relation de préférence sur des objets $x^1, \ldots, x^p$
  - représentée par un score global attribué aux objets.
  - Le score global de x^i est noté α^i.
- On cherche μ telle que S_μ représente cette relation.
- Pour chaque objet x^i on construit les mesures floues : $\check{\mu}^{x^i,\alpha^i}$ et $\hat{\mu}^{x^i,\alpha^i}$
- La mesure floue μ cherchée est telle que

$$\bigvee_{i=1}^{p} \check{\mu}^{x^i,\alpha^i} \leq \mu \leq \bigwedge_{i=1}^{p} \hat{\mu}^{x^i,\alpha^i}$$

Représentation d'une relation de préférence

- On a une relation de préférence sur des objets $x^1, \ldots, x^p$
  - représentée par un score global attribué aux objets.
  - Le score global de x^i est noté α^i.
- On cherche μ telle que S_μ représente cette relation.
- Pour chaque objet x^i on construit les mesures floues : $\check{\mu}^{x^i,\alpha^i}$ et $\hat{\mu}^{x^i,\alpha^i}$
- La mesure floue μ cherchée est telle que

$$\bigvee_{i=1}^{p} \check{\mu}^{x^i,\alpha^i} \leq \mu \leq \bigwedge_{i=1}^{p} \hat{\mu}^{x^i,\alpha^i}$$

  - cet ensemble peut-être vide
  - on n'a pas besoin de comparer terme à terme ce qui donne une complexité raisonable.

Apprentissage avec l'intégrale de Sugeno

Travail en collaboration avec Henri Prade et Mathieu Serrurier du l'IRIT.

- On a construit une famille d'intégrales de Sugeno compatibles avec un ensemble de données d'apprentissage.
  - une famille d'intégrales de Sugeno est rarement compatible avec toutes les données.
  - méthode pour avoir la plus petite partition possible.
    Chaque ensemble de données est compatible avec une famille d'intégrales de Sugeno.

Apprentissage avec l'intégrale de Sugeno

Travail en collaboration avec Henri Prade et Mathieu Serrurier du l'IRIT.

- On a construit une famille d'intégrales de Sugeno compatibles avec un ensemble de données d'apprentissage.
  - une famille d'intégrales de Sugeno est rarement compatible avec toutes les données.
  - méthode pour avoir la plus petite partition possible.
    Chaque ensemble de données est compatible avec une famille d'intégrales de Sugeno.
- Application : calcul de la charge mentale du personnel aérien en vol.
  - Le personnel s'auto évalue suivant 6 critères et se donne une évaluation globale.
  - But : la prédiction de cette note globale .
  - A partir de 811 données nous obtenons 4 grandes familles d'individus qui correspondent à 4 profils différents.

Description d'objets à l'aide de l'intégrale de Sugeno

Travail en collaboration avec Henri Prade

- $\mathcal{P}$ un ensemble de proriétés,
- $\mathcal{O}$ est un ensemble d'objets décrits par ces propriétés.
  Exemple :

	p_1	p_2	p_3	p_4
o_1	0.5	1	1	1
o_2	1	0.5	1	0
o_3	1	1	0	0
o_4	0.1	1	0.4	0.2

- Les objets acceptables vérifient certaines propriétés ou ne vérifient pas certaines propriétés.

Description d'objets à l'aide de l'intégrale de Sugeno

Travail en collaboration avec Henri Prade

- $\mathcal{P}$ un ensemble de proriétés,
- $\mathcal{O}$ est un ensemble d'objets décrits par ces propriétés.
  Exemple :

	p_1	p_2	p_3	p_4
o_1	0.5	1	1	1
o_2	1	0.5	1	0
o_3	1	1	0	0
o_4	0.1	1	0.4	0.2

- Les objets acceptables vérifient certaines propriétés ou ne vérifient pas certaines propriétés.
- Comment trouver les objets acceptables à l'aide de l'intégrale de Sugeno ?

Description d'objets à l'aide de l'intégrale de Sugeno

- $\sigma : 2^{\mathcal{P}} \rightarrow [0,1]$ une fonction d'ensemble
  un ensemble de propriétés T est important si $\sigma(T) = 1$.
  S_μ l'intégrale de Sugeno associéee à la mesure floue

$$\mu(S) = \vee_{T \subseteq S} \sigma(T).$$

- Propriétés de S_μ :
  - $S_\mu(o) = 1 \Rightarrow o$ satisfait toutes les propriétés d'un ensemble important,
  - $S_\mu(o) = 0 \Rightarrow o$ ne satisfait pas au moins une propriété dans chaque ensemble de propriétés important.

- $\Rightarrow$ Utilisation d'une ou de deux intégrales de Sugeno pour savoir si on retient ou non un objet o

Exemple

- $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$
- les objets acceptables vérifient p_1 et p_2 avec $\sigma(\{p_1\}) = 1$, $\sigma(\{p_2\}) = 0.5$ et 0 ailleurs.

$$\left.\begin{array}{l} S_\mu(o_1) = S_\mu(0.5, 1, 1, 1) = 0.5 \\ S_\mu(o_2) = S_\mu(1, 0.5, 1, 0) = 1 \\ S_\mu(o_3) = S_\mu(1, 1, 0, 0) = 1 \\ S_\mu(o_4) = S_\mu(0, 1, 0.4, 0.2) = 0.5 \end{array}\right\} o_2 \text{ et } o_3 \text{ sont acceptables .}$$

Exemple

- $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$
- les objets acceptables vérifient p_1 et p_2 avec $\sigma(\{p_1\}) = 1$, $\sigma(\{p_2\}) = 0.5$ et 0 ailleurs.

$$\left.\begin{array}{l} S_\mu(o_1) = S_\mu(0.5, 1, 1, 1) = 0.5 \\ S_\mu(o_2) = S_\mu(1, 0.5, 1, 0) = 1 \\ S_\mu(o_3) = S_\mu(1, 1, 0, 0) = 1 \\ S_\mu(o_4) = S_\mu(0, 1, 0.4, 0.2) = 0.5 \end{array}\right\} o_2 \text{ et } o_3 \text{ sont acceptables .}$$

- on rajoute que les objets acceptables n'ont pas les propriétés p_3 et p_4 avec $\sigma'(\{p_3\}) = 1$ $\sigma'(\{p_4\}) = 0.5$, 0 ailleurs.

$$\left.\begin{array}{l} S_{\mu'}(o_1) = S_{\mu'}(0.5, 1, 1, 1) = 1 \\ S_{\mu'}(o_2) = S_{\mu'}(1, 0.5, 1, 0) = 1 \\ S_{\mu'}(o_3) = S_{\mu'}(1, 1, 0, 0) = 0 \\ S_{\mu'}(o_4) = S_{\mu'}(0, 1, 0.4, 0.2) = 0.4 \end{array}\right\} o_3 \text{ est le seul objet acceptable.}$$

Plan

Conclusion

- L'intégrale de Sugeno discrète sur un **ensemble totalement ordonné**.
- L'intégrale de Sugeno discrète **sur un treillis** :
  L'échelle d'évaluation n'est plus un ensemble totalement ordonné.
- L'intégrale de Sugeno **non discrète** :
  L'ensemble de départ est infini.