Capacités qualitatives et variantes des intégrales de Sugeno

Agnès Rico
(Travail avec Didier Dubois, Henri Prade et Bruno Teheux)

ERIC Université de Lyon

Juillet 2018

L'intégrale de Sugeno : la plus connue des fonctions d'agrégation qualitatives

- fonctions d'agrégation classiquement utlisées sur **une échelle qualitative**,
  - elles utilisent seulement le minimum et le maximum (ensemble totalement ordonné, treillis),
  - On suppose l'existence d'une fonction qui inverse l'ordre sur l'échelle (algèbre de Kleene).
- elles sont utilisées en decision dans l'incertain et en decision multi critères.
- elles sont définies à l'aide de capacités ou mesures floues
  - représentant la probabilité des evènements, l'importance des ensembles de critères.
  - utilisées comme seuils sur les utilités.

Contenu de l'exposé

- Capacités qualitatives
- Propriétés des intégrales de Sugeno
- Variantes des intégrales de Sugeno basées sur les implications
- Lien avec des représentations logiques.

Capacités qualitatives

- un ensemble fini de critères ou états de la nature $\mathcal{C} = \{1, \ldots, n\} = [n]$
- l'échelle L est un ensemble totalement ordonné avec
  - un plus haut niveau 1, un plus petit niveau 0,
  - une application renversant l'ordre $t \mapsto 1 - t$

Une q-capacité (ou mesure floue) est une fonction $\gamma : 2^{\mathcal{C}} \to L$ *telle que* $\gamma(\emptyset) = 0; \gamma(\mathcal{C}) = 1$; et si $A \subseteq B$ alors $\gamma(A) \leq \gamma(B)$.

La capacité conjuguée γ^c d'une capacité γ est une capacité définie par $\gamma^c(A) = 1 - \gamma(\overline{A}), \forall A \subseteq C$, où $\overline{A}$ est le complémentaire de l'ensemble A.

Deux cas particuliers

Une mesure de possibilité est une capacité *maxitive*

$$\Pi(A \cup B) = \max(\Pi(A), \Pi(B))$$

- La distribution de possibilité π : $\pi(i) = \Pi(\{i\})$ est suffisante pour retrouver la mesure de possibilité : $\Pi(A) = \max_{i \in A} \pi(i)$
- La valeur $\pi(i)$ est le degré de faisabilité, l'importance, de i
- $\exists i \in \mathcal{C} : \pi(i) = 1$.

Une mesure de nécessité est une capacité *minitive*

$$N(A \cap B) = \min(N(A), N(B))$$

- $N(A) = \min_{i \notin A} \iota(i)$ avec $\iota(i) = N(\mathcal{C} \setminus \{i\})$ le degré d'impossibilité de i.
- $N(A) = 1 - \Pi(\overline{A})$: la mesure de possibilité et la mesure de nécessité sont conjuguées l'une de l'autre avec $\iota(i) = 1 - \pi(i)$.

La transformée de Moebius qualitative

La transformée de Moebius qualitative d'une capacité γ : $\gamma_\# : 2^{\mathcal{C}} \to L$

$$\gamma_\#(E) = \gamma(E) \text{ si } \gamma(E) > \vee_{B \subsetneq E} \gamma(B)$$

et 0 sinon (Grabisch, Mesiar, 1997).

$\mathcal{F}^\gamma = \{E, \gamma_\#(E) > 0\}$ est l'ensemble des ensembles focaux de γ.

La transformée de Moebius qualitative contient l'information minimale pour reconstruire la capacité γ

$$\gamma(A) = \max_{E \subseteq A} \gamma_\#(E)$$

- Pour une mesure de possibilité $\Pi_\#(A) = \pi(i)$ si $A = \{i\}$ et 0 sinon.
- $\gamma_\#$ est une distribution de possibilité sur $2^{\mathcal{C}}$.

Les q-capacités sont des possibilités inférieures

On exploite l'analogie entre les probabilités et les mesures de possibilité

Le coeur possibiliste d'une q-capacité γ

$$\mathcal{C}_q(\gamma) = \{\pi : \Pi(A) \geq \gamma(A), \forall A \subseteq S\}.$$

- $\mathcal{C}_q(\gamma)$ n'est jamais vide.
- $\mathcal{C}_q(\gamma)$ est un semi-treillis supérieur pour l'ordre $\pi \leq \pi'$

Proposition

Toute capacité qualitative est une possibilité inférieure :

$$\gamma(A) = \min_{i=1}^{k} \Pi_i(A),$$

pour les k plus spécifiques mesures de possibilité (plus petits éléments) Π_i de $\mathcal{C}_q(\gamma)$.

Les q-capacités sont des mesures de nécessité inférieures

Le coeur possibiliste dual d'une q-capacité γ est :

$$\mathcal{D}_q(\gamma) = \{\pi : N(A) \leq \gamma(A), \forall A \subseteq S\} = \mathcal{C}_q(\gamma^c).$$

- $\mathcal{D}_q(\gamma)$ n'est jamais vide
- $\mathcal{D}_q(\gamma)$ est un semi-treillis supérieur pour l'ordre $\pi \leq \pi'$

Proposition

Toute capacité qualitative est une nécessité supérieure :

$$\gamma(A) = \max_{i=1}^{\ell} N_i(A),$$

pour les ℓ plus spécifiques mesures de possibilité (plus petits éléments) de $\mathcal{C}_q(\gamma^c)$.

L'intégrale de Sugeno

Soit $f : \mathcal{C} \to L$ une fonction représentant une alternative.

Définition

L'intégrale de sugeno de f par rapport à la q-capacité γ est

$$\oint_{\gamma}(f) = \max_{A \subseteq \mathcal{C}} \min(\gamma(A), \min_{i \in A} f_i)$$

En MCDM, f_i est l'évaluation du critère i, et $\oint_{\gamma}(f)$ mesure avec quel niveau il existe un groupe A de critères important qui sont tous satisfait.

$\oint_{\gamma}(f)$ est la médiane de $2|\mathcal{C}| - 1$ valeurs :

$$\{f_i, i = 1 \ldots |\mathcal{C}|\} \cup \{\gamma(\{1, 2, \ldots i\}) : i = 1 \ldots |\mathcal{C}| - 1\}$$

où on a supposé $f_1 \leq \cdots \leq f_n$.

Fonction médiane décomposable

- $\psi(v_1, v_2) = median(v_1, c, v_2)$ est une fonction associative.
- Pour $c \in L$, $i \in [1, 2, \dots n]$, et tout vecteur $f \in L^n$, on note $f_i^c = (f_1, \dots, f_{i-1}, c, v_{i+1}, \dots, f_n)$.
- Une fonction $\psi \colon L^n \to L$ est *médiane décomposable* si pour chaque indice i

$$\psi(f) = median\big(\, \psi(f_i^0)\, ,\, v_i\, ,\, \psi(f_i^1)\, \big), \qquad \text{pour chaque } f \in L^n.$$

Théorème (Marichal) : Une fonction $p \colon L^n \to L$ est une intégrale de Sugeno **ssi** elle est idempotente et médiane décomposable.

intégrale de Sugeno : expressions équivalentes

L' intégrale de Sugeno a une forme conjonctive et une forme disjonctive.

$$\begin{aligned}
\oint_\gamma (f) &= \max_{A\subseteq\mathcal{C}} \min(\gamma(A), \min_{i\in A} f_i) = \min_{A\subseteq\mathcal{C}} \max(\gamma(\overline{A}), \max_{i\in A} f_i) && (1)\\
&= \max_{A\in\mathcal{F}^\gamma} \min(\gamma_\#(A), \min_{i\in A} f_i) = \min_{A\in\mathcal{F}^{\gamma^c}} \max((1-\gamma^c_\#(A)), \max_{i\in A} f_i) && (2)\\
&= \max_{i=1}^{n} \min(f_i, \gamma(\{i,\dots,n\})) = \min_{i=1}^{n} \max(f_i, \gamma(\{i+1,\dots,n\})). && (3)\\
&= \max_{a\in L} \min(a, \gamma(\{i : f_i \geq a\})) = \min_{a\in L} \max(a, \gamma(\{i : f_i > a\})). && (4)
\end{aligned}$$

où on a supposé $f_1 \leq \cdots \leq f_n$.

Propriétés charactéristiques des intégrales de Sugeno

$f, g \in L^{\mathcal{C}}$ sont *comonotones*, si pour tout $i, j \in [n]$, si $f(i) < f(j)$ alors $g(i) \leq g(j)$, et si $g(i) < g(j)$ alors $f(i) \leq f(j)$.

Theorem

Soit $I : L^{\mathcal{C}} \to L$. Il existe une capacité γ telle que $I(f) = \oint_{\gamma} f$ pour tout $f \in L^{\mathcal{C}}$ si et seulement si

1. $I(\max(f, g)) = \max(I(f), I(g))$, pour tout $f, g \in L^{\mathcal{C}}$ comonotones.
2. $I(\min(a_{\mathcal{C}}, f)) = \min(a, I(f))$, pour tout $a \in L$ et $f \in L^{\mathcal{C}}$.
3. $I(1_{\mathcal{C}}) = 1$

De manière équivalente, les conditions peuvent être remplacées par les conditions suivantes :

1'. $I(\min(f, g)) = \min(I(f), I(g))$, pour tout $f, g \in L^{\mathcal{C}}$ comonotones.

2'. $I(\max(a_{\mathcal{C}}, f)) = \max(a, I(f))$, pour tout $a \in L$ et $f \in L^{\mathcal{C}}$.

3'. $I(0_{\mathcal{C}}) = 0$

Remarques

- La double caractérisation provient de l'equivalence entre les formes conjonctives et disjonctives.
- Le max pondéré est caractérisé en ajoutant $I(\max(f,g)) = \max(I(f), I(g))$, pour tout $f, g \in L^{\mathcal{C}}$. Alors $I(1_A) = \Pi(A)$.
- Le min pondéré est caractérisé en ajoutant $I(\min(f,g)) = \min(I(f), I(g))$, pour tout $f, g \in L^{\mathcal{C}}$. Alors $I(1_A) = N(A)$.

L'intégrale de Sugeno est une intégrale possibiliste inférieure

Lorsque γ est une mesure de possibilité ou une mesure de nécessité,

- $\oint_{\Pi}(f) = MAX_{\pi}(f) = \max_{i \in \mathcal{C}} \min(\pi(i), f_i)$ (max prioritaire).
- $\oint_{N}(f) = MIN_{\pi}(f) = \min_{i \in \mathcal{C}} \max((1 - \pi(i)), f_i)$ (min prioritaire).

L'intégrale de Sugeno integral comme inf et sup

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma}(f) &= \min_{\pi \in \mathcal{C}_q(\gamma)} MAX_{\pi}(f) \\ &= \max_{\pi \in \mathcal{C}_q(\gamma^c)} MIN_{\pi}(f) \end{aligned}$$

Représentation de l'intégrale de Sugeno en règles si alors

$$\oint_\gamma (f) = \max_{A \in \mathcal{F}(\gamma)} \min(\gamma_\#(A), \min_{i \in A} f_i) = \min_{A \in \mathcal{F}(\gamma^c)} \max((1 - \gamma^c_\#(A), \max_{i \in A} f_i))$$

Si nous connaissons l'importance de certains groupes de critères $\mathcal{F} = \{(A_i, \gamma_i) : i = 1, \dots k\}$ avec $\max_i \gamma_i = 1$, nous pouvons

- définir une fonction d'ensemble monotone $\gamma(A) = \max_{A_i \subseteq A} \gamma_i$ et nous calculons la valeur de décision pour f : $\oint_\gamma (f)$.
- ou écrire un ensemble de règles si alors de la forme (Dubois, Prade, Rico, 2014) :
  - Si $f_j \geq \theta, \forall j \in A$ et $\gamma_\#(A) \geq \theta$, alors $\oint_\gamma (f) \geq \theta$, $A \in \mathcal{F}^\gamma$.
  - Si $f_j \leq \theta, \forall j \in B$ et $\gamma^c_\#(A) \geq 1 - \theta$, alors $\oint_\gamma (f) \leq \theta$, $B \in \mathcal{F}^{\gamma^c}$.

Motivations pour étendre l'intégrale de Sugeno

$MAX_\pi(f) = \max_{i \in \mathcal{C}} \min(\pi(i), f_i) \quad MIN_\pi(f) = \min_{i \in \mathcal{C}} \max((1 - \pi(i)), f_i).$

- Le rôle des poids dans $MAX_\pi(f)$ (resp. $MIN_\pi(f)$) est de limiter la possibilité d'augmenter (resp. diminuer) l'évaluation globale.
- On peut utiliser les poids différemment avec des conjonctions plus générales dans $MAX_\pi(f)$ et implications plus générales dans $MIN_\pi(f)$.

Exemple

Sélectionnons f comme suit :

- Si f dépasse le seuil π_i pour tout $i \in \mathcal{C}$ alors f est pleinement satisfaisant.
- sinon, l'évaluation globale de f est sa pire évaluation locale.

Minimum pondéré et maximum pondéré généralisés

$$MIN_{\pi}^{\rightarrow}(f) = \min_{i \in \mathcal{C}} \pi(i) \rightarrow f_i.$$

$$MAX_{\pi}^{\otimes}(f) = \max_{i \in \mathcal{C}} \pi(i) \otimes f_i.$$

Remarques

- Nous demandons les conditions minimales pour $\otimes$:
  - Le meilleur élément 1 est l'identité à gauche : $1 \otimes x = x$,
  - L'élément inférieur 0 est absorbeur à gauche $0 \otimes x = 0$,
  - Pour tout $a \in L$, les application $x \mapsto a \otimes x$, $x \mapsto x \otimes a$ sont croissantes.
- C'est une **conjonction à gauche**
- Une conjonction à gauche est ni associative ni commutative.

Minimum pondéré et maximum pondéré généralisés

$MIN_\pi^{\rightarrow}(f) = \min_{i \in \mathcal{C}} \pi(i) \rightarrow f_i \qquad MAX_\pi^{\otimes}(f) = \max_{i \in \mathcal{C}} \pi(i) \otimes f_i.$

Remarques :

- Si $\rightarrow$ est l'implication de Gödel : $a \rightarrow_G b = \begin{cases} 1 \text{ si } a \leq b \\ b \text{ sinon} \end{cases}$.

  On retrouve l'exemple précédent.
- On veut préserver la Dualité de Morgan entre $MIN_\pi(f)$ et $MAX_\pi(f)$: $MAX_\pi^{\rightarrow}(f) = 1 - MIN_\pi^{\otimes}(1 - f)$.
  On doit alors avoir $a \otimes b = 1 - a \rightarrow (1 - b)$.
- Avec l'implication de Gödel on a :

  $a \otimes_G b = 1 - a \rightarrow_G (1 - b) = \begin{cases} 0 \text{ si } a \leq 1 - b \\ b \text{ sinon} \end{cases}$.

Intégrales qualitatives et co-intégrales

Forme disjonctive

Soit $\otimes$ une conjunction : une intégrale qualitative est $\oint_\gamma^{\otimes} : L^{\mathcal{C}} \to L$ telle que

$$\oint_\gamma^{\otimes} f = \max_{A \subseteq C} \left(\gamma(A) \otimes \min_{i \in A} f_i\right)$$

Forme conjonctive

Soit $\to$ est une implication. Une co-intégrale qualitative est $\oint_\gamma^{\to} : L^{\mathcal{C}} \to L$ telle que

$$\oint_\gamma^{\to} f = \min_{A \subseteq C} \left(\gamma^c(A) \to \max_{i \in A} f_i\right),$$

- $\to$ et $\otimes$ sont semi-duales.
- si $\otimes = \wedge$ alors $\to$ est l'implication de Kleene et les deux expressions coincident avec l'intégrale de Sugeno.

Quelques remarques

Dans Dubois et al. (Inf.Sci, 2016), nous avons considéré le cas $\rightarrow = \rightarrow_G$ (soft integrals) et le cas $\rightarrow = \rightarrow_{GC}$ (drastic integrals).

- Implication de Gödel :
  Le vecteur $f^{\rightarrow_G}$ prend les valeurs $(\gamma^c(\{i\}) \rightarrow_G f_i) \in \{f_i, 1\}$
  On a une version souple de f car $f^{\rightarrow_G} \geq f$.
- L'implication de Gödel contraposée :
  les valeurs locales $(1 - f_i) \rightarrow_{GC} (1 - \gamma^c(\{i\})) \in \{\gamma^c(\{i\}), 1\}$ deviennent binaires.
  On obtient une version drastique de f.

A warning

On a $\oint_\gamma^{\wedge} f \;=\; \oint_\gamma^{\mathcal{S}(\wedge)}$ pour l'intégrale de Sugeno.

En général les intégrales et les co-intégrales ne coincident pas

$$\oint_\gamma^{\otimes} f \neq \oint_\gamma^{\mathcal{S}(\otimes)}$$

Exemples

- En utilisant $\rightarrow = \rightarrow_G$ et $= \otimes_G = \mathcal{S}(\rightarrow_G)$: $\oint_\gamma^{\otimes_G}(f) \geq \oint_\gamma^{\rightarrow_G}(f)$ et $\oint_\gamma^{\otimes_{GC}}(f) \geq \oint_\gamma^{\rightarrow_{GC}}(f)$ (les inégalités peuvent être strictesthe).
- En utilisant le minimum nilpotent $\otimes = \underline{\wedge}$, t.q. $a \underline{\wedge} b = \begin{cases} \min(a,b) \text{ si } a > 1-b \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$, alors $\oint_\gamma^{\underline{\wedge}}(f) \leq \oint_\gamma^{\mathcal{S}(\underline{\wedge})}(f)$.

Propriétés des q-intégrales et co-intégrales

Supposons $f_1 \leq \cdots \leq f_n$

Formes simplifiées

$$\oint_{\gamma}^{\otimes} f = \max_{i=1}^{n} \gamma(\{i, \cdots, n\}) \otimes f_{(i)} = \max_{a \in L} \gamma(\{f \geq a\}) \otimes a$$

$$\oint_{\gamma}^{\rightarrow} (f) = \min_{i=1}^{n} \gamma^c(\{1, \cdots, i\}) \rightarrow f_{(i)} = \min_{a \in L} \gamma^c(\{f \leq a\}) \rightarrow a.$$

Dualité de De Morgan

$$\oint_{\gamma}^{\otimes} f = 1 - \oint_{\gamma^c}^{\mathcal{S}(\otimes)} (1 - f)$$

Minimum et maximum pondérés des cas particuliers d'intégrales qualitatives

Propriétés

- Si $\otimes$ est une conjonction et γ est une mesure de possibilté Π alors l'intégrale est un max pondéré :

$$\oint_{\Pi}^{\otimes} = MAX_{\pi}^{\otimes}$$

- Si $\rightarrow$ est la semi-duale de la conjonction et si γ est une mesure de necessité N, alors la co intégrale est un min pondéré :

$$\oint_{N}^{\rightarrow} = MIN_{\pi}^{\rightarrow}$$