Etude des problèmes NP-Complets sur les fasciagraphes

Marwane BOUZNIF
Julien MONCEL
Myriam PREISSMANN

Laboratoire G-SCOP

05/11/2009

Plan

Sommaire

Motivations

- Classe de graphes qui généralise les grilles

Motivations

- Classe de graphes qui généralise les grilles
- Utilisés dans de nombreux cas pratiques (chimie des polymères, représentation des systèmes VLSI...)

Motivations

- Classe de graphes qui généralise les grilles
- Utilisés dans de nombreux cas pratiques (chimie des polymères, représentation des systèmes VLSI...)
- Modification de l'article de Klavžar et Vesel :

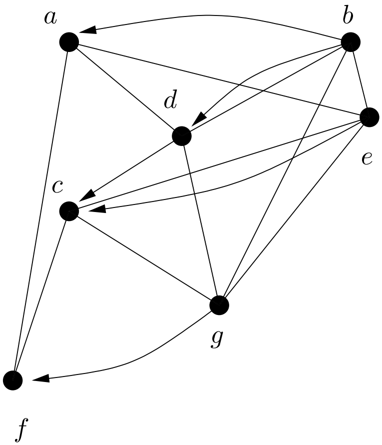
Sandi Klavžar and Aleksander Vesel. Computing graph invariants on rotagraphs using dynamic algorithm approach : the case of $(2,1)$-colorings and independence numbers. *Discrete Appl. Math.*, 129(2-3) :449-460, 2003.

Motivations

- Classe de graphes qui généralise les grilles
- Utilisés dans de nombreux cas pratiques (chimie des polymères, représentation des systèmes VLSI...)
- Modification de l'article de Klavžar et Vesel
- Nombreux résultats proches sur le domaine, nécessité de trouver une méthode générique

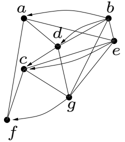
Sommaire

Les fasciagraphes



Un graphe mixte $M = (V, E, A)$

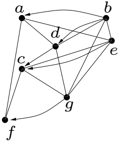
Les fasciagraphes



Un graphe mixte
$M = (V, E, A)$

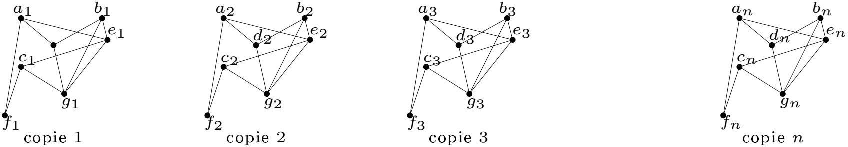
- Un entier n

Les fasciagraphes



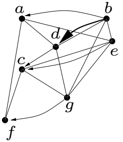
Un graphe mixte
$M = (V, E, A)$

- Un entier n



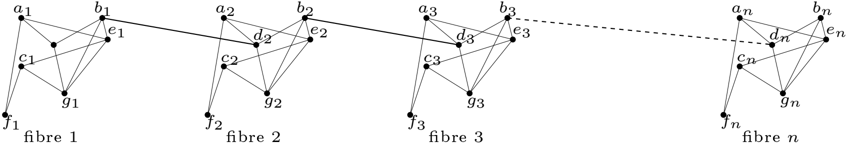
n copies du graphe (V, E)

Les fasciagraphes



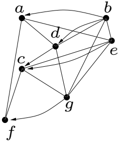
Un graphe mixte
$M = (V, E, A)$

- Un entier n



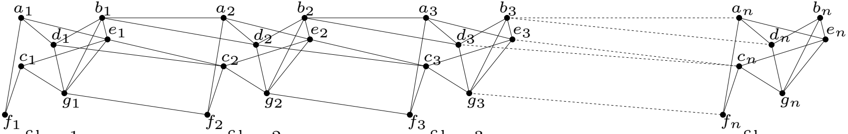
Les arêtes $b_i d_{i+1}$

Les fasciagraphes



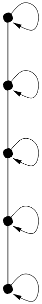
Un graphe mixte
$M = (V, E, A)$

- Un entier n



Le fasciagraphe $\psi_n(M)$

Une classe de graphe qui généralise les grilles

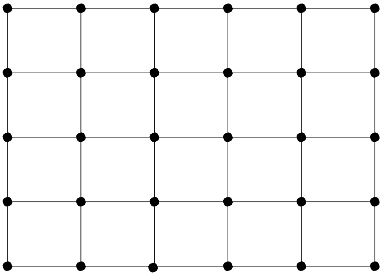


Le graphe mixte $M = (V, E, A)$

Une classe de graphe qui généralise les grilles

Un entier : $n = 6$

Une classe de graphe qui généralise les grilles



Le fasciagraphe $\psi_6(M)$ associé : la grille $G_{5,6}$

Les propriétés de graphes

Des problèmes de décision :

- existence d'un chemin hamiltonien ?
- existence d'un couplage parfait ?
- existence d'une coloration propre des sommets en moins de k couleurs ?
- existence d'un dominant parfait ? ...

Les propriétés bornées de fasciagraphes (q-propriétés)

Existence d'un type de fonctions f des sommets et/ou des arêtes du fasciagraphe dans $\{0, 1, ..., q-1\}$ qui caractérise les solutions du problème.

Les propriétés bornées de fasciagraphes (q-propriétés)

Existence d'un type de fonctions f des sommets et/ou des arêtes du fasciagraphe dans $\{0, 1, ..., q-1\}$ qui caractérise les solutions du problème.

La borne q est constante ou fonction de la taille de M le graphe mixte.

Les propriétés bornées de fasciagraphes (q-propriétés)

Existence d'un type de fonctions f des sommets et/ou des arêtes du fasciagraphe dans $\{0, 1, ..., q-1\}$ qui caractérise les solutions du problème.

Exemple : 3-coloration

Ensemble des fonctions f des sommets du fasciagraphe dans $\{0, 1, 2\}$ tel que pour toute arête xy du fasciagraphe, x n'est pas de la même couleur que y.

Pseudo-d-localité

Une propriété bornée $\mathcal{P}$ de fasciagraphe est pseudo-d-locale si et seulement s'il existe, pour tout graphe mixte $M = (V, E, A)$ et tout fasciagraphe $\psi_n(M)$ associé,

- Une propriété de début $\mathcal{P}^1$
- Une propriété de milieu $\mathcal{P}^2$
- Une propriété de fin $\mathcal{P}^3$

Pseudo-d-localité

Une propriété bornée $\mathcal{P}$ de fasciagraphe est pseudo-d-locale si et seulement s'il existe, pour tout graphe mixte $M = (V, E, A)$ et tout fasciagraphe $\psi_n(M)$ associé,

- Une propriété de début $\mathcal{P}^1$
- Une propriété de milieu $\mathcal{P}^2$
- Une propriété de fin $\mathcal{P}^3$

la restriction de f correspondant aux d premières fibres du fasciagraphe vérifie $\mathcal{P}^1(\psi_d(M))$

Pseudo-d-localité

Une propriété bornée $\mathcal{P}$ de fasciagraphe est pseudo-d-locale si et seulement s'il existe, pour tout graphe mixte $M = (V, E, A)$ et tout fasciagraphe $\psi_n(M)$ associé,

- Une propriété de début $\mathcal{P}^1$
- Une propriété de milieu $\mathcal{P}^2$
- Une propriété de fin $\mathcal{P}^3$

les restrictions de f correspondant à toutes les suites de d fibres du fasciagraphe, de la fibre 2 à la fibre $n-1$, vérifient $\mathcal{P}^2(\psi_d(M))$

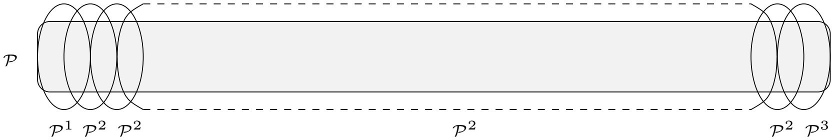
Pseudo-d-localité

Une propriété bornée $\mathcal{P}$ de fasciagraphe est pseudo-d-locale si et seulement s'il existe, pour tout graphe mixte $M = (V, E, A)$ et tout fasciagraphe $\psi_n(M)$ associé,

- Une propriété de début $\mathcal{P}^1$
- Une propriété de milieu $\mathcal{P}^2$
- Une propriété de fin $\mathcal{P}^3$

la restriction de f correspondant aux d dernières fibres du fasciagraphe vérifie $\mathcal{P}^3(\psi_d(M))$

Illustration des propriété pseudo-d-locales



Des propriétés bornées pseudo-d-locales de fasciagraphes

Propriété de k-coloration

$\mathcal{P}$: les fonctions f des sommets dans $\{0, 1, ..., k-1\}$ telles que pour tout arête xy du fasciagraphe $f(x) \neq f(y)$.

propriété **pseudo-2-locale** : $\mathcal{P}^1 = \mathcal{P}^2 = \mathcal{P}^3 = \mathcal{P}$

Des propriétés bornées pseudo-d-locales de fasciagraphes

Propriété de domination parfaite

$\mathcal{P}$: les fonctions f des sommets dans $\{0, 1\}$ tel que pour tout sommet x,

- $f(x) = 1$, ou
- il existe un unique y dans le voisinage de x tel que $f(y) = 1$.

Des propriétés bornées pseudo-d-locales de fasciagraphes

Propriété de domination parfaite

$\mathcal{P}$: les fonctions f des sommets dans $\{0,1\}$ tel que pour tout sommet x,

- $f(x) = 1$, ou
- il existe un unique y dans le voisinage de x tel que $f(y) = 1$.

propriété **pseudo-3-locale** :

- $\mathcal{P}^1$: les fonctions des sommets dans $\{0,1\}$ tel que pour tout sommet x des fibres 1 et 2,
  - $f(x) = 1$, ou
  - il existe un unique y dans le voisinage de x tel que $f(y) = 1$ (y dans les fibres 1, 2 ou 3).

Des propriétés bornées pseudo-d-locales de fasciagraphes

Propriété de domination parfaite

$\mathcal{P}$: les fonctions f des sommets dans $\{0,1\}$ tel que pour tout sommet x,

- $f(x) = 1$, ou
- il existe un unique y dans le voisinage de x tel que $f(y) = 1$.

propriété **pseudo-3-locale** :

- $\mathcal{P}^2$: les fonctions des sommets dans $\{0,1\}$ tel que pour tout sommet x de la fibre 2,
    - $f(x) = 1$, ou
    - il existe un unique y dans le voisinage de x tel que $f(y) = 1$ (y dans les fibres 1, 2 ou 3).

Des propriétés bornées pseudo-d-locales de fasciagraphes

Propriété de domination parfaite

$\mathcal{P}$: les fonctions f des sommets dans $\{0,1\}$ tel que pour tout sommet x,

- $f(x) = 1$, ou
- il existe un unique y dans le voisinage de x tel que $f(y) = 1$.

propriété **pseudo-3-locale** :

- $\mathcal{P}^3$: les fonctions des sommets dans $\{0,1\}$ tel que pour tout sommet x des fibres 2 et 3,
  - $f(x) = 1$, ou
  - il existe un unique y dans le voisinage de x tel que $f(y) = 1$ (y dans les fibres 1, 2 ou 3).

Sommaire

Le graphe orienté $\mathcal{G}$

Soit $\mathcal{P}$ une propriété bornée pseudo-d-locale de fasciagraphe.
Soit M un graphe mixte
Calcul de S ensemble des fonctions solutions de $\mathcal{P}^1(\psi_d(M))$, $\mathcal{P}^2(\psi_d(M))$ et $\mathcal{P}^3(\psi_d(M))$.

Création du graphe orienté $\mathcal{G} = (V, A)$

- $V = S \cup \{s, t\}$ avec s un sommet « de départ » et t un sommet « d'arrivée ».
- il existe un arc de x vers y si et seulement si la restriction de la solution x aux $d-1$ dernières fibres de $\psi_d(M)$ est identique à la restriction de la solution y aux $d-1$ premières fibres de $\psi_d(M)$ et x est une solution de $\mathcal{P}^1$ ou $\mathcal{P}^2$ et y est une solution de $\mathcal{P}^2$ ou $\mathcal{P}^3$.

Le graphe orienté $\mathcal{G}$

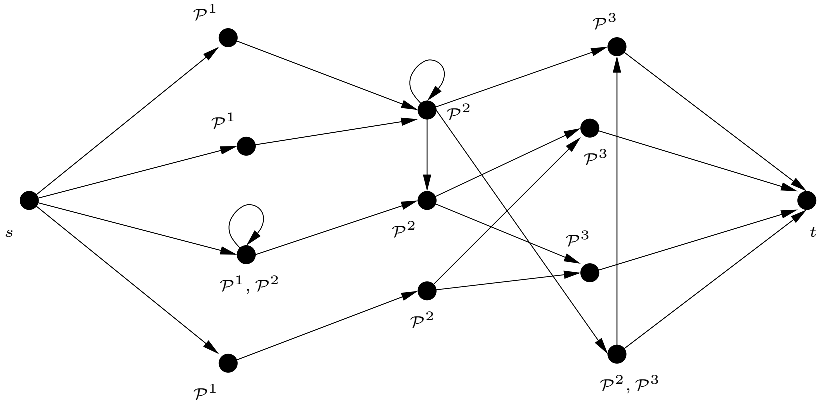


Illustration d'un graphe orienté $\mathcal{G}$ avec le type des sommets.

Parcours dans $\mathcal{G}$

Soit une propriété bornée $\mathcal{P}$ de fasciagraphe pseudo-d-locale et soit un graphe mixte M.

Pour tout entier n, il est possible de montrer que $\mathcal{P}(\psi_n(M)) \neq \emptyset$ si et seulement s'il existe un parcours orienté de longueur exactement $n - d + 2$ dans le graphe orienté $\mathcal{G}$ associé.

Trouver un parcours en temps constant

- graphe mixte M fixé (indépendant de l'entrée)
- propriété $\mathcal{P}$ pseudo-d-locale
- $\forall n \in \mathbb{N} : \mathcal{P}(\psi_n(M)) = \emptyset$? calculable en temps constant (indépendant de n)

Sommaire

Synthèse

- Définition des propriété bornées pseudo-d-locales de fasciagraphes
- Présentation d'un algorithme de résolution exécutable en temps constant à graphe mixte fixé pour toutes ces propriétés
- Corollaire : algorithme de résolution des problèmes en temps constant sur les grilles de hauteur bornée

Perspectives

- Meilleure définition des propriétés grâce à la logique
- Résultat similaire grâce à MSOL (définition d'une structure logique pour les fasciagraphes)
- Résultat similaire pour les problèmes d'optimisation