Complétion minimale en graphe d'intervalles en temps $O(n^2)$

Christophe Crespelle
Université de Paris 6

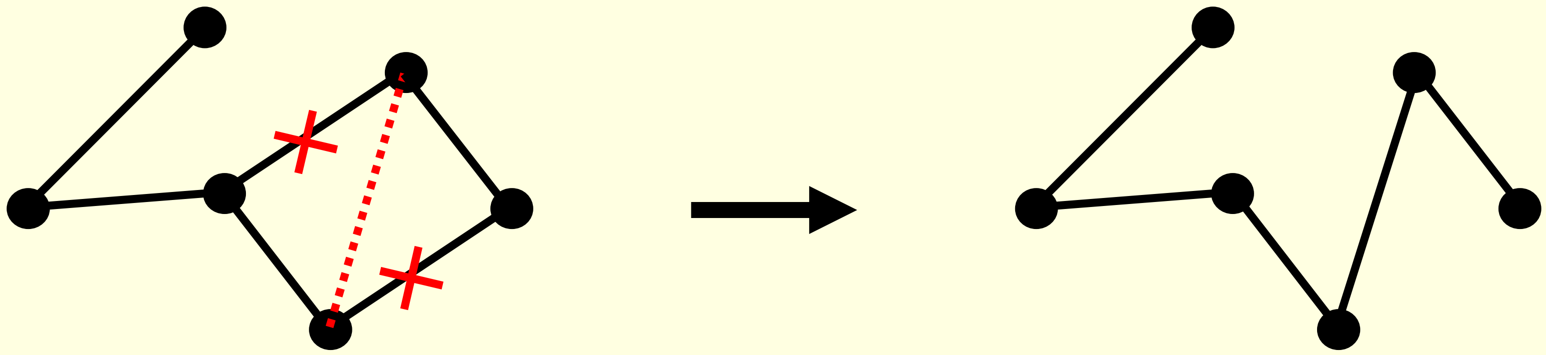
Ioan Todinca
Université d'Orléans

Plan

Complétion de graphes

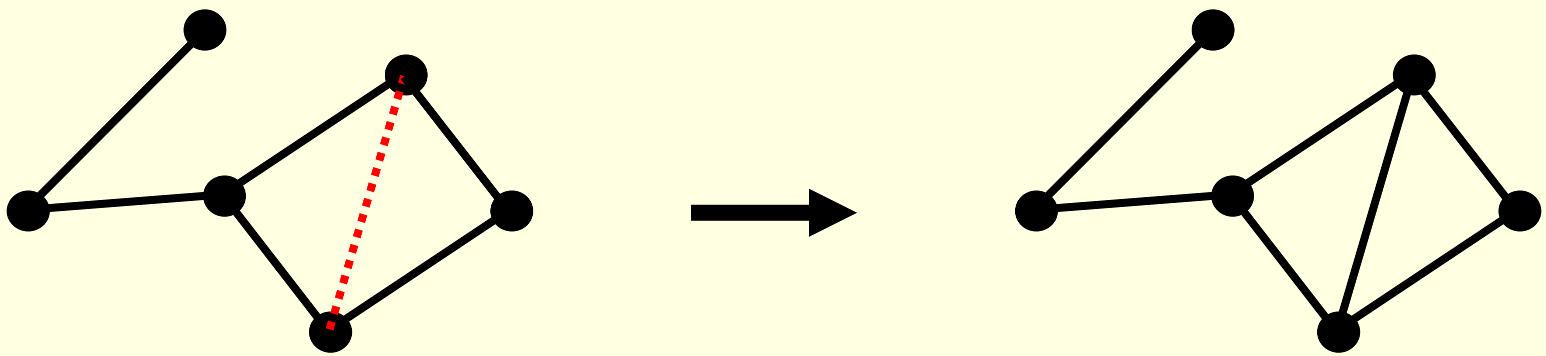
Edition de graphes

Classe de graphes



Complétion de graphes

Classe de graphes



Graphes d’intervalles

Complétion en graphe triangulé

Nombre minimum d'arêtes : NP-complet

Ensemble minimal d'arêtes: $O(n^{\alpha} \log n)$ [Heggernes et al. 2005]

ou

O(nm) [Rose et al. 1976]

→ Intérêt pour le calcul de la tree-width

Complétion en graphe triangulé

Nombre minimum d'arêtes : NP-complet

Ensemble minimal d'arêtes: O(n^{α} log n) [Heggernes et al. 2005]

ou

O(nm) [Rose et al. 1976]

→ Intérêt pour le calcul de la tree-width

Complétion en graphe d'intervalles

Nombre minimum d'arêtes : NP-complet

Ensemble minimal d'arêtes: O(nm') [Ohtsuki et al. 1981]

[Heggernes et al. 2005]

O(nm) [Suchan et Todinca 2009]

→ Intérêt pour le calcul de la path-width

Complétion en graphe triangulé

Nombre minimum d'arêtes : NP-complet

Ensemble minimal d'arêtes: $O(n^{\alpha} \log n)$ [Heggernes et al. 2005]

ou

$O(nm)$ [Rose et al. 1976]

→ Intérêt pour le calcul de la tree-width

Complétion en graphe d'intervalles

Nombre minimum d'arêtes : NP-complet

Ensemble minimal d'arêtes: $O(nm')$ [Ohtsuki et al. 1981]

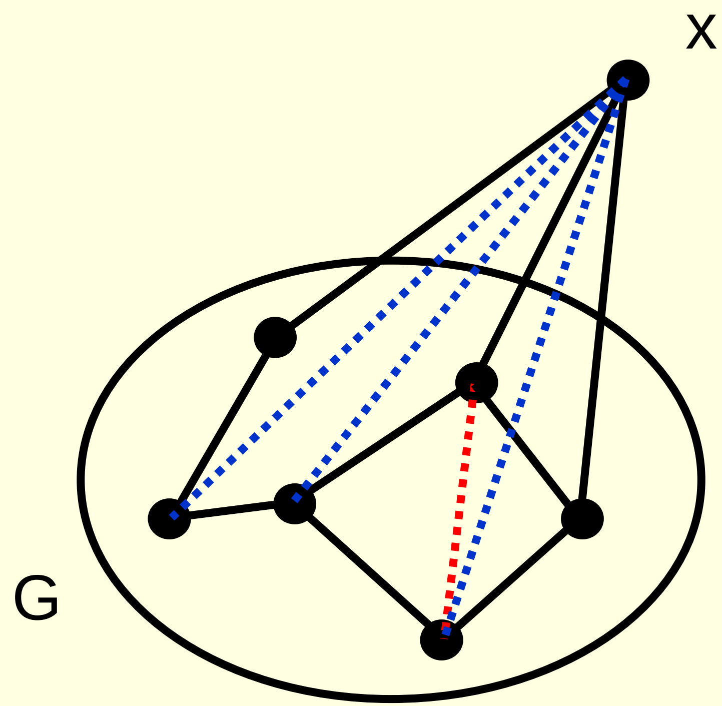
[Heggernes et al. 2005]

$O(nm)$ [Suchan et Todinca 2009]

→ $O(n^2)$

→ Intérêt pour le calcul de la path-width

L'approche incrémentale



H une complétion minimale de G

Complétion de H+x seulement avec des arêtes incidentes à x
(un ensemble minimal)

Complétion minimale de G+x

Complétion en graphe d’intervalles

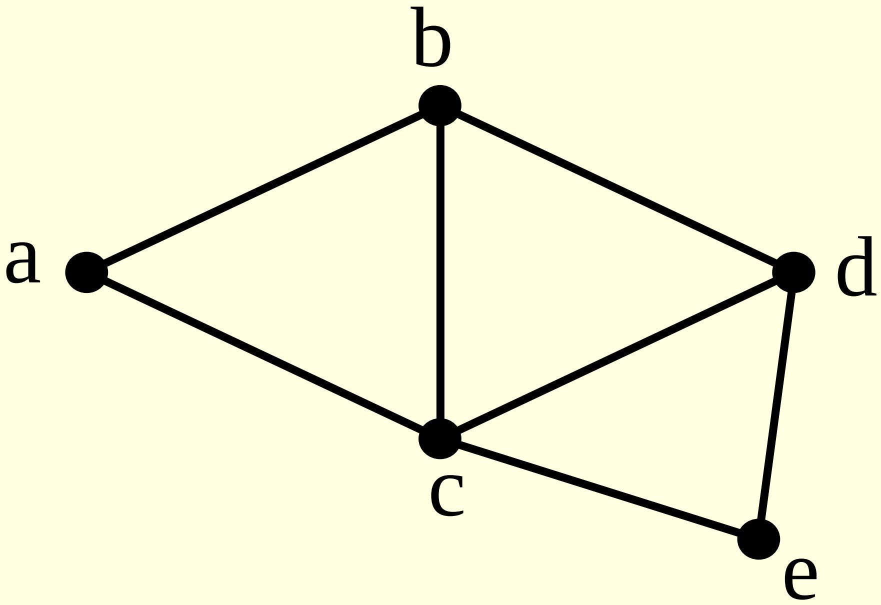
Nouveau Problème

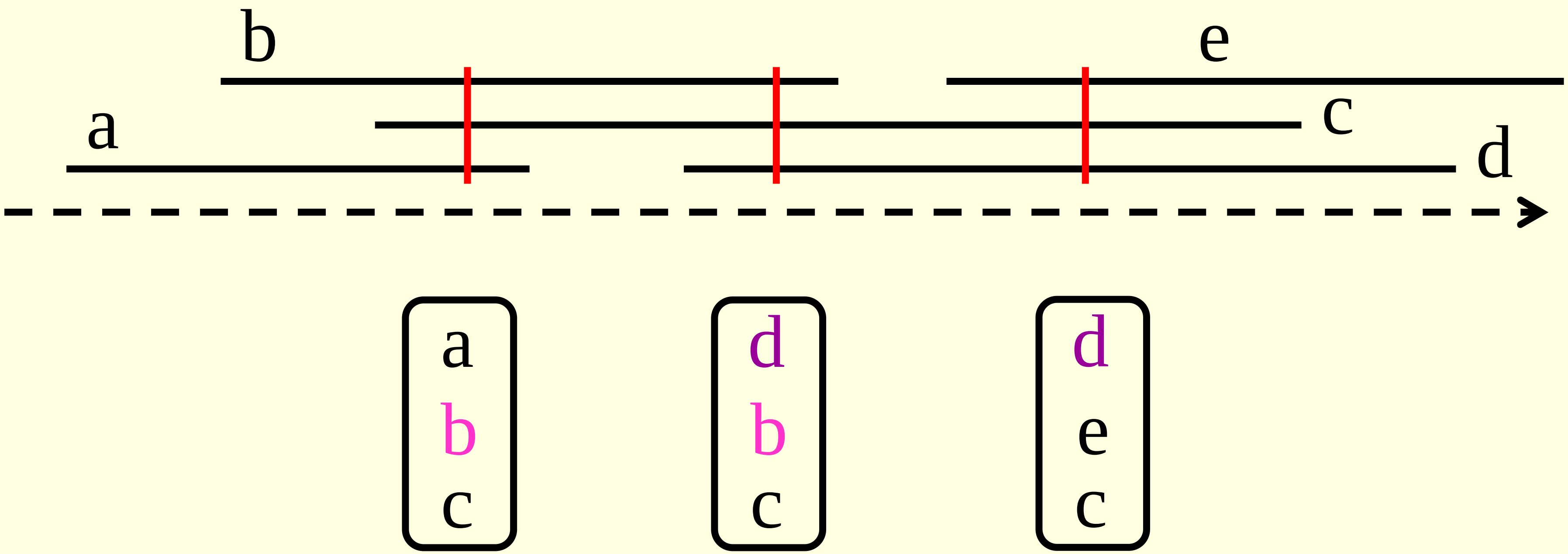
Donnée : Un graphe d’intervalles G
Un sommet x avec son voisinage N(x)

Résultat : Une complétion minimale du voisinage de x
Telle que G+x soit un graphe d’intervalles

Temps O(n) ?

Graphes d'intervalles

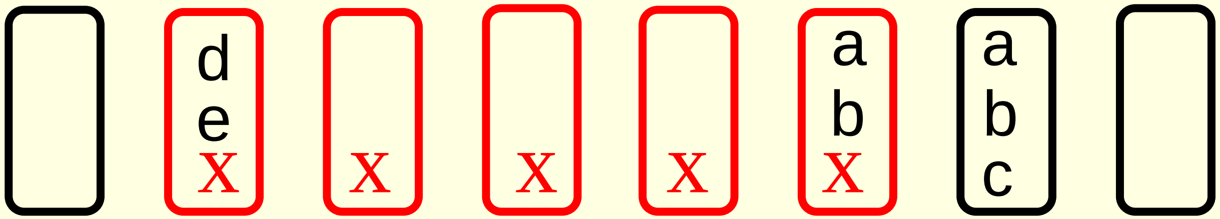




Plan

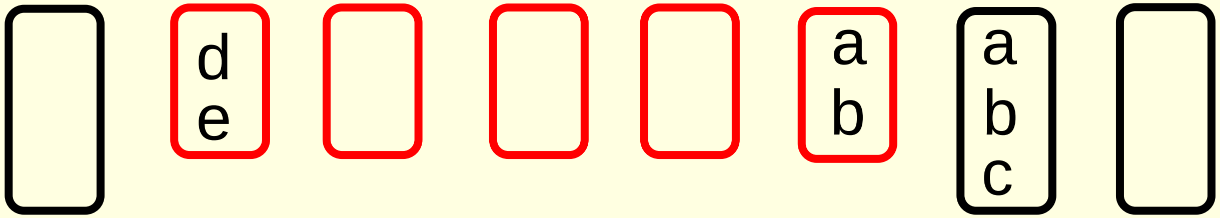
Complétion respectant un arrangement consécutif

Suppression de x dans un arrangement consécutif de G'



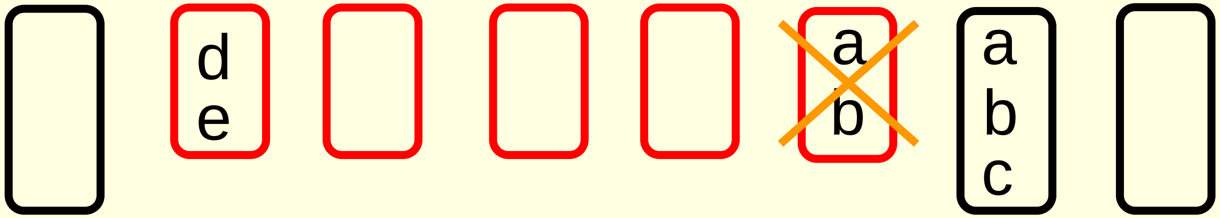
Complétion respectant un arrangement consécutif

Suppression de x dans un arrangement consécutif de G’



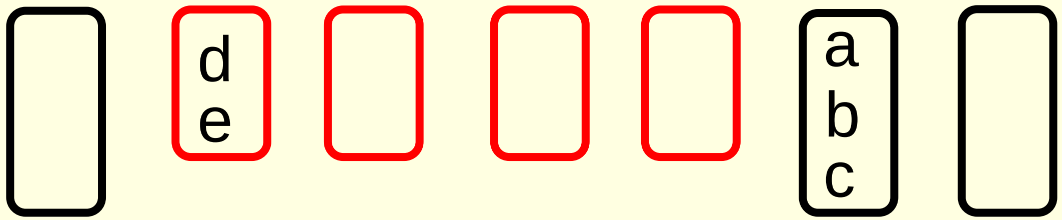
Complétion respectant un arrangement consécutif

Suppression de x dans un arrangement consécutif de G’



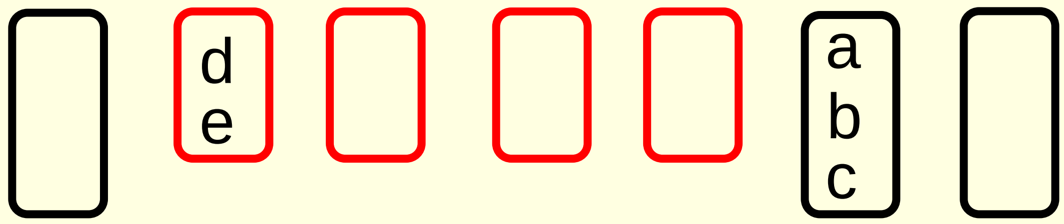
Complétion respectant un arrangement consécutif

Suppression de x dans un arrangement consécutif de G’

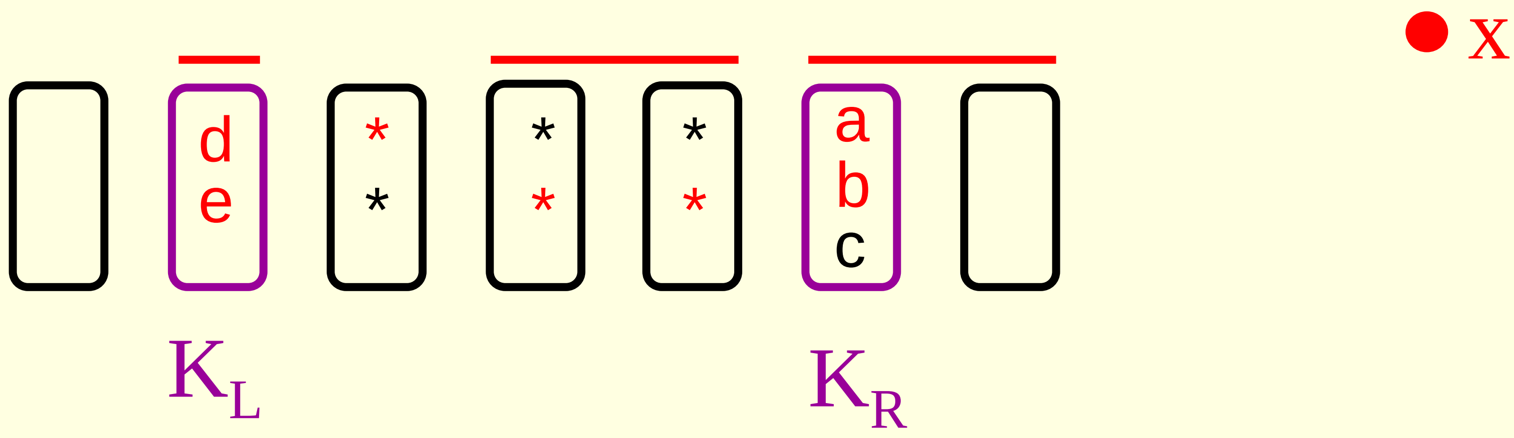


Complétion respectant un arrangement consécutif

Suppression de x dans un arrangement consécutif de G'

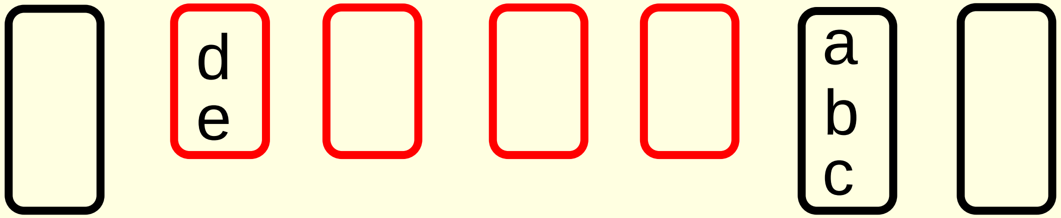


Plus petite complétion respectant un arrangement consécutif de G

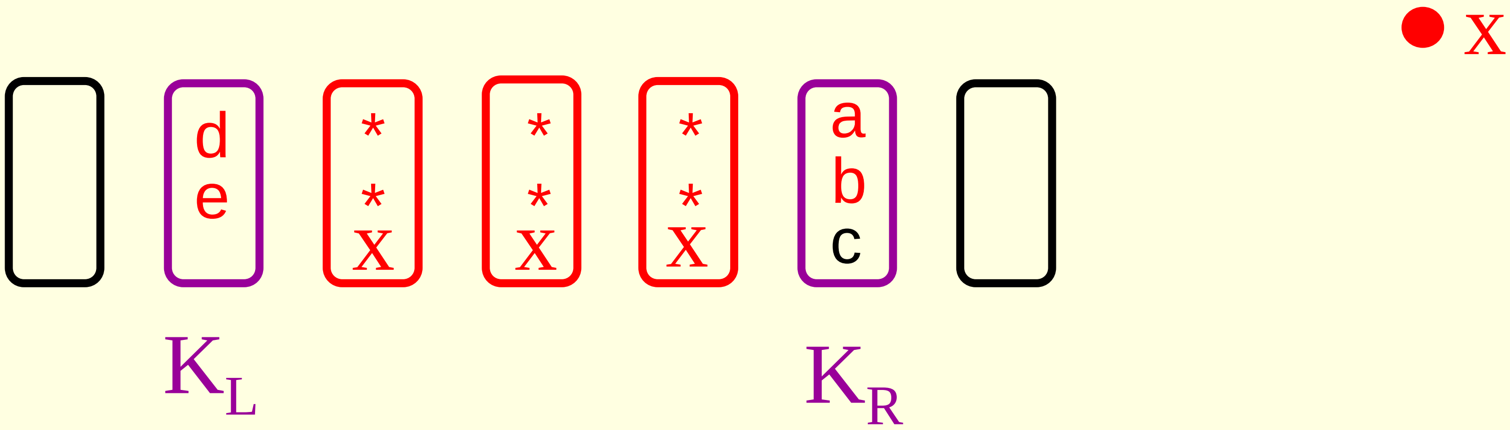


Complétion respectant un arrangement consécutif

Suppression de x dans un arrangement consécutif de G'

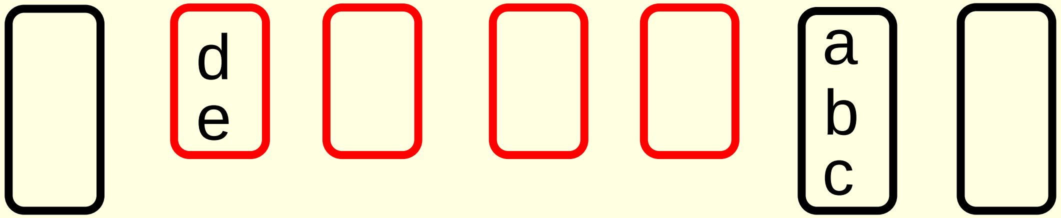


Plus petite complétion respectant un arrangement consécutif de G

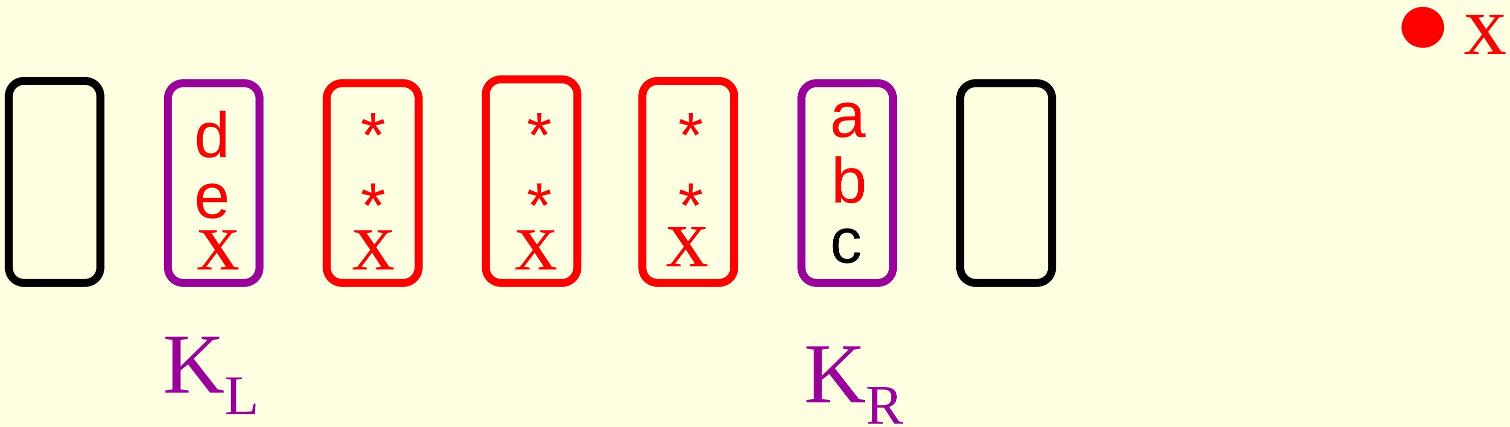


Complétion respectant un arrangement consécutif

Suppression de x dans un arrangement consécutif de G’

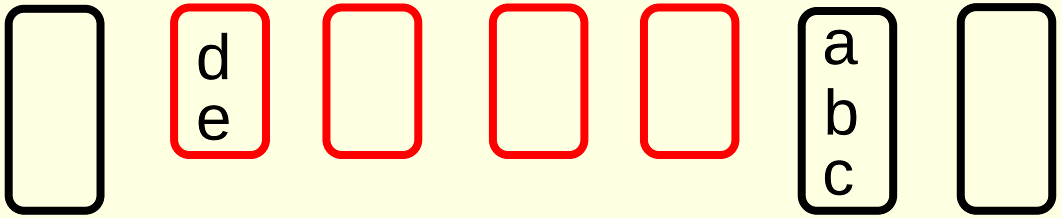


Plus petite complétion respectant un arrangement consécutif de G

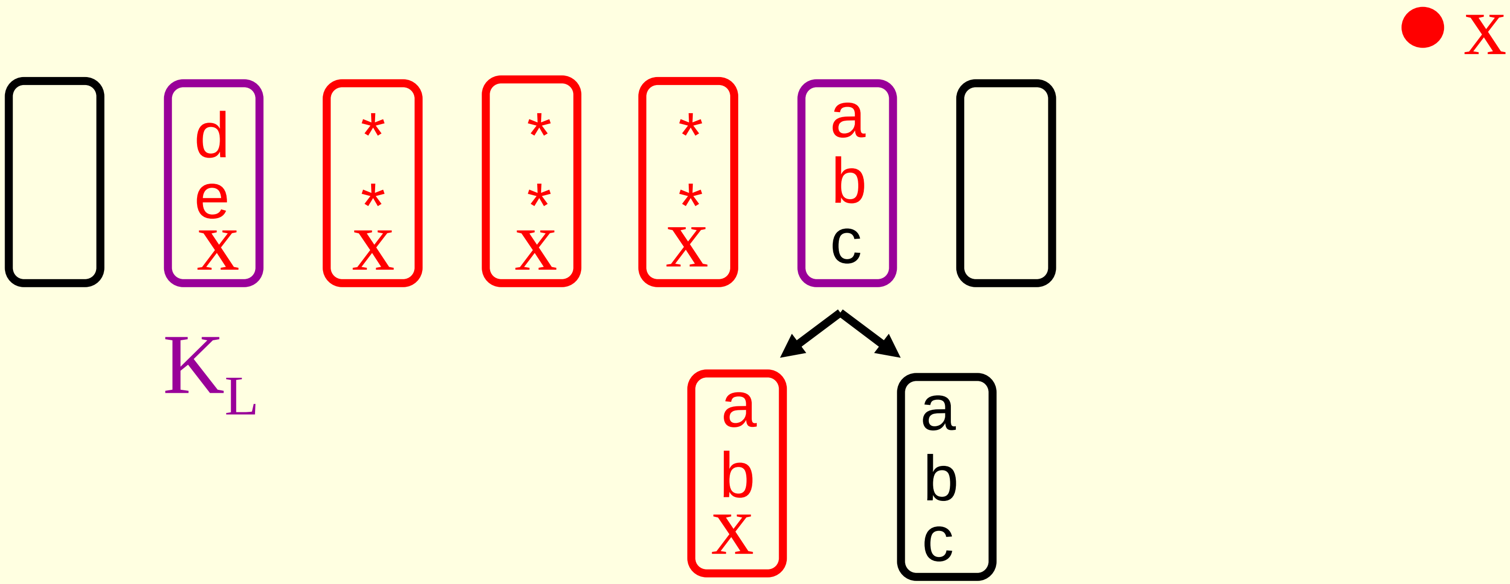


Complétion respectant un arrangement consécutif

Suppression de x dans un arrangement consécutif de G'

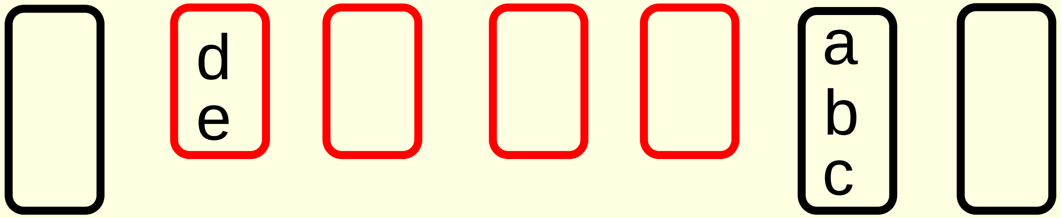


Plus petite complétion respectant un arrangement consécutif de G



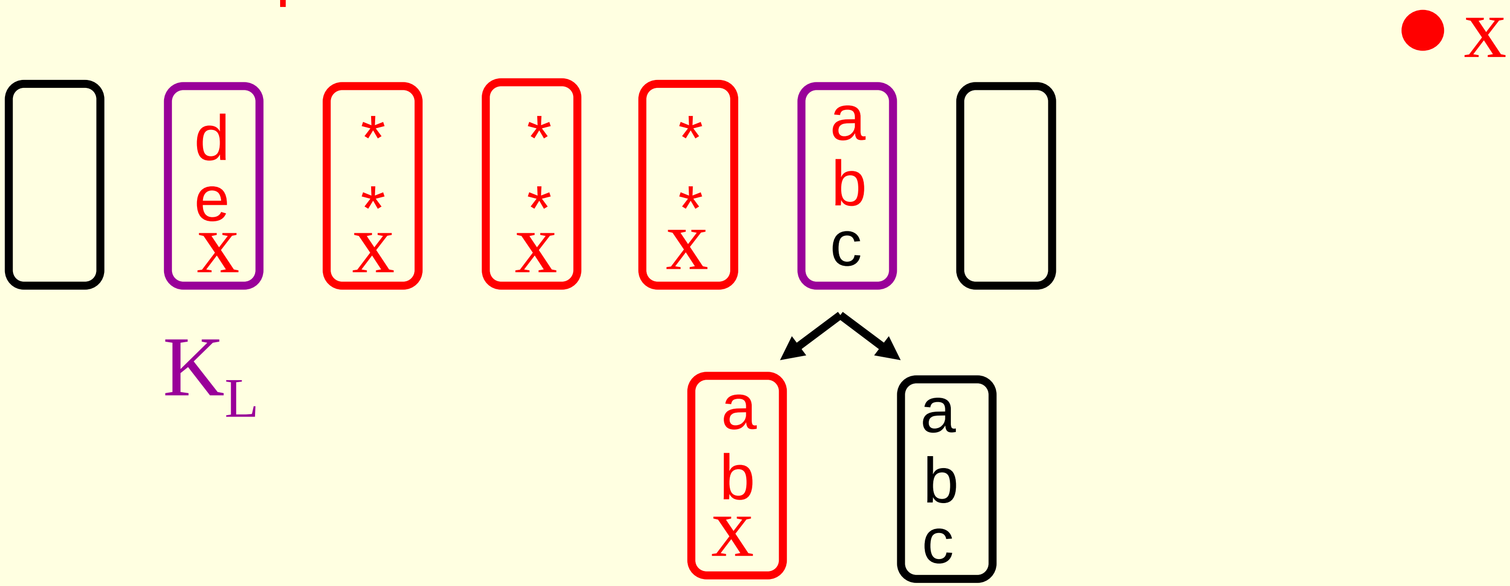
Complétion respectant un arrangement consécutif

Suppression de x dans un arrangement consécutif de G’



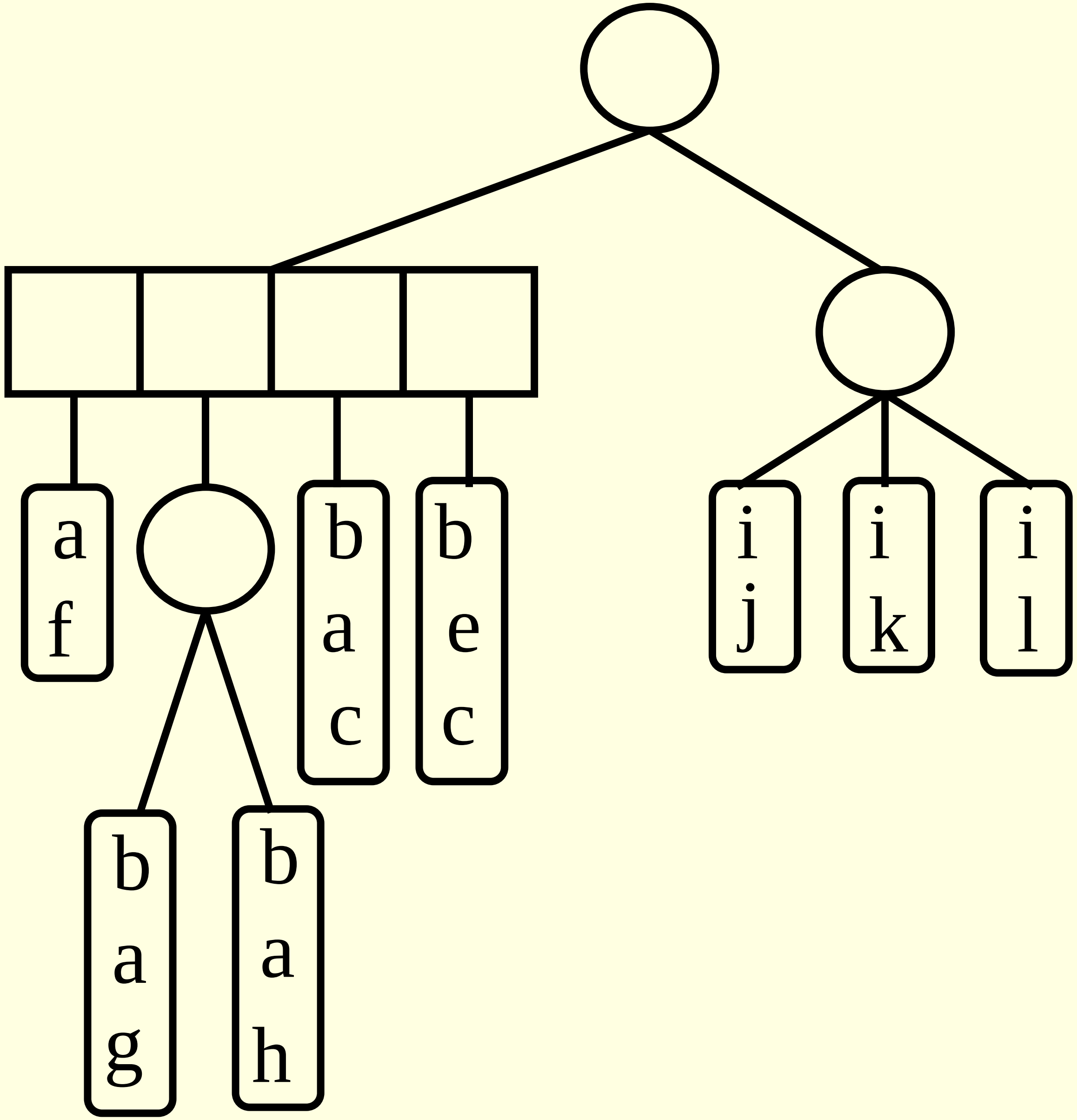
Plus petite complétion respectant un arrangement consécutif de G

Unicité mais pas nécessairement minimale

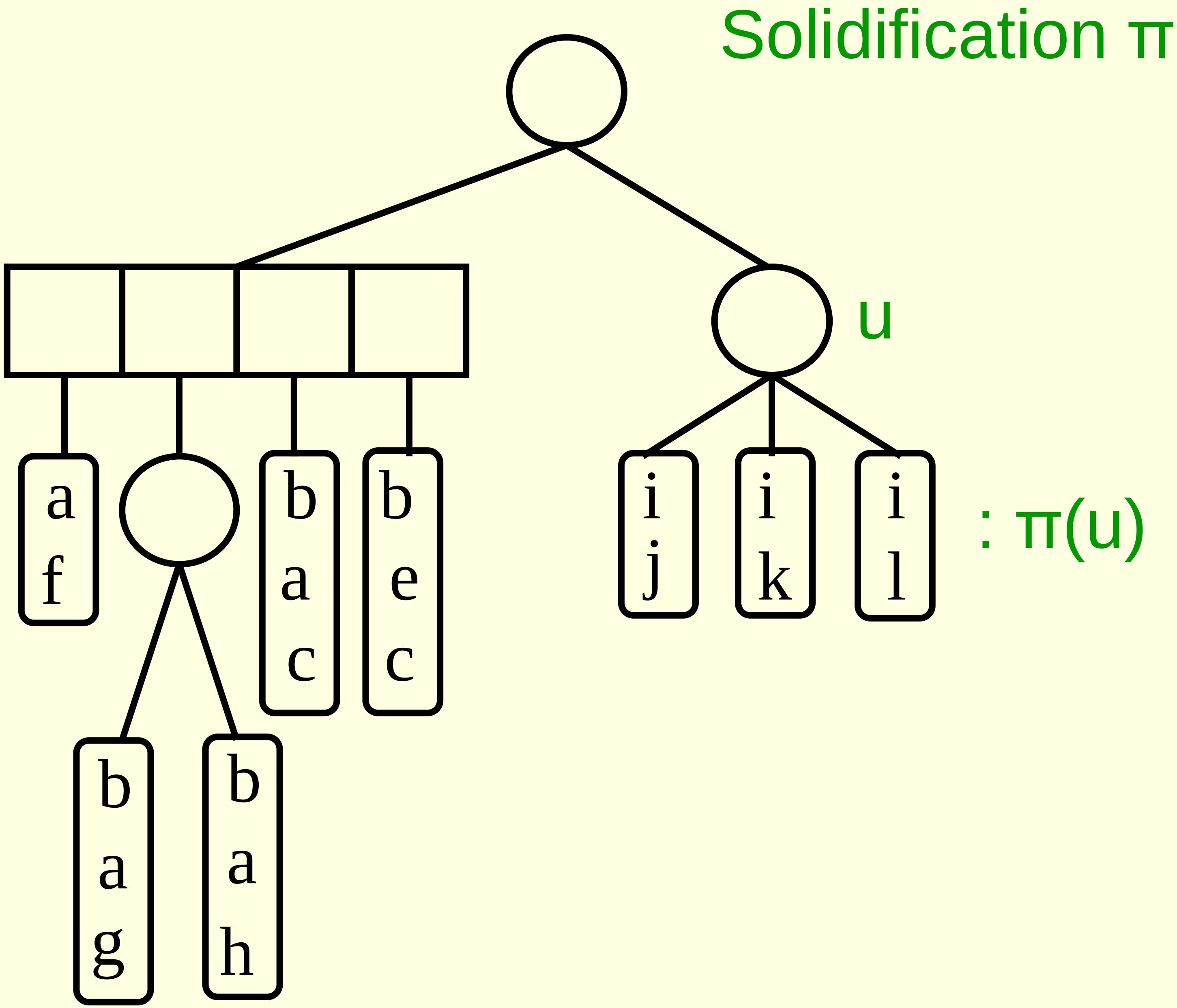


PQ-arbre

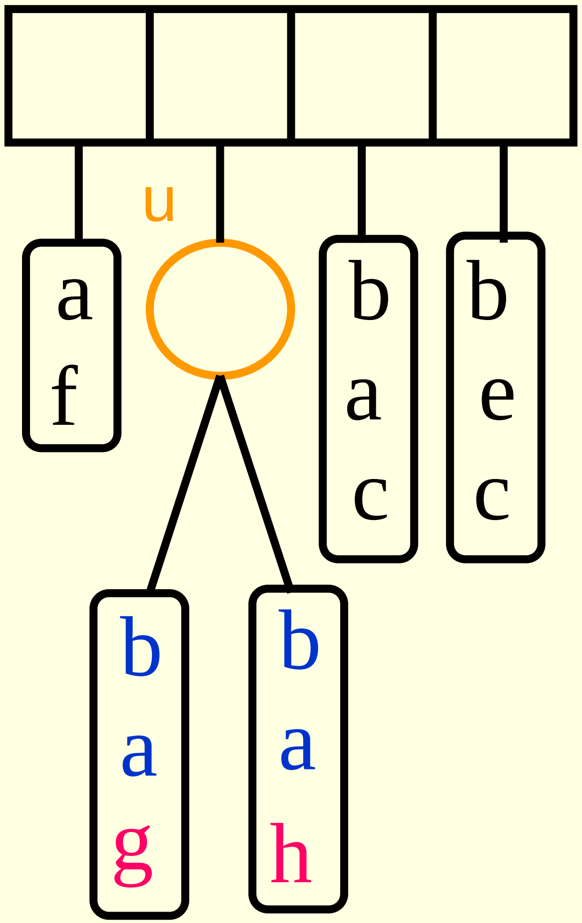
[Booth et Lueker 1976]



[Booth et Lueker 1976]



Qualité des nœuds



Block de u : a,b,g,h

Intérieur : g,h

Frontière : a,b

Def : u est *touché* ssi un sommet intérieur est adjacent à x

Def : u est *plein* ssi son intérieur est entièrement adjacent à x

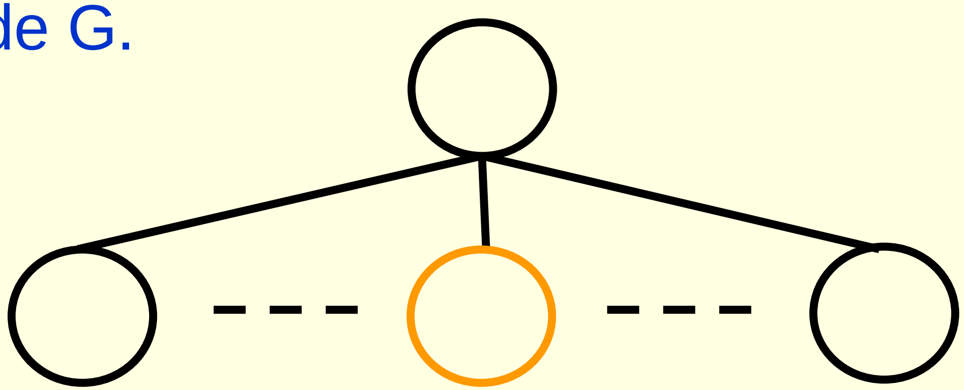
Qualité des nœuds

Definition

Un nœud interne u est *forcé* ssi il vérifie une de ces 3 propriétés :
- u est plein, ou
- u est dégénéré et a tous ses fils forcés, ou
- u est premier et son premier et son dernier fils sont forcés

Théorème

Tout nœud interne u forcé voit son bloc rempli dans toute complétion en intervalles de G.

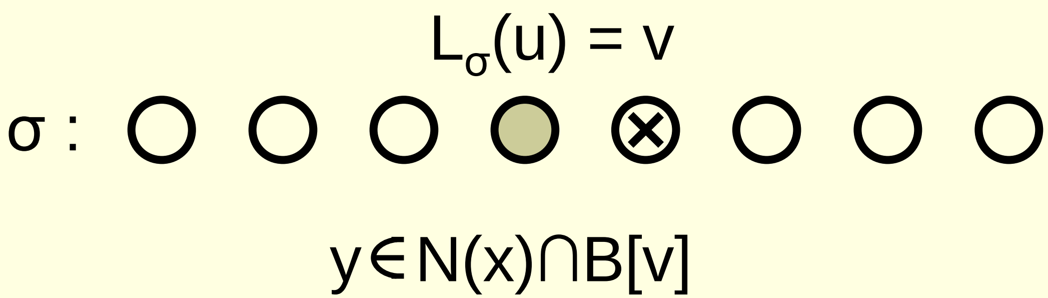


Sous arbre critique

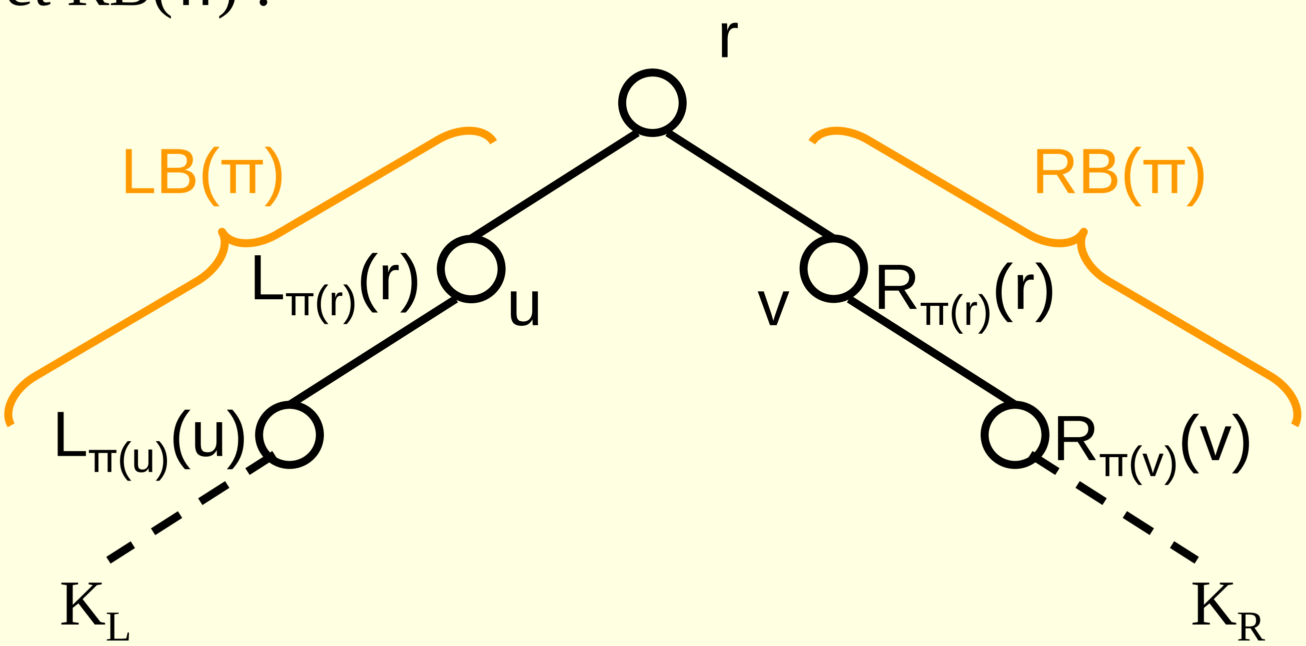
Cas où N(x) n’est pas une clique

Definition du nœud r : nœud le plus bas dans l’arbre tel que $N(x) \subseteq B[r]$

Definition de $L_\sigma(u)$:



Definition de LB(π) et RB(π) :



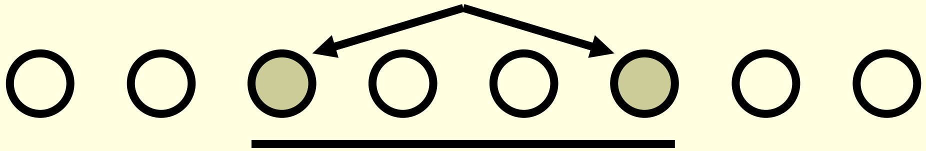
Bon arrangement consécutif

Definition : bon ordre sur les fils d'un nœud u

Dégénéré :

Si possible non forcé

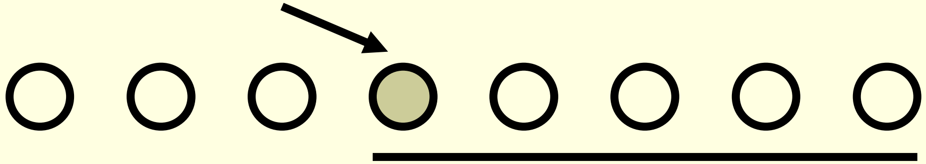
noeud r :



touchés

Si possible non forcé

descendant de r :

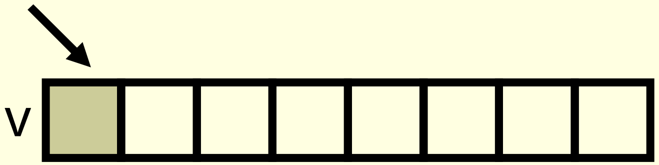


touchés

Premier :

Si possible non forcé

descendant de r : v



$(N(x) \cap B[u]) \setminus B[v] \neq \varnothing$

Th : Une solidification π telle que $\pi(u)$ est bon pour tout $u \in LB(\pi)$ et $\overline{\pi}(v)$ est bon pour tout $v \in RB(\pi)$ fournit un bon arrangement consécutif.

Plan

1. Problème et approche

2. Structure du problème

3. Algorithme

Algorithme

- Déterminer les nœuds touchés, pleins et forcés O(n)
- Calculer un bon ordre pour chaque nœud O(n)
- Calculer RB(π) tout en renversant les ordres de ses nœuds O(n)

  $\longrightarrow$ K_R (et K_L)
- Calculer un arrangement consécutif et l'ensemble de sommets à remplir O(n)
- Mettre à jour le PQ-arbre [Crespelle 09] O(n)

Une étape incrémentale : O(n) **Temps total de complétion : O(n²)**

Complétion minimale en graphe d'intervalles en temps $O(n^2)$

Christophe Crespelle
Université de Paris 6

Ioan Todinca
Université d'Orléans