

La coloration ℓ -distance d'arêtes

K.Drira, H. Seba et H.Kheddouci

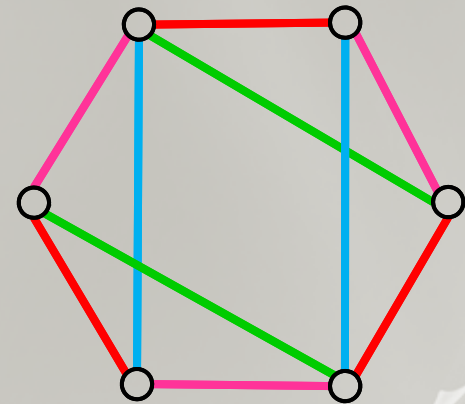
Présenté par: Kaouther Drira

Équipe G2AP – Lab. LIESP

6 Novembre 2009

La coloration d'arêtes

- $G = (V, E)$
- $f: E \rightarrow C$, telle que pour tout $e=(x,y), e'=(y,z) \in E$:
 - $f(e) \neq f(e')$
- Théorème de Vizing :
 - Les arêtes de G sont colorables avec Δ ou $\Delta+1$ couleurs
- Problème NP-complet



Coloration propre d'arêtes

$$\chi'(G)=4$$

La coloration ℓ -distance d'arêtes

- $f: E \rightarrow C$, telle que pour toutes $e=(x,y), e'=(x',y') \in E$ et $\text{dist}(e,e') \leq \ell$
 - $f(e) \neq f(e')$
- La coloration 0-distance est la coloration propre d'arêtes classique.
- Le nombre minimum de couleurs est appelé indice ℓ -chromatique du graphe, noté par χ'_ℓ



La coloration 1-distance

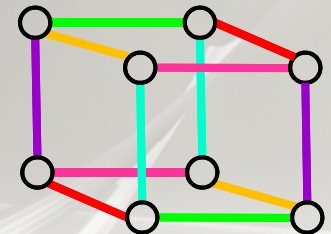
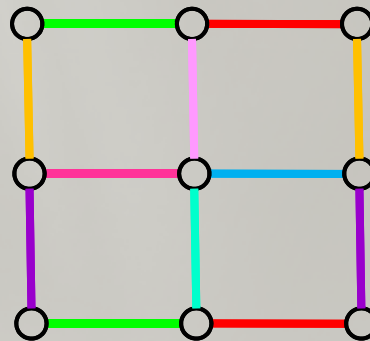
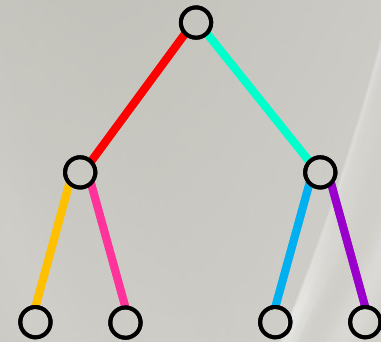
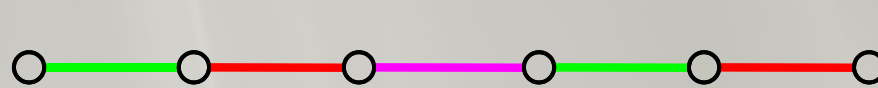
Travaux existants

- La coloration ℓ -distance d'arêtes est un problème NP-difficile en général [Ito et al. 2007]
 - Le problème de la coloration ℓ -distance ne peut pas être efficacement résoluble pour les graphes généraux
- Ito et al. (2007) présentent un algorithme polynomial des partial *k-trees* et un algorithme polynomial 2-approximatif des graphes planaires.
- Soit $\ell \geq 0$ et G un graphe régulier [Kang et al. 2009]

$$\chi'_\ell > \Delta^\ell / (2(\ell-1)^{\ell-1})$$

La coloration ℓ -distance d'arêtes

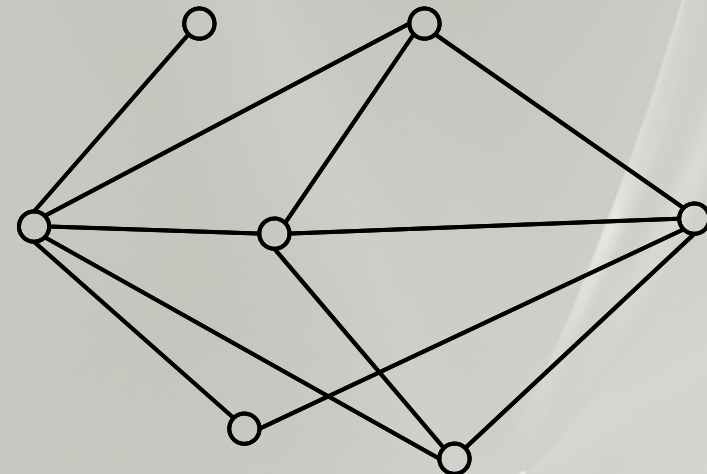
- Chaîne
- Grille
- Hypercube
- Arbre k-aire complet
- Arbre quelconque
- Graphe puissance



La coloration ℓ -distance d'arêtes

Idée des preuves.

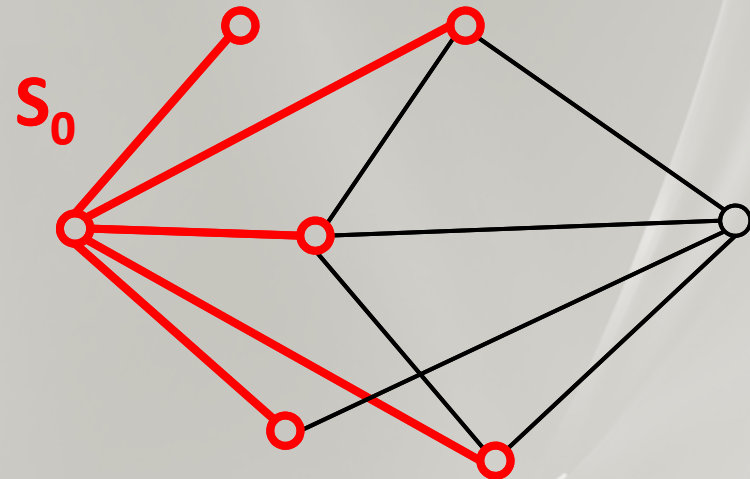
- Soit $G=(V,E)$ et $\ell \geq 0$, S_ℓ est un sous-graphe de G tel que pour toutes e et e' de E la distance $\text{dist}(e,e') \leq \ell$
- La borne inf. est égale à $|E(S_\ell)|$
- Comment construire S_ℓ pour chaque classe de graphe?



La coloration ℓ -distance d'arêtes

Idée des preuves.

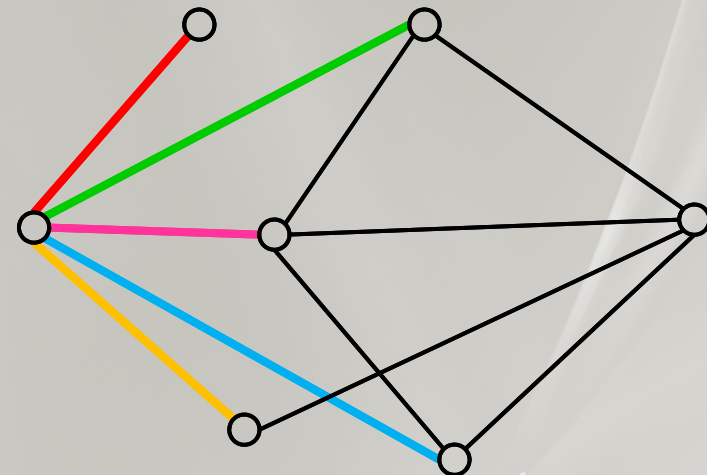
- Soit $G=(V,E)$ et $\ell \geq 0$, S_ℓ est un sous-graphe de G tel que pour toutes e et e' de E la distance $\text{dist}(e,e') \leq \ell$
- La borne inf. est égale à $|E(S_\ell)|$
- Comment construire S_ℓ pour chaque classe de graphe?



La coloration ℓ -distance d'arêtes

Idée des preuves.

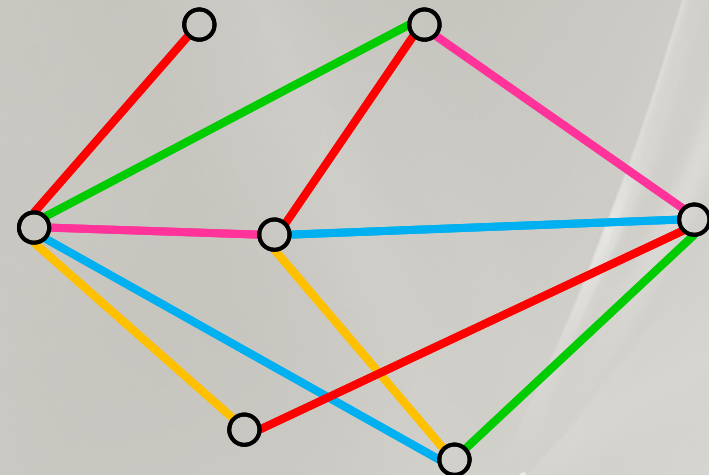
- Soit $G=(V,E)$ et $\ell \geq 0$, S_ℓ est un sous-graphe de G tel que pour toutes e et e' de E la distance $\text{dist}(e,e') \leq \ell$
- La borne inf. est égale à $|E(S_\ell)|$
- Comment construire S_ℓ pour chaque classe de graphe?



La coloration ℓ -distance d'arêtes

Idée des preuves.

- Soit $G=(V,E)$ et $\ell \geq 0$, S_ℓ est un sous-graphe de G tel que pour toutes e et e' de E la distance $\text{dist}(e,e') \leq \ell$
- La borne inf. est égale à $|E(S_\ell)|$
- Comment construire S_ℓ pour chaque classe de graphe?
- Borne sup.
 - Utiliser le même nombre de couleurs pour colorer G



La coloration ℓ -distance d'une chaîne

Théorème. Soit $\ell \geq 0$ et P_n une chaîne. L'indice ℓ -chromatique de P_n est donné par:

$$\chi'_\ell(P_n) = \begin{cases} \ell+2 & \text{Si } n \geq \ell+3 & (a) \\ n-1 & \text{Si } n \leq \ell+3 & (b) \end{cases}$$

Preuve.

Résultat(b). Si $n \leq \ell+3$, alors pour toutes $e, e' \in E$
 $\text{dist}(e, e') \leq \ell$. D'où $c(e) \neq c(e')$

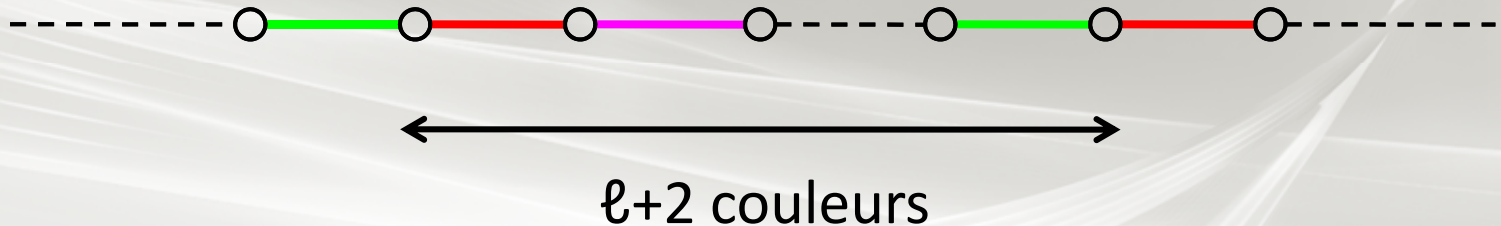
La coloration ℓ -distance d'une chaîne

Résultat(a) $n \geq \ell + 3$

— Borne inf.

- $e, e' \in E$ telle que $\text{dist}(e, e') = \ell + 1$
- $\ell + 2$ arêtes dont la distance entre eux est au plus égale à ℓ

— Borne sup.



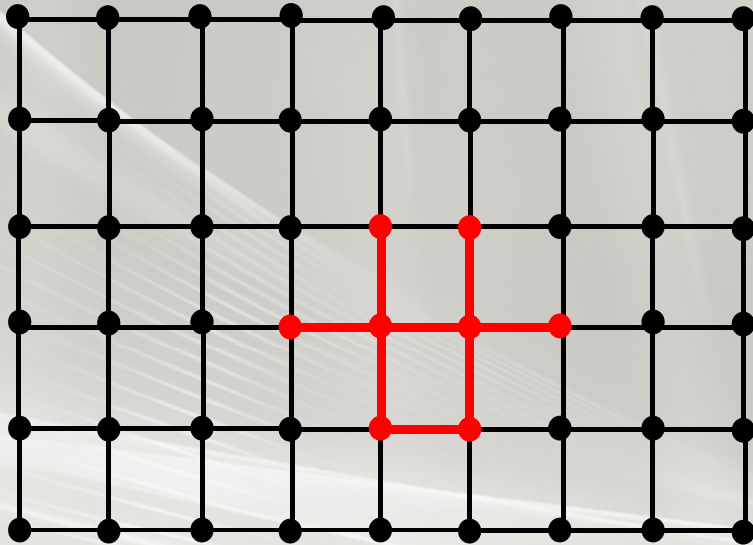
La **coloration** ℓ -distance des Grilles à deux dimensions

Théorème. Soit $\ell \geq 0$, $n, m \geq \ell + 3$ et $M_{n,m}$ une grille à 2 dimensions. L'indice ℓ -chromatique est donné par:

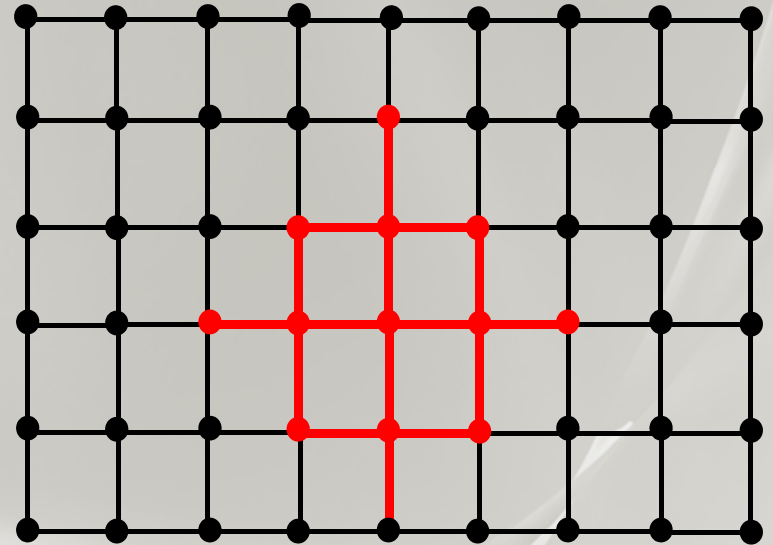
$$\chi'_{\ell}(M_{n,m}) = (\ell + 2)^2 - (\ell \bmod 2)$$

La **coloration** ℓ -distance des Grilles à deux dimensions

Borne inf.



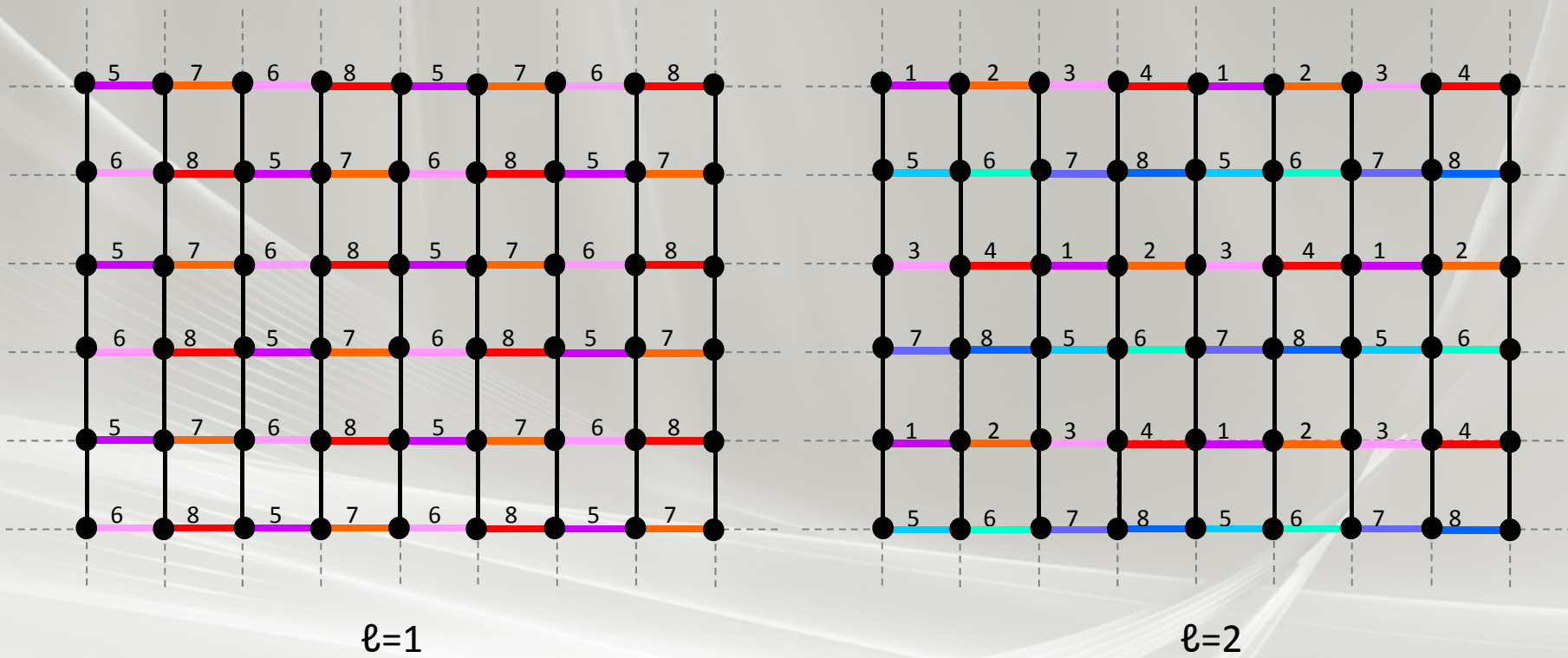
$\ell=1$



$\ell=2$

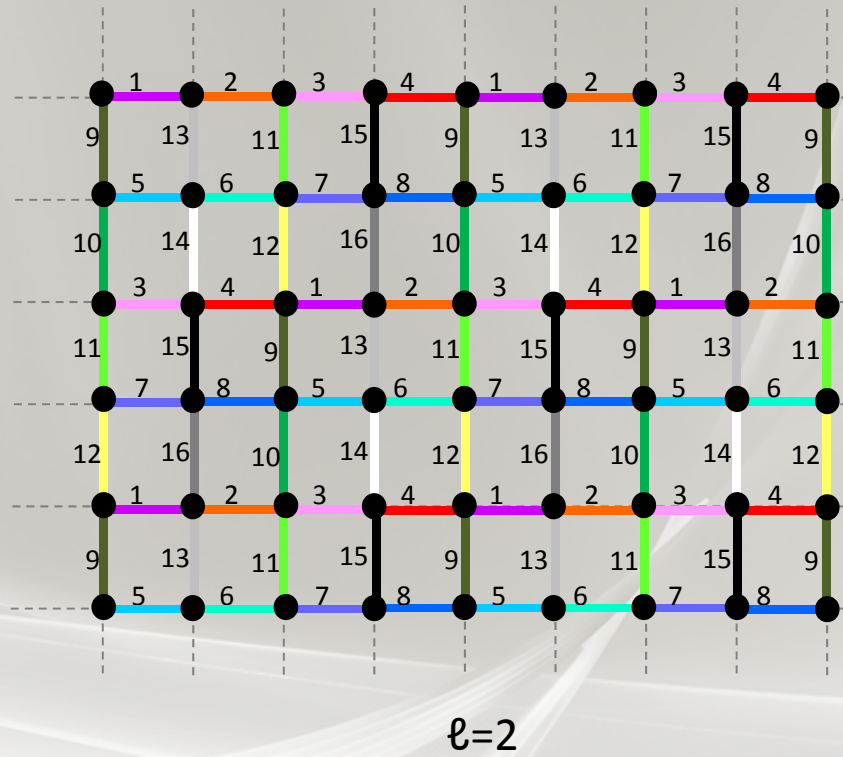
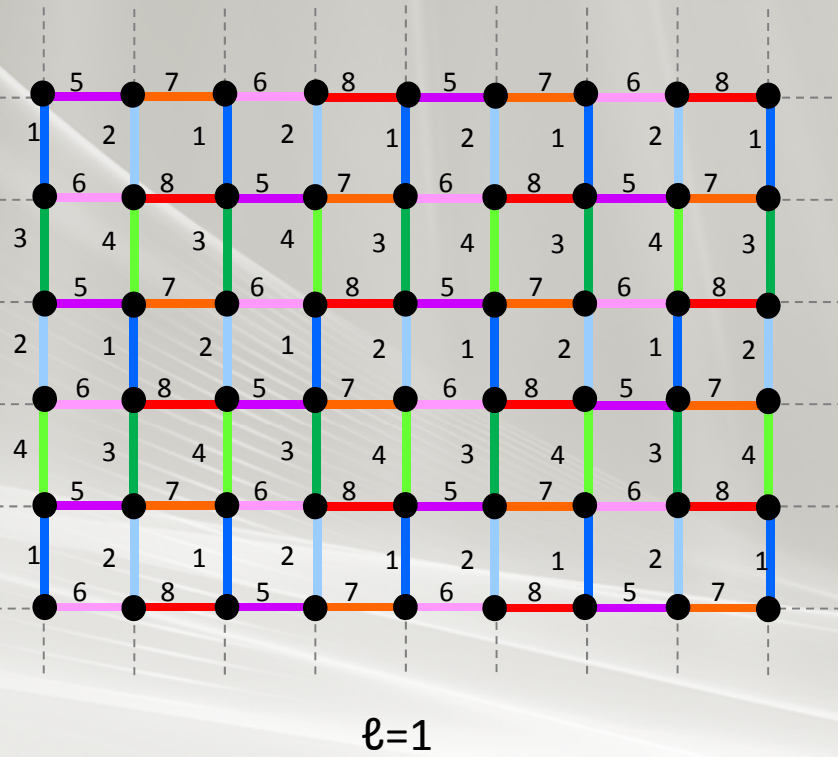
La coloration ℓ -distance des Grilles à deux dimensions

Borne sup.



La coloration ℓ -distance des Grilles à deux dimensions

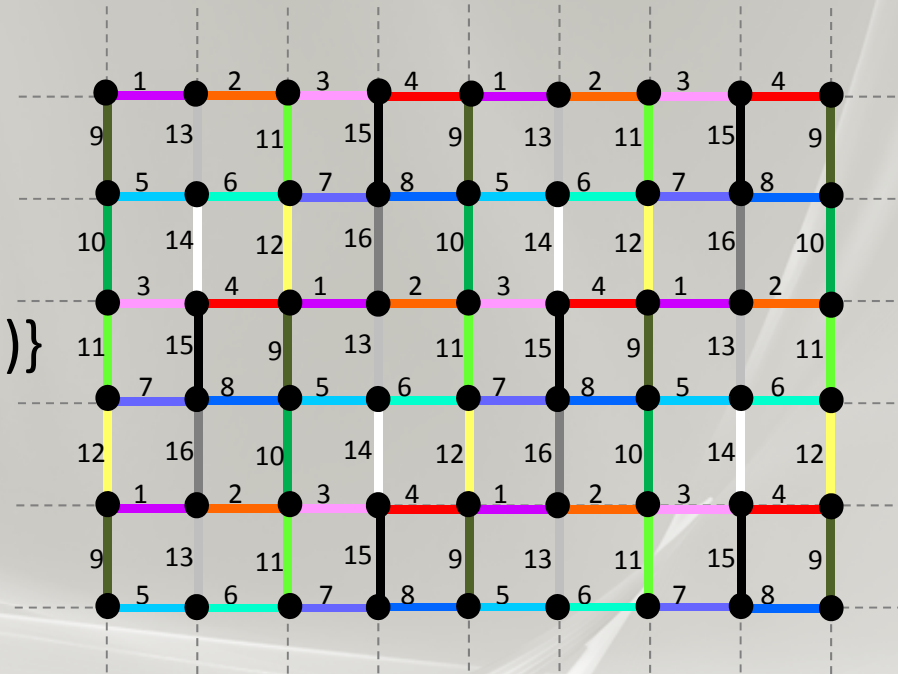
Borne sup.



La coloration ℓ -distance des Grilles à deux dimensions

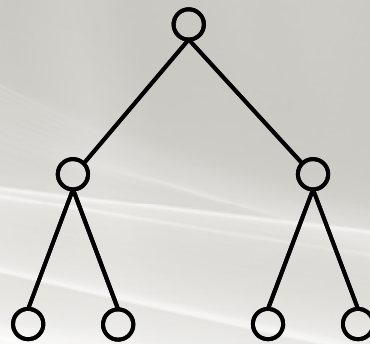
Borne sup. (ℓ est pair)

- Si $0 \leq k \leq \ell/2$:
alors colorer cycliquement avec
 $\{k(\ell+2)+1, k(\ell+2)+2, \dots, (k+1)(\ell+2)\}$
- $\ell/2 + 1 \leq k \leq \ell+1$:
alors colorer cycliquement avec
 $\{(k-\ell/2-1)(\ell+2)+1, (k-\ell/2-1)(\ell+2)+2, \dots, (k-\ell/2)(\ell+2)\}$



La coloration ℓ -distance des arbres k-aires complet

- Un arbre k-aire est un arbre enraciné dont chaque sommet a au plus k fils.
- Un arbre k-aire est complet si, pour une hauteur donnée, il a un nombre maximal de nœuds.



Arbre 2-aire complet

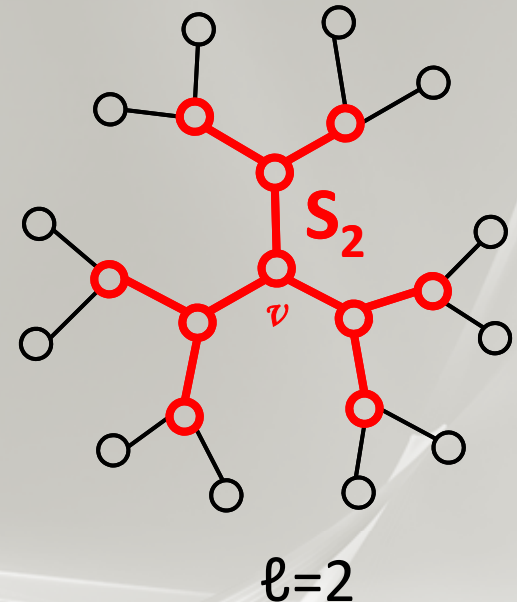
La **coloration** ℓ -distance des arbres k-aires complet

Théorème. Soit $\ell \geq 0$ et T un arbre k -aire complet.
L'indice ℓ -chromatique de T est donné par:

$$\chi'_{\ell}(T) = \begin{cases} (1-k^{(\ell+3)/2})((1+k)/(1-k)) & \text{Si } \ell \text{ est pair} & (a) \\ (1+k-2k^{(\ell+3)/2})/(1-k) & \text{Si } \ell \text{ est impair} & (b) \end{cases}$$

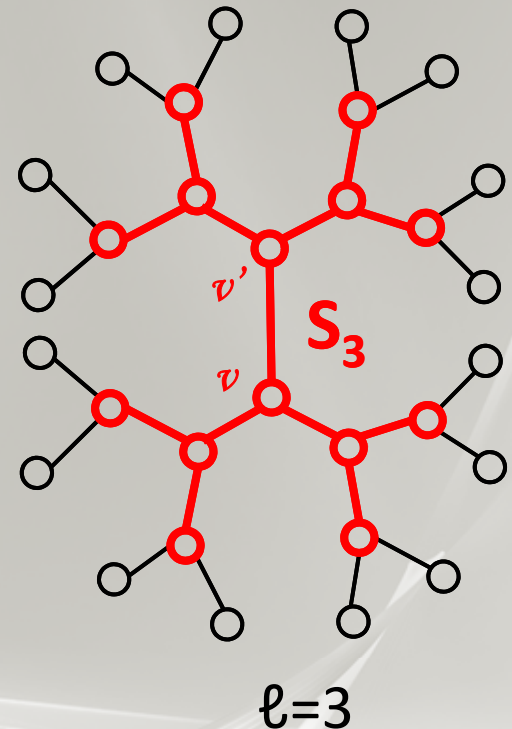
La **coloration** ℓ -distance des arbres k-aires complet

- Borne inf.
 - Soit un sous-graphe S_ℓ
 - $S_\ell = T[Q_v \cup Q_{v'}]$ et $Q_v = \{u \in V : \text{dist}(u, v) \leq \lfloor \ell/2 \rfloor + 1\}$
 - $v = v'$ si ℓ est pair et $(v, v') \in E$ si ℓ est impair
 - v et v' sont les centres de S_ℓ
 - La distance entre les arêtes est au plus égale à ℓ



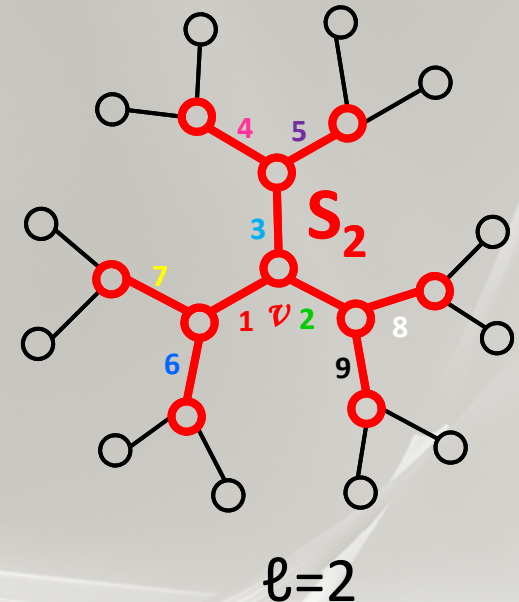
La **coloration** ℓ -distance des arbres k -aires complet

- Borne inf.
 - Soit un sous-graphe S_ℓ
 - $S_\ell = T[Q_v \cup Q_{v'}]$ et $Q_v = \{u \in V : \text{dist}(u, v) \leq \lfloor \ell/2 \rfloor + 1\}$
 - $v = v'$ si ℓ est pair et $(v, v') \in E$ si ℓ est impair
 - v et v' sont les centres de S_ℓ
 - La distance entre les arêtes est au plus égale à ℓ



La **coloration** ℓ -distance des arbres k-aires complet

- Borne sup.
 - Affecter des couleurs différentes à $E(S_\ell)$



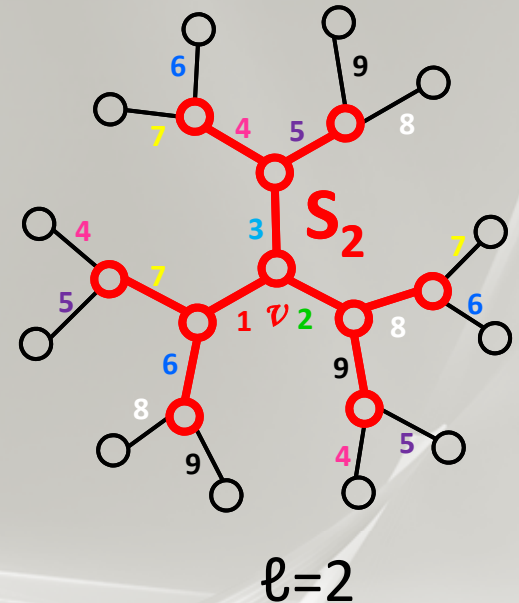
La coloration ℓ -distance des arbres k-aires complet

- Borne sup.
 - Affecter des couleurs différentes à $E(S_\ell)$
 - Colorer les autres arêtes en utilisant le même nombre de couleurs



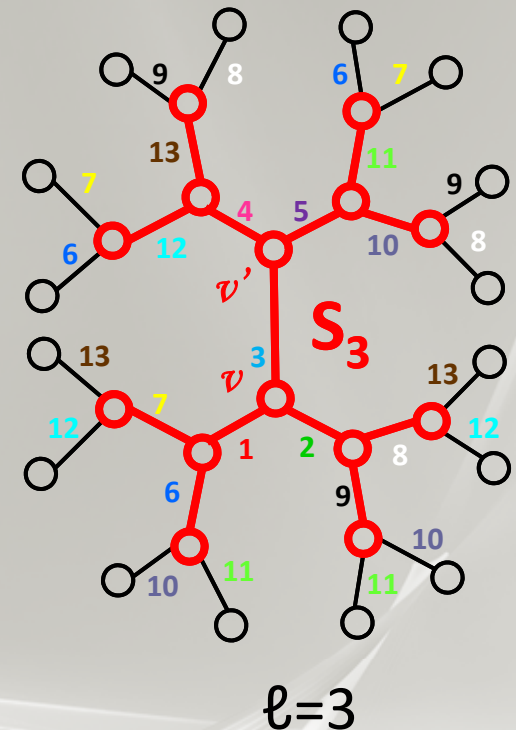
La coloration ℓ -distance des arbres k-aires complet

- Borne sup.
 - Affecter des couleurs différentes à $E(S_\ell)$
 - Colorer les autres arêtes en utilisant le même nombre de couleurs



La **coloration** ℓ -distance des arbres k-aires complet

- Borne sup.
 - Affecter des couleurs différentes à $E(S_\ell)$
 - Colorer les autres arêtes en utilisant le même nombre de couleurs



La **coloration** ℓ -distance des arbres quelconques

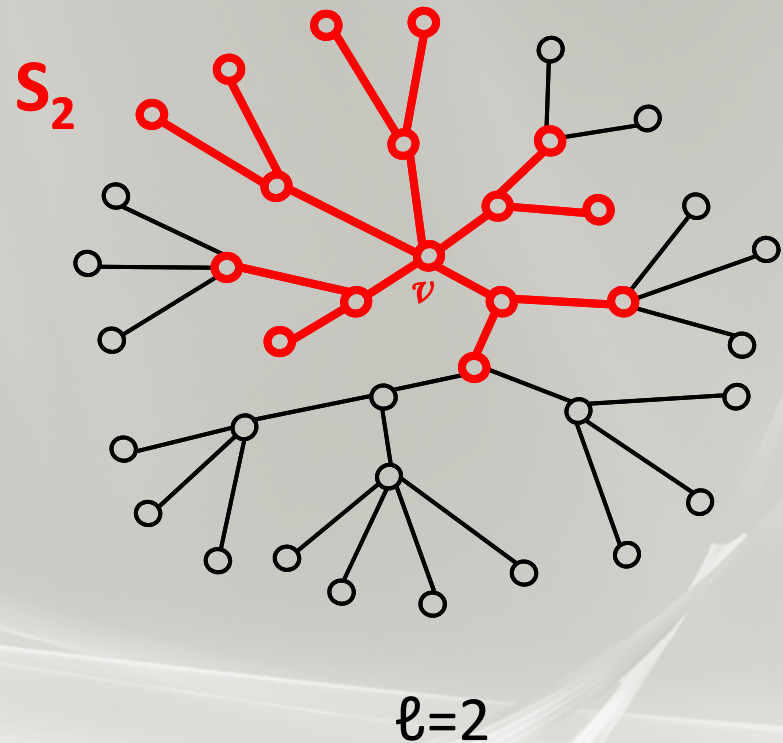
Théorème Soit $\ell \geq 0$ et $T = (V, E)$ un arbre quelconque de diamètre $diam(T)$, alors

$$\chi'_{\ell}(T) = |E(T)| \quad \text{Si } diam(T) \leq \ell + 2$$

$$\chi'_{\ell}(T) = |E(S_{\ell})| \quad \text{Si } diam(T) > \ell + 2$$

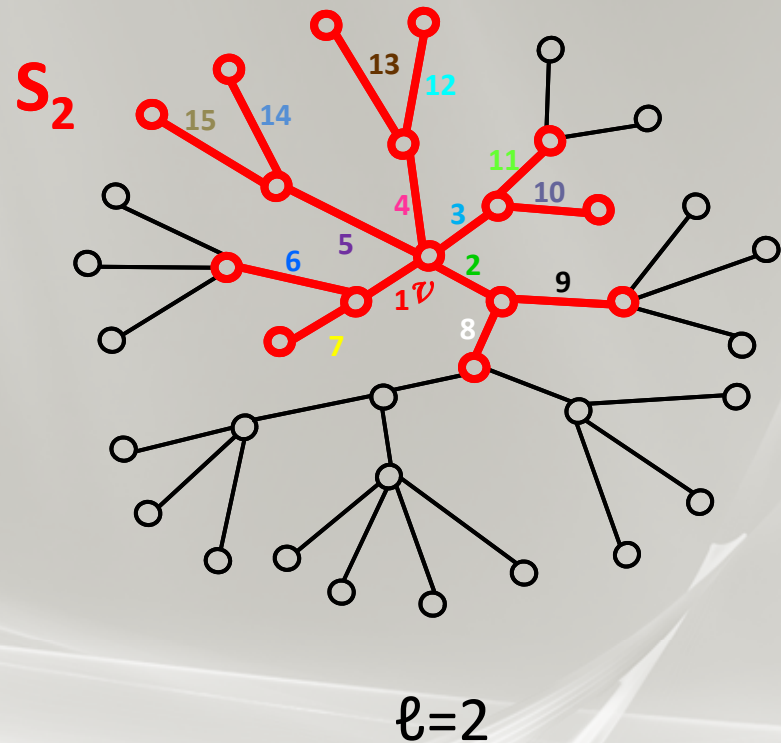
La coloration ℓ -distance des arbres quelconques

- Rechercher le sous-arbre maximum S_ℓ
- Affecter des couleurs différentes à S_ℓ
- Etendre l'algorithme de coloration des arbres k -aires complet



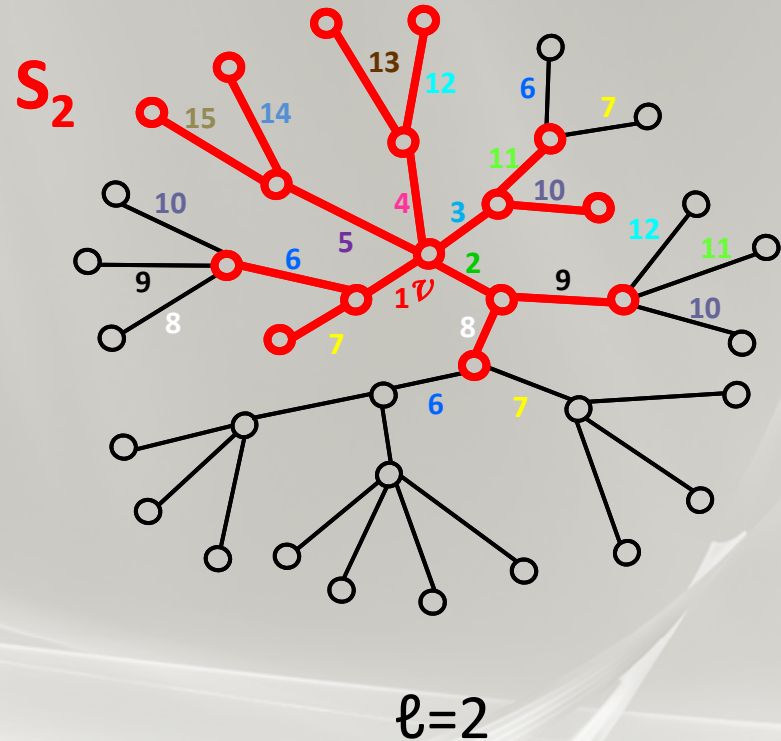
La coloration ℓ -distance des arbres quelconques

- Rechercher le sous-arbre maximum S_ℓ
- Affecter des couleurs différentes à S_ℓ
- Etendre l'algorithme de coloration des arbres k-aires complet



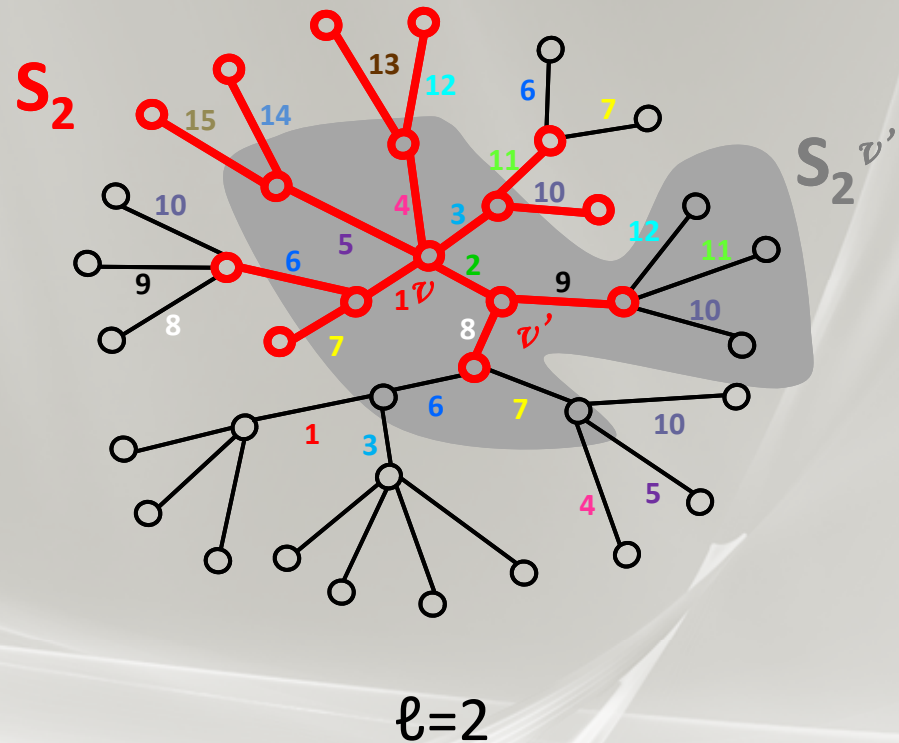
La coloration ℓ -distance des arbres quelconques

- Rechercher le sous-arbre maximum S_ℓ
- Affecter des couleurs différentes à S_ℓ
- Etendre l'algorithme de coloration des arbres k -aires complet



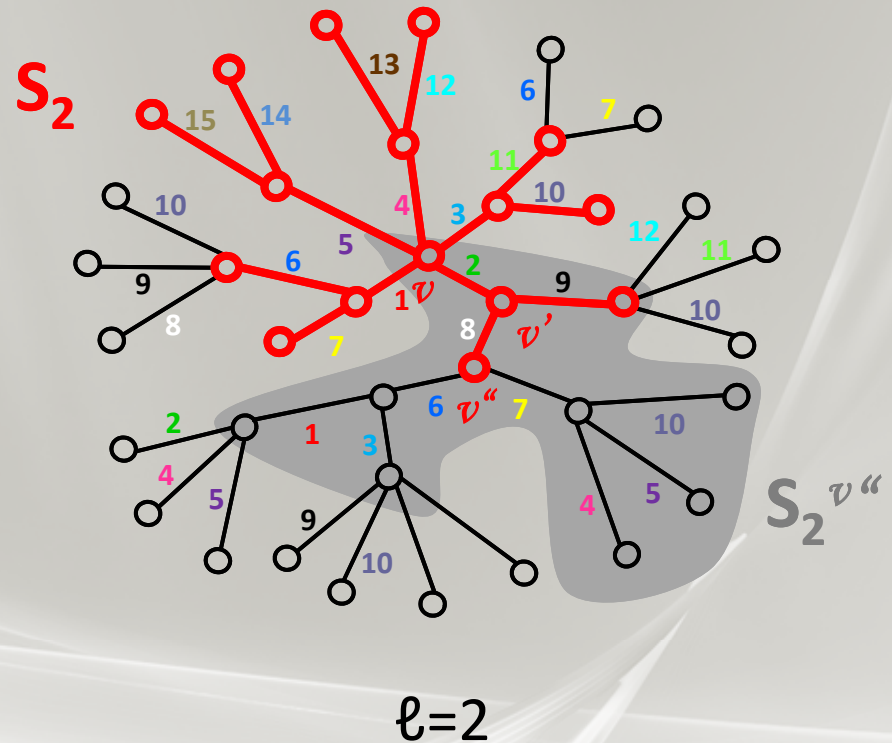
La coloration ℓ -distance des arbres quelconques

- Rechercher le sous-arbre maximum S_ℓ
- Affecter des couleurs différentes à S_ℓ
- Etendre l'algorithme de coloration des arbres k -aires complet



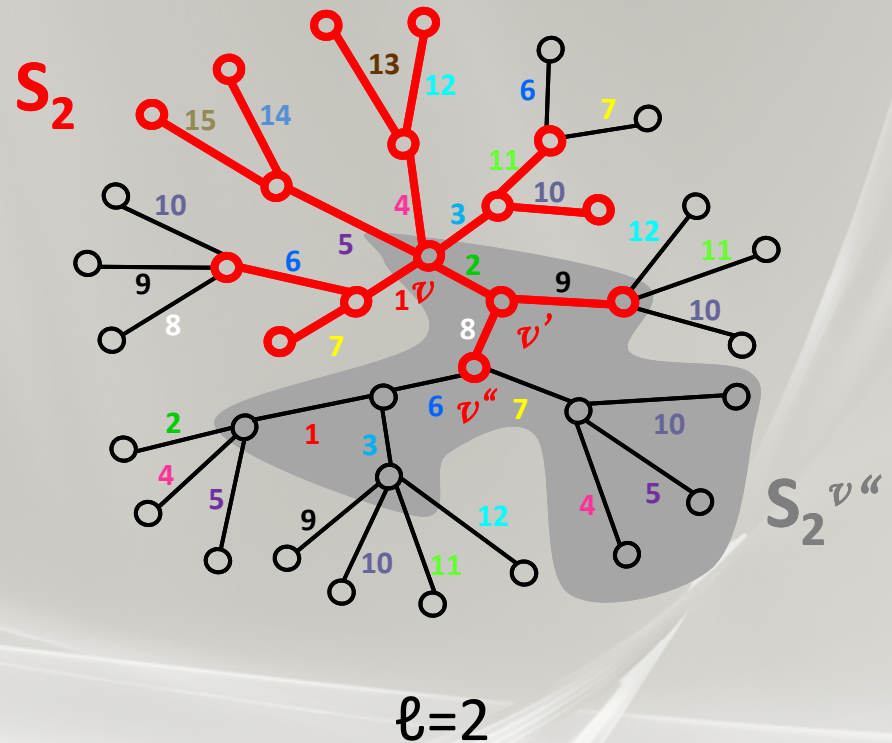
La coloration ℓ -distance des arbres quelconques

- Rechercher le sous-arbre maximum S_ℓ
- Affecter des couleurs différentes à S_ℓ
- Etendre l'algorithme de coloration des arbres k-aires complet



La coloration ℓ -distance des arbres quelconques

- Rechercher le sous-arbre maximum S_ℓ
- Affecter des couleurs différentes à S_ℓ
- Etendre l'algorithme de coloration des arbres k -aires complet



Analyse de la complexité

Théorème. Soit $\ell \geq 0$ et T un arbre quelconque.
 Δ est le degré maximum de T . D'où, la complexité de notre algorithme est égale à:

$$O(n(\Delta-1)^{\lfloor \ell/2 \rfloor + 1})$$

→ Algorithme semi-polynomial

La coloration ℓ -distance des hypercubes à d dimensions

- H_d un hypercube à d dimensions
- $H_d = K_2 \times H_{d-1}$
- H_d est formé de H_{d-1}^1 et H_{d-1}^2 ainsi que des arêtes qui les relient
- H_{d-1}^1 et H_{d-1}^2 sont isomorphes

La coloration ℓ -distance des hypercubes à d dimensions

Théorème. Soit $\ell \geq 0$ et H_d un hypercube à d dimensions. L'indice ℓ -chromatique de H_d est donné par:

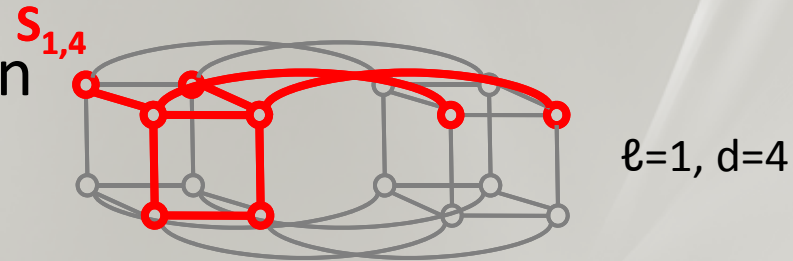
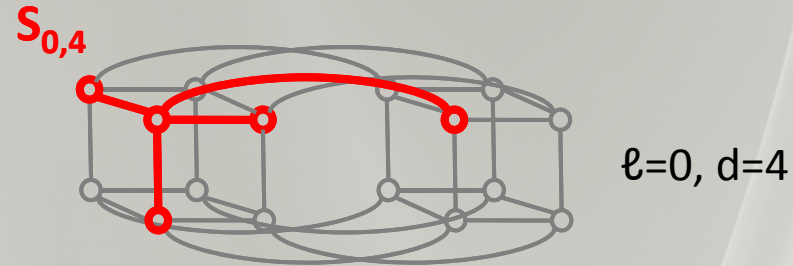
$$\chi'_\ell(H_d) = \begin{cases} d2^{d-1} & \text{Si } \ell \geq d-1 & (a) \\ d2^\ell & \text{Si } \ell \leq d-1 & (b) \end{cases}$$

Preuve.

Résultat (a) la distance entre deux arêtes est au plus égale à ℓ

La **coloration** ℓ -distance des hypercubes à d dimensions

- Construire $H_{\ell+1} \subset S_{\ell,d}$
- Inclure $(d - \ell - 1)2^\ell$ arêtes:
 - 2^ℓ sommets incidents ont un degré d
 - Le sous graphe induit forme un hypercube H_ℓ

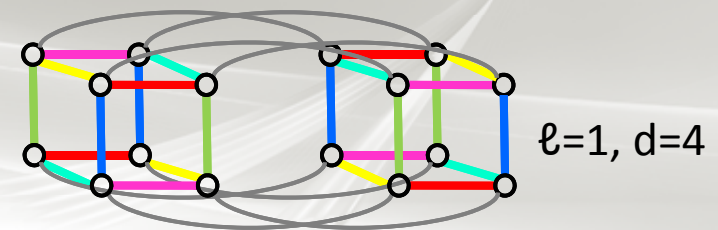
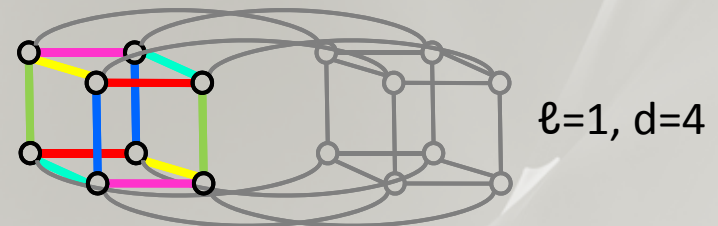
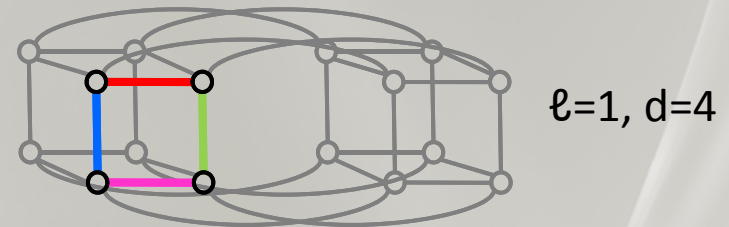
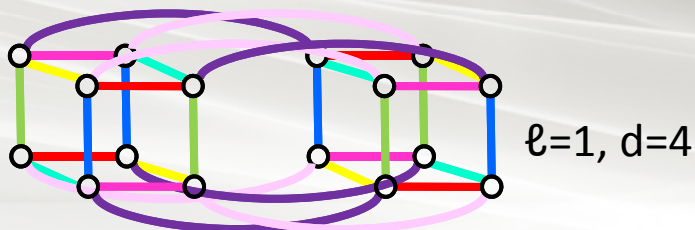


La coloration ℓ -distance des hypercubes à d dimensions

Borne sup.

Colorer $S_{\ell,d}$ d'une manière itérative:

1. Colorer $H_{\ell+1}$
2. Incrémenter la dimension de l'hypercube
 - Colorer $H_{\ell+i}^1$ et $H_{\ell+i}^2$
 - Colorer les arêtes qui les relient de la même manière mais avec des couleurs nouvelles.



Merci

Questions?