Bornes pour la taille de codes identifiants dans les graphes de degré maximum Δ

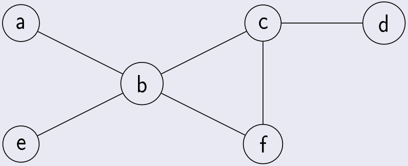
Florent Foucaud
travail réalisé avec Ralf Klasing, Adrian Kosowski, André Raspaud

Université Bordeaux 1

Novembre 2009

Localiser un feu dans un bâtiment

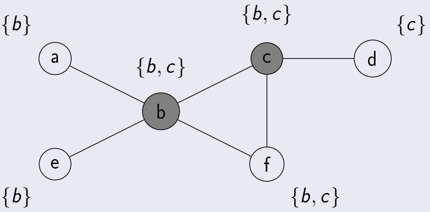
graphe simple non orienté : modélise un bâtiment



Localiser un feu dans un bâtiment

détecteurs : détectent la présence d'un feu dans leur voisinage fermé

but : localiser UN feu éventuel



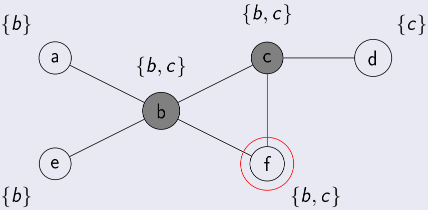
		b	c	
a		•		
b		•	•	
c		•	•	
d			•	
e		•		
f		•	•	

Localiser un feu dans un bâtiment

détecteurs : détectent la présence d'un feu dans leur voisinage fermé

but : localiser UN feu éventuel

feu dans la pièce f



		b	c	
a		●		
b		●	●	
c		●	●	
d			●	
e		●		
f		●	●	

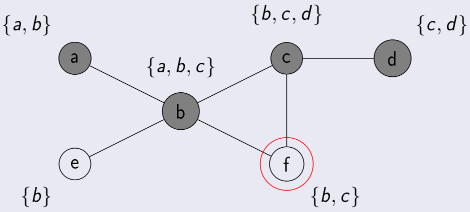
Localiser un feu dans un bâtiment

détecteurs : détectent la présence d'un feu dans leur voisinage fermé

but : localiser UN feu éventuel

feu dans la pièce f

les *ensembles identifiants* de tous les sommets doivent être distincts



	a	b	c	d
a	•	•		
b	•	•	•	
c		•	•	•
d			•	•
e		•		
f		•	•	

Code identifiant - définition

Définition : code identifiant d'un graphe $G = (V, E)$ (Karpovsky et al. 1998 [10])

sous-ensemble C de V tel que :

- C est un ensemble dominant dans G : $\forall u \in V$, $N[u] \cap C \neq \emptyset$
- pour tous sommets distincts u, v de V, u et v ont des *ensembles identifiants* distincts : $N[u] \cap C \neq N[v] \cap C$

Code identifiant - définition

Définition : code identifiant d'un graphe $G = (V, E)$ (Karpovsky et al. 1998 [10])

sous-ensemble C de V tel que :

- C est un ensemble dominant dans G : $\forall u \in V$, $N[u] \cap C \neq \emptyset$
- pour tous sommets distincts u, v de V, u et v ont des *ensembles identifiants* distincts : $N[u] \cap C \neq N[v] \cap C$

Remarque

Certains graphes n'admettent pas de code identifiant. Ceux qui en admettent sont dits *identifiables* (ou *sans jumeaux*).

Code identifiant - définition

Définition : code identifiant d'un graphe $G = (V, E)$ (Karpovsky et al. 1998 [10])

sous-ensemble C de V tel que :

- C est un ensemble dominant dans G : $\forall u \in V$, $N[u] \cap C \neq \emptyset$
- pour tous sommets distincts u, v de V, u et v ont des *ensembles identifiants* distincts : $N[u] \cap C \neq N[v] \cap C$

Remarque

Certains graphes n'admettent pas de code identifiant. Ceux qui en admettent sont dits *identifiables* (ou *sans jumeaux*).

Notation

$\gamma_{id}(G)$: cardinalité minimum d'un code identifiant d'un graphe G

Borne inférieure et degré max

Thm (Karpovsky et al. 98 [10])

Soit G un graphe identifiable à n sommets. Alors $\gamma_{id}(G) \geq \lceil \log_2(n+1) \rceil$.

Borne inférieure et degré max

Thm (Karpovsky et al. 98 [10])

Soit G un graphe identifiable à n sommets. Alors $\gamma_{id}(G) \geq \lceil \log_2(n+1) \rceil$.

Caractérisation

Les graphes atteignant cette borne ont été caractérisés (Moncel 06 [13])

Borne inférieure et degré max

Thm (Karpovsky et al. 98 [10])

Soit G un graphe identifiable à n sommets. Alors $\gamma_{id}(G) \geq \lceil \log_2(n+1) \rceil$.

Caractérisation

Les graphes atteignant cette borne ont été caractérisés (Moncel 06 [13])

Thm (Karpovsky et al. 98 [10])

Soit G un graphe identifiable à n sommets et degré maximum Δ. Alors $\gamma_{id}(G) \geq \dfrac{2n}{\Delta + 2}$.

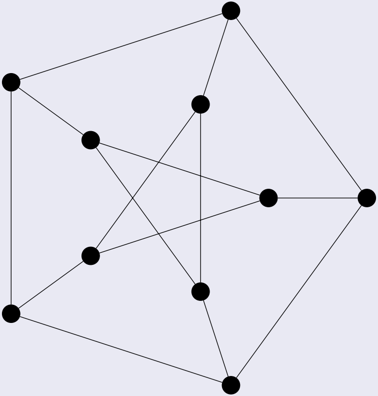
Graphes atteignant la borne inférieure

Caractérisation

- n sommets
- ensemble indépendant C de taille $\frac{2n}{\Delta+2}$ (code id.)
- chaque sommet de C a exactement Δ voisins
- $\frac{\Delta n}{\Delta+2}$ connectés à 2 sommets de C chacun

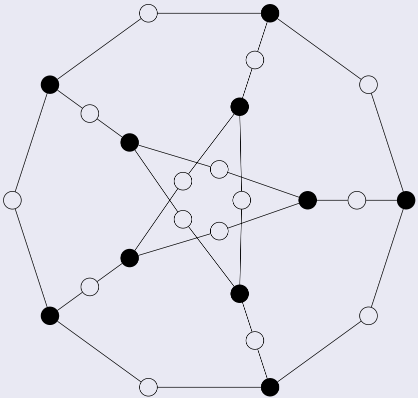
Graphes atteignant la borne inférieure - exemple

Exemple : D=graphe de Petersen, $\Delta = 3$, $n = 10$



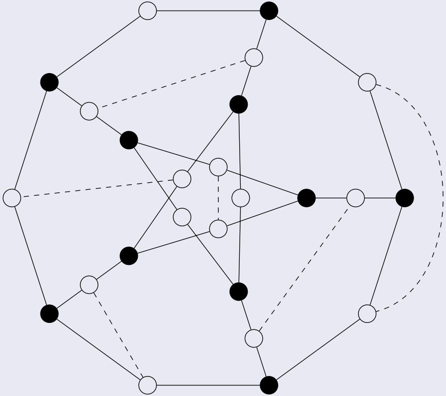
Graphes atteignant la borne inférieure - exemple

Example : D=Petersen graph, $\Delta = 3$, $n = 10$



Graphes atteignant la borne inférieure - exemple

Example : D=Petersen graph, $\Delta = 3$, $n = 10$



Borne supérieure générale

Thm (Gravier, Moncel 07 [9])

Soit G un graphe identifiable connexe à $n \geq 3$ sommets.
Alors $\gamma_{id}(G) \leq n - 1$.

Borne supérieure générale

Thm (Gravier, Moncel 07 [9])

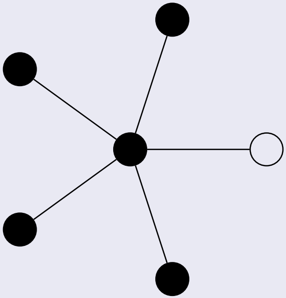
Soit G un graphe identifiable connexe à $n \geq 3$ sommets.
Alors $\gamma_{id}(G) \leq n - 1$.

Thm (Gravier, Moncel 07 [9])

Pour tout $n \geq 3$, il existe des graphes identifiables à n sommets tels que $\gamma_{id}(G) = n - 1$.

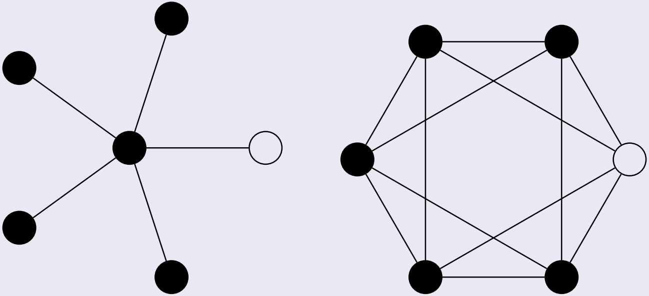
Borne supérieure - exemple

Exemple : l'étoile $K_{1,n-1}$



Borne supérieure - exemple

Exemple : l'étoile $K_{1,n-1}$



Borne supérieure et degré maximum

Remarque

Tout ces graphes ont un degré maximum $\Delta(G)$ élevé : $n-1$ or $n-2$.

Résultat - cas général

Thm

Soit G un graphe connexe identifiable de degré maximum Δ.
Alors $\gamma_{id}(G) \leq n - \frac{n}{\Theta(\Delta^4)}$.
Si G est régulier, $\gamma_{id}(G) \leq n - \frac{n}{\Theta(\Delta^2)}$.

Résultat - cas général

Thm

Soit G un graphe connexe identifiable de degré maximum Δ.
Alors $\gamma_{id}(G) \leq n - \frac{n}{\Theta(\Delta^4)}$.
Si G est régulier, $\gamma_{id}(G) \leq n - \frac{n}{\Theta(\Delta^2)}$.

Idée de la preuve

- Construire un ensemble 4-indépendant (resp. 2-indépendent) S de taille $\frac{n}{\Theta(\Delta^4)}$ (resp. $\frac{n}{\Theta(\Delta^2)}$) : la distance entre 2 sommets de S est au moins 5 (resp. 3)
- prendre $C = V \setminus S$ comme code
- C doit être modifié localement

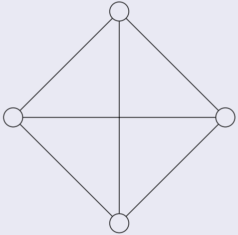
Cliques interconnectées

- Prendre un graphe Δ-régulier H à m sommets
- Remplacer chaque sommet de H par une clique de taille Δ

Cliques interconnectées

- Prendre un graphe Δ-régulier H à m sommets
- Remplacer chaque sommet de H par une clique de taille Δ

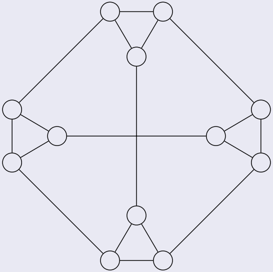
Exemple : $H = K_4$



Cliques interconnectées

- Prendre un graphe Δ-régulier H à m sommets
- Remplacer chaque sommet de H par une clique de taille Δ

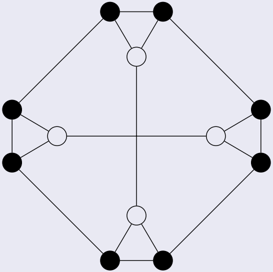
Exemple : $H = K_4$



Cliques interconnectées

- Prendre un graphe Δ-régulier H à m sommets
- Remplacer chaque sommet de H par une clique de taille Δ

Exemple : $H = K_4$



Pour chaque clique, au moins $\Delta - 1$ sommets doivent être dans le code
$\Rightarrow \gamma_{id}(G) \geq m \cdot (\Delta - 1) = n - \frac{n}{\Delta}$

Proposition

Soit $K_{m,m}$ le graphe biparti complet à $n = 2m$ sommets.
$id(K_{m,m}) = 2m - 2 = n - \frac{n}{\Delta}$.

Grands codes identifiants dans des graphes sans triangles

Proposition

Soit $K_{m,m}$ le graphe biparti complet à $n = 2m$ sommets.
$id(K_{m,m}) = 2m - 2 = n - \frac{n}{\Delta}$.

Thm (Bertrand et al. 05)

Soit T_k^h l'arbre k-aire à h niveaux et n sommets.

$$id(T_k^h) = \left\lceil \frac{k^2 n}{k^2 + k + 1} \right\rceil = n - \frac{n}{\Delta - 1 + \frac{1}{\Delta}}.$$

Graphes sans triangles - un majorant

Thm

Soit G un graphe sans triangles identifiable et connexe, G, à n sommets et de degré maximum Δ.
Alors $\gamma_{id}(G) \leq n - \frac{n}{3\Delta+3}$.
Si G est régulier, $\gamma_{id}(G) \leq n - \frac{n}{2\Delta+2}$.

Graphes sans triangles - un majorant

Thm

Soit G un graphe sans triangles identifiable et connexe, G, à n sommets et de degré maximum Δ.
Alors $\gamma_{id}(G) \leq n - \frac{n}{3\Delta+3}$.
Si G est régulier, $\gamma_{id}(G) \leq n - \frac{n}{2\Delta+2}$.

Idée de la preuve

- Construire un ensemble indépendant spécial S : $|S| \geq \frac{n}{\Delta+1}$
- Prendre $C = V \backslash S$ comme code
- certains sommets peuvent ne pas être identifiés
- $\rightarrow$ modifier C localement : on peut borner le nombre de sommets à ajouter à C

Borne supérieure : conjecture

Conjecture

Soit G un graphe identifiable connexe de degré maximum Δ.
Alors $\gamma_{id}(G) \leq n - \frac{n}{\Delta}$.

Graphes de maille au moins 5

Thm

Soit G un graphe identifiable à n sommets, de degré minimum $\delta \geq 2$ de de maille $g \geq 5$.

Alors $\gamma_{id}(G) \leq \dfrac{7n}{8} + 1$.

Graphes de maille au moins 5

Thm

Soit G un graphe identifiable à n sommets, de degré minimum $\delta \geq 2$ de de maille $g \geq 5$.
Alors $\gamma_{id}(G) \leq \dfrac{7n}{8} + 1$.

Idée de la preuve

- Construire un arbre couvrant en profondeur, T, de G
- Partitionner les sommets en 4 classes V_0, V_1, V_2, V_3 selon leur niveau dans T
- Prendre $C = V \setminus V_i$ comme code, $|V_i| \geq \frac{n}{4}$: $|V_i| \leq \frac{3n}{4}$
- C doit être modifié localement ; il faut ajouter $\frac{n}{8} + 1$ sommets dans le pire des cas

Résumé

	graphes arbitraires	graphes Δ-réguliers
graphes arbitraires	$\left\langle n - \frac{n}{\Delta},\ n - \frac{n}{\Theta(\Delta^4)} \right\rangle$	$\left\langle n - \frac{n}{\Delta},\ n - \frac{n-1}{\Delta^2} \right\rangle$
graphes sans triangles	$\left\langle n - \frac{n}{\Delta},\ n - \frac{n}{3\Delta+3} \right\rangle$	$\left\langle n - \frac{n}{\Delta},\ n - \frac{n}{2\Delta+2} \right\rangle$

	degré minimum $\delta \geq 2$
graphes de maille au moins 5	$\left\langle \frac{3n}{5}, \frac{7n}{8} + 1 \right\rangle$

Bibliography I

Nathalie Bertrand, Irène Charon, Olivier Hudry, and Antoine Lobstein.
Identifying and locating-dominating codes on chains and cycles.
European Journal of Combinatorics, 25(7):969–987, 2004.

Nathalie Bertrand, Irène Charon, Olivier Hudry, and Antoine Lobstein.
1-identifying codes on trees.
Australasian Journal of Combinatorics, 31:21–35, 2005.

Irène Charon, Olivier Hudry, and Antoine Lobstein.
Minimizing the size of an identifying or locating-dominating code in a graph is NP-hard.
Theoretical Computer Science, 290(3):2109–2120, 2003.

Irène Charon, Olivier Hudry, and Antoine Lobstein.
Extremal cardinalities for identifying and locating-dominating codes in graphs.
Discrete Mathematics, 307(3-5):356–366, 2007.

Bibliography II

G. Cohen, I. Honkala, A. Lobstein, and G. Zémor.
On identifying codes.
volume 56 of *Proceedings of DIMACS Workshop on Codes and Association Schemes '99*, pages 97–109, 2001.

C. J. Colbourn, P. J. Slater, and L. K. Stewart.
Locating–dominating sets in series-parallel networks.
Congressus Numerantium, 56:135–162, 1987.

Florent Foucaud, Ralf Klasing, Adrian Kosowski, and André Raspaud.
Identifying codes and the maximum degree in triangle-free graphs.
2009.
to be submitted.

Sylvain Gravier, Ralf Klasing, and Julien Moncel.
Hardness results and approximation algorithms for identifying codes and locating-dominating codes in graphs.
Algorithmic Operations Research, 3(1):43–50, 2008.

Bibliography III

Sylvain Gravier and Julien Moncel.
On graphs having a $V \setminus \{x\}$ set as an identifying code.
Discrete Mathematics, 307(3-5):432 – 434, 2007.
Algebraic and Topological Methods in Graph Theory.

Mark G. Karpovsky, Krishnendu Chakrabarty, and Lev B. Levitin.
On a new class of codes for identifying vertices in graphs.
IEEE Transactions on Information Theory, 44:599–611, 1998.

Julien Moncel.
Codes Identifiants dans les Graphes.
PhD thesis, Université Joseph Fourier – Grenoble I, 2005.

Julien Moncel.
Optimal graphs for identification of vertices in networks.
Les cahiers Leibniz, 138, 2005.

Bibliography IV

Julien Moncel.
On graphs on n vertices having an identifying code of cardinality $log_2(n+1)$.
Discrete Applied Mathematics, 154(14):2032–2039, 2006.

P. J. Slater.
Domination and location in acyclic graphs.
Networks, 17(1):55–64, 1987.

P. J. Slater and D. F. Rall.
On location–domination numbers for certain classes of graphs.
Congressus Numerantium, 45:97–106, 1984.

Krishnaiyan Thulasiraman, Min Xu, Ying Xiao, and Xiao-Dong Hu.
Vertex identifying codes for fault isolation in communication networks.
Proceedings of the International Conference on Discrete Mathematics and Applications (ICDM 2006), Bangalore, 2006.