Augmentation de l'arête-connexité d'un hypergraphe

Roland Grappe[1]
Travail commun avec A. Bernáth[2] et Z. Szigeti[1]

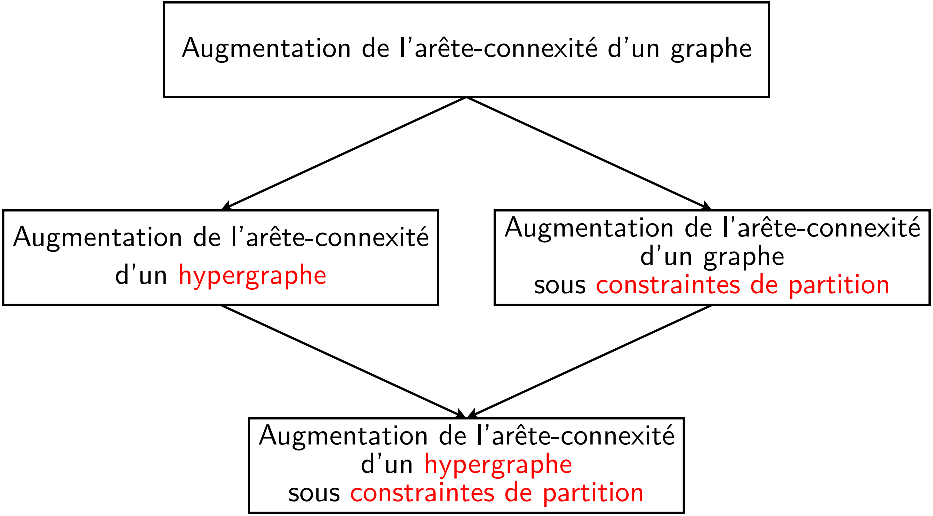
[1] Laboratoire G-SCOP
[2] Egerváry Research Group

JGA
6 Novembre 2009

Plan

1. Augmentation de l'arête-connexité d'un graphe
2. . . . sous contraintes de partition
3. Augmentation de l'arête-connexité d'un hypergraphe
4. . . . sous contraintes de partition

Problèmes


Augmentation de l'arête-connexité d'un graphe
Augmentation de l'arête-connexité d'un hypergraphe
Augmentation de l'arête-connexité d'un graphe sous constraintes de partition
Augmentation de l'arête-connexité d'un hypergraphe sous constraintes de partition

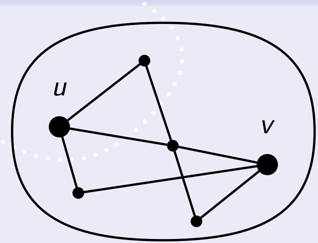
Plan

1. Augmentation de l'arête-connexité d'un graphe
2. ... sous contraintes de partition
3. Augmentation de l'arête-connexité d'un hypergraphe
4. ... sous contraintes de partition

Définitions : arête-connexité et coupes

graphes **non** orientés, **pas de** coûts

$G = (V, E)$ est k-arête-connexe :

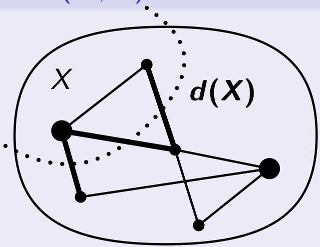


k chaînes arête-disjointes entre u et v, $\forall u, v$

Définitions : arête-connexité et coupes

graphes **non** orientés, **pas de** coûts

$G = (V, E)$ est ***k*-arête-connexe** :



k chaînes arête-disjointes entre u et v, $\forall u, v$

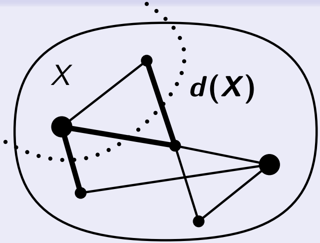
$$\Downarrow$$

$$d(X) \geq k, \forall X \subset V$$

Définitions : arête-connexité et coupes

graphes **non** orientés, **pas de** coûts

$G = (V, E)$ est ***k*-arête-connexe** :



k chaînes arête-disjointes entre u et v, $\forall u, v$

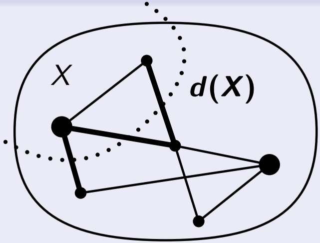
$\Updownarrow$ Menger

$$d(X) \geq k, \forall X \subset V$$

Définitions : arête-connexité et coupes

graphes **non** orientés, **pas de** coûts

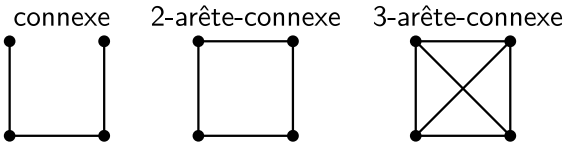
$G = (V, E)$ est ***k*-arête-connexe** :



k chaînes arête-disjointes entre u et v, $\forall u, v$

$\Updownarrow$ Menger

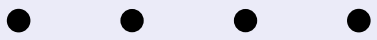
$d(X) \geq k, \; \forall X \subset V$



Rendre un graphe connexe

Soit G un **graphe**,
ajouter un nombre minimum d'arêtes à G pour le rendre connexe.

Exemple : Il faut 3 nouvelles arêtes.



Rendre un graphe connexe

Soit G un **graphe**,
ajouter un nombre minimum d'arêtes à G pour le rendre connexe.

Exemple : Il faut 3 nouvelles arêtes.

Rendre un graphe connexe

Soit G un **graphe**,
ajouter un nombre minimum d'arêtes à G pour le rendre connexe.

Exemple : Il faut 3 nouvelles arêtes.

Solution

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Alors le nombre minimum de nouvelles arêtes à ajouter à G pour le rendre connexe est

$$\#\text{composantes}(G)\text{-}1.$$

Rendre un graphe k-arête-connexe

Augmentation de l'arête-connexité d'un graphe

Soit G un **graphe** et $\boldsymbol{k \geq 2}$,
ajouter un nombre minimum d'arêtes à G pour le rendre k-arête-connexe.

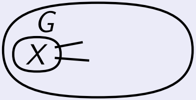
Rendre un graphe k-arête-connexe

Augmentation de l'arête-connexité d'un graphe

Soit G un **graphe** et $\boldsymbol{k \geq 2}$,
ajouter un nombre minimum d'arêtes à G pour le rendre k-arête-connexe.

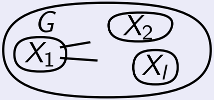
Manque

d'un ensemble X



$k - d(X)$

d'une sous-partition $\{X_1, \ldots X_l\}$ de V



$\sum_{i=1,\ldots l}(k - d(X_i))$

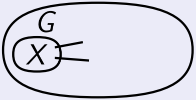
Rendre un graphe k-arête-connexe

Augmentation de l'arête-connexité d'un graphe

Soit G un **graphe** et $\boldsymbol{k \geq 2}$,
ajouter un nombre minimum d'arêtes à G pour le rendre k-arête-connexe.

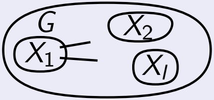
Manque

d'un ensemble X



$k - d(X)$

d'une sous-partition $\{X_1, \ldots X_l\}$ de V



$\sum_{i=1,\ldots l}(k - d(X_i))$

Borne inférieure des sous-partitions

BIS $= \lceil \frac{1}{2} \max\{\text{manque d'une sous-partition}\} \rceil$

Théorème pour les graphes

Théorème (Watanabe, Nakamura)

Soit $G = (V, E)$ un graphe et $k \geq 2$. Alors le nombre minimum d'arêtes à ajouter à G pour le rendre k-arête-connexe est

BIS.

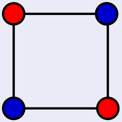
Plan

Constraintes de partition

Constraintes de **bi**partition

Exercice 1

Ajouter un nombre minimum d'arêtes pour rendre le graphe suivant 3-arête-connexe en respectant la bipartition.

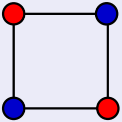


Constraintes de partition

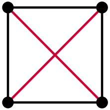
Constraintes de **bi**partition

Exercice 1

Ajouter un nombre minimum d'arêtes pour rendre le graphe suivant 3-arête-connexe en respectant la bipartition.



Sans contraintes de partition



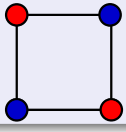
unique solution

Constraintes de partition

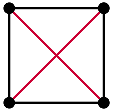
Constraintes de **bi**partition

Exercice 1

Ajouter un nombre minimum d'arêtes pour rendre le graphe suivant 3-arête-connexe en respectant la bipartition.

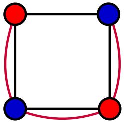


Sans contraintes de partition



unique solution

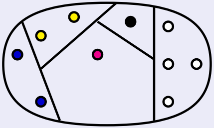
avec contraintes



solution optimale

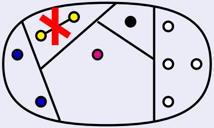
Augmentation de l'arête-connexité d'un graphe sous contraintes de partition

contraintes de partition



Augmentation de l'arête-connexité d'un graphe sous contraintes de partition

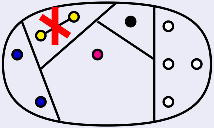
contraintes de partition

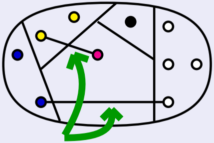


Interdit

Augmentation de l'arête-connexité d'un graphe sous contraintes de partition

contraintes de partition



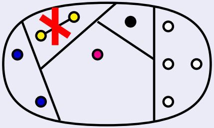


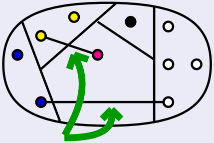
Interdit Autorisé

Les nouvelles arêtes relient des sommets de différentes couleurs.

Augmentation de l'arête-connexité d'un graphe sous contraintes de partition

contraintes de partition





Interdit Autorisé

Les nouvelles arêtes relient des sommets de différentes couleurs.

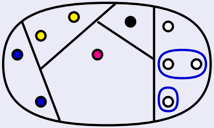
Augmentation de l'arête-connexité d'un graphe sous contraintes de partition

Soit G un **graphe**, $\mathcal{P} = \{V_1, \dots V_r\}$ une **partition** de V, et $\boldsymbol{k \geq 2}$, ajouter un nombre minimum d'arêtes reliant différents membres de $\mathcal{P}$ pour rendre G k-arête-connexe.

Nouvelle borne inférieure

Manque

d'une sous-partition $X_1, \ldots X_l$ de V_j

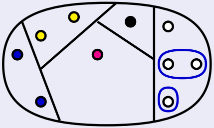


$$\sum_{i=1}^{l} (k - d(X_i))$$

Nouvelle borne inférieure

Manque

d'une sous-partition $X_1, \ldots X_l$ de V_j

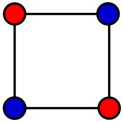


$$\sum_{i=1}^{l}(k - d(X_i))$$

Borne inférieure pour les contraintes de partition

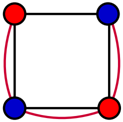
BICP $= \max\{$manque d'une sous-partition de $V_j, j = 1, \ldots r\}$

La borne inférieure n'est pas atteinte !

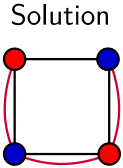


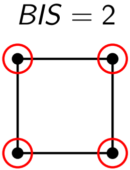
La borne inférieure n'est pas atteinte !

Solution

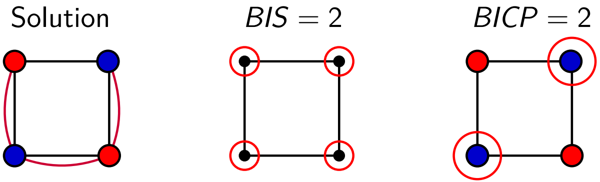


La borne inférieure n'est pas atteinte !

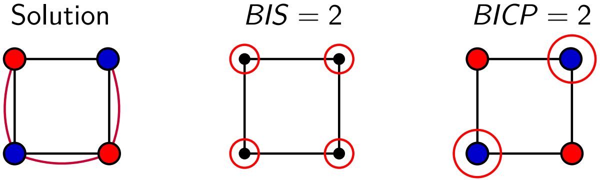




La borne inférieure n'est pas atteinte !



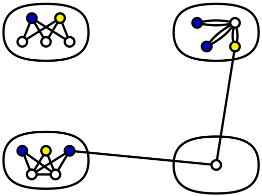
La borne inférieure n'est pas atteinte !



La borne inférieure $\max\{BIS, BICP\}$ n'est pas atteinte, on la rate de 1.

Un méchant slide pour de méchants graphes

C_4-configuration



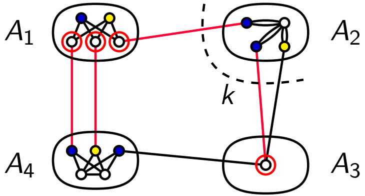
C_4-configuration

k est impair, $\{A_1, \ldots, A_4\}$ est une partition de V

- $k - d(A_i) > 0, \forall i$
- $d(A_i, A_{i+2}) = 0, \forall i$
- $\max\{\text{BIS,BICP}\} = k - d(A_i) + k - d(A_{i+2})$, $i = 1, 2$
- $\exists P \in \mathcal{P}$, $\exists j \in \{1, 2\}$, $\exists \mathcal{X}_i$ sous-partition de A_i :
    - $\mathcal{X}_j \cup \mathcal{X}_{j+2}$ est une sous-partition de P
    - $\sum_{X \in \mathcal{X}_i}(k - d(X)) = k - d(A_i)$, $\forall i$

Un méchant slide pour de méchants graphes

C_4-configuration



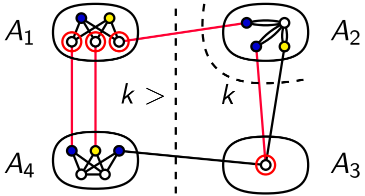
C_4-configuration

k est impair, $\{A_1, \ldots, A_4\}$ est une partition de V

- $k - d(A_i) > 0, \forall i$
- $d(A_i, A_{i+2}) = 0, \forall i$
- $\max\{\text{BIS,BICP}\} = k - d(A_i) + k - d(A_{i+2})$, $i = 1, 2$
- $\exists P \in \mathcal{P}$, $\exists j \in \{1, 2\}$, $\exists \mathcal{X}_i$ sous-partition de A_i :
  - $\mathcal{X}_j \cup \mathcal{X}_{j+2}$ est une sous-partition de P
  - $\sum_{X \in \mathcal{X}_i}(k - d(X)) = k - d(A_i)$, $\forall i$

Un méchant slide pour de méchants graphes

C_4-configuration



C_4-configuration

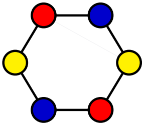
k est impair, $\{A_1, \ldots, A_4\}$ est une partition de V

- $k - d(A_i) > 0, \forall i$
- $d(A_i, A_{i+2}) = 0, \forall i$
- $\max\{\text{BIS,BICP}\} = k - d(A_i) + k - d(A_{i+2})$, $i = 1, 2$
- $\exists P \in \mathcal{P}$, $\exists j \in \{1, 2\}$, $\exists \mathcal{X}_i$ sous-partition de A_i :
  - $\mathcal{X}_j \cup \mathcal{X}_{j+2}$ est une sous-partition de P
  - $\sum_{X \in \mathcal{X}_i}(k - d(X)) = k - d(A_i)$, $\forall i$

Une deuxième famille de configurations

C_6-configuration

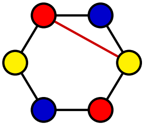
Ajouter un nombre minimum d'arêtes pour rendre C_6 3-arête-connexe en respectant les contraintes de partition.



Une deuxième famille de configurations

C_6-configuration

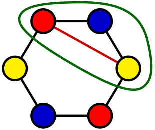
Ajouter un nombre minimum d'arêtes pour rendre C_6 3-arête-connexe en respectant les contraintes de partition.



Une deuxième famille de configurations

C_6-configuration

Ajouter un nombre minimum d'arêtes pour rendre C_6 3-arête-connexe en respectant les contraintes de partition.

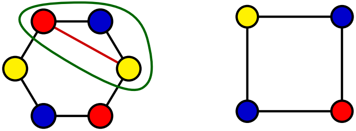


Une C_4-configuration apparaît !

Une deuxième famille de configurations

C_6-configuration

Ajouter un nombre minimum d'arêtes pour rendre C_6 3-arête-connexe en respectant les contraintes de partition.

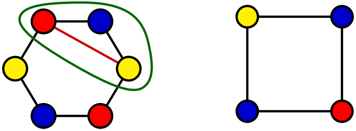


Une C_4-configuration apparaît !

Une deuxième famille de configurations

C_6-configuration

Ajouter un nombre minimum d'arêtes pour rendre C_6 3-arête-connexe en respectant les contraintes de partition.



Une C_4-configuration apparaît !

C_6-configuration

- $k - d(A_i) = 1$
- $k - d(A_i \cup A_{i+1}) = 1$
- $\max\{\text{BIS}, \text{BICP}\} = 3$
- $\exists P_1, P_2, P_3 \in \mathcal{P}$ et $A'_i \subseteq A_i$ tels que $k - d(A'_i) = k - d(A_i)$ et $A'_i \cup A'_{i+3} \subseteq P_i$

Augmentation de l'arête-connexité d'un graphe sous contraintes de partition

Théorème (Bang-Jensen, Gabow, Jordán, Szigeti)

Soit $G = (V, E)$ un graphe, $\mathcal{P}$ une partition de V et $k \geq 2$. Alors le nombre minimum de nouvelles arêtes reliant différents membres de $\mathcal{P}$ à ajouter à G pour le rendre k-arête-connexe est

$$\begin{cases} \max\{BIS,\ BICP\} & \text{si } G \text{ ne contient ni } C_4\text{- ni } C_6\text{-configuration,} \\ \max\{BIS,\ BICP\} + 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Plan

Rendre un hypergraphe k-arête-connexe

Augmentation de l'arête-connexité d'un hypergraphe

Soit $H = (V, \mathcal{E})$ un **hypergraphe** et k **un entier**,
ajouter un nombre minimum d'**arêtes** pour rendre H k-arête-connexe.

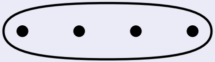
Rendre un hypergraphe k-arête-connexe

Augmentation de l'arête-connexité d'un hypergraphe

Soit $H = (V, \mathcal{E})$ un **hypergraphe** et k **un entier**,
ajouter un nombre minimum d'**arêtes** pour rendre H k-arête-connexe.

Exercice 2

Ajouter un nombre minimum d'arêtes pour rendre l'hypergraphe suivant 2-arête-connexe.



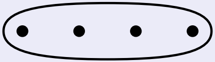
Rendre un hypergraphe k-arête-connexe

Augmentation de l'arête-connexité d'un hypergraphe

Soit $H = (V, \mathcal{E})$ un **hypergraphe** et k **un entier**,
ajouter un nombre minimum d'**arêtes** pour rendre H k-arête-connexe.

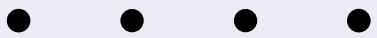
Exercice 2

Ajouter un nombre minimum d'arêtes pour rendre l'hypergraphe suivant 2-arête-connexe.



Exercice équivalent

Ajouter un nombre minimum d'arêtes pour rendre le graphe suivant connexe.



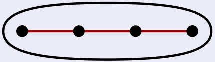
Rendre un hypergraphe k-arête-connexe

Augmentation de l'arête-connexité d'un hypergraphe

Soit $H = (V, \mathcal{E})$ un **hypergraphe** et k **un entier**,
ajouter un nombre minimum d'**arêtes** pour rendre H k-arête-connexe.

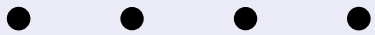
Exercice 2

Ajouter un nombre minimum d'arêtes pour rendre l'hypergraphe suivant 2-arête-connexe.



Exercice équivalent

Ajouter un nombre minimum d'arêtes pour rendre le graphe suivant connexe.



Nouvelle borne inférieure

Borne inférieure pour les hypergraphes

BIH $= \max\{\#\mathit{composantes}(H - \mathcal{F}) - 1$, pour $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$ tel que $|\mathcal{F}| = k - 1\}$

Nouvelle borne inférieure

Borne inférieure pour les hypergraphes

BIH $= \max\{\#composantes(H - \mathcal{F}) - 1$, pour $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$ tel que $|\mathcal{F}| = k - 1\}$

Théorème (Bang-Jensen, Jackson)

Soit $H = (V, \mathcal{E})$ un hypergraphe et k un entier. Alors le nombre minimum d'arêtes à ajouter à H pour le rendre k-arête-connexe est

$$\max \{BIS, BIH\}$$

.

Plan

Augmentation de l'arête-connexité d'un hypergraphe sous contraintes de partition

Augmentation de l'arête-connexité d'un hypergraphe sous contraintes de partition

Soient H un **hypergraphe**, $\mathcal{P} = \{V_1, \dots V_r\}$ une **partition** de V et k **un entier**, ajouter un nombre minimum d'**arêtes** reliant différents membres de $\mathcal{P}$ pour rendre H k-arête-connexe.

Précédentes bornes inférieures et configurations

Bornes inférieures

- BIS
- BIH
- BICP

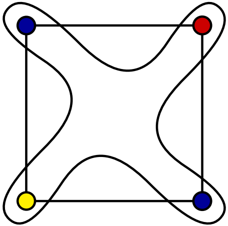
Précédentes bornes inférieures et configurations

Bornes inférieures

- BIS
- BIH
- BICP

Configurations

- C_4-configuration
- C_6-configuration



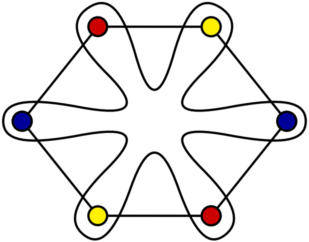
$\mathcal{C}_4$-configuration

Une partition $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ de V est une $\mathcal{C}_4$-configuration si

$$
\begin{array}{ll}
k - d(A_i) > 0 & \forall 1 \leq i \leq 4, \\
\delta(A_1) \cap \delta(A_3) = \delta(A_2) \cap \delta(A_4) = \mathcal{F} & \\
k - |\mathcal{F}| \text{ est impair} & \\
\sum_{X \in \mathcal{X}_i} (k - d(X)) = k - d(A_i) & \exists \mathcal{X}_i \text{ sous-partition de } A_i \ \forall i, \\
\mathcal{X}_j \cup \mathcal{X}_{j+2} \text{ sous-partition de } V_l & \exists 1 \leq l \leq r \ \exists 1 \leq j \leq 2, \\
k - d(A_i) + k - d(A_{i+2}) = \max\{\text{BIH, BIS, BICP}\} & \forall 1 \leq i \leq 2.
\end{array}
$$

Configurations pour les hypergraphes

$\mathcal{C}_6$-configuration



$\mathcal{C}_6$-configuration

Une partition $\{A_1, A_2, \ldots, A_6\}$ de V est une $\mathcal{C}_6$-configuration si

$$
\begin{array}{ll}
k - d(A_i) = 1 & \forall 1 \leq i \leq 6, \\
k - d(A_i \cup A_{i+1}) = 1 & \forall 1 \leq i \leq 6, (A_7 = A_1) \\
k - d(A'_i) = 1 & \exists 1 \leq j_1, j_2, j_3 \leq r,\ \forall 1 \leq i \leq 6,\ \exists A'_i \subseteq A_i \cap V_{j_{i-3\lfloor \frac{(i-1)}{3}}}
\end{array}
$$

$\max\{\text{BIH, BIS, BICP}\} = 3.$

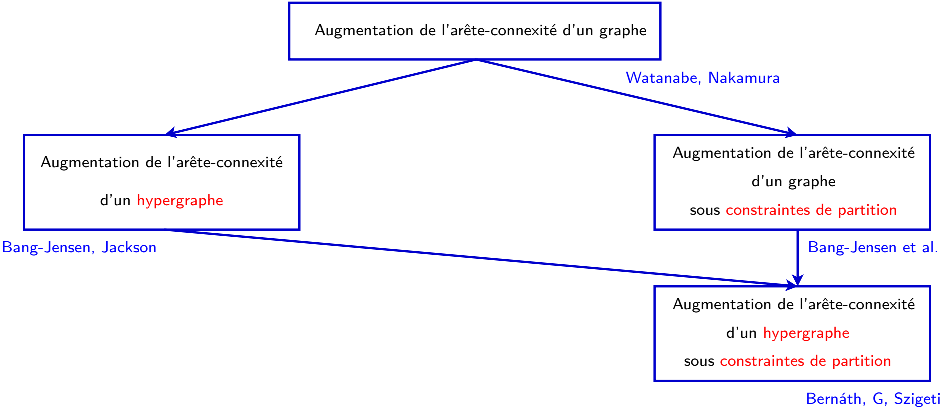
Augmentation de l'arête-connexité d'un hypergraphe sous contraintes de partition

Théorème (Bernáth, G, Szigeti)

Soit $H = (V, \mathcal{E})$ un hypergraphe, $\mathcal{P}$ une partition de V et k un entier. Alors le nombre minimum de nouvelles arêtes reliant différents membres de $\mathcal{P}$ à ajouter à H pour le rendre k-arête-connexe est

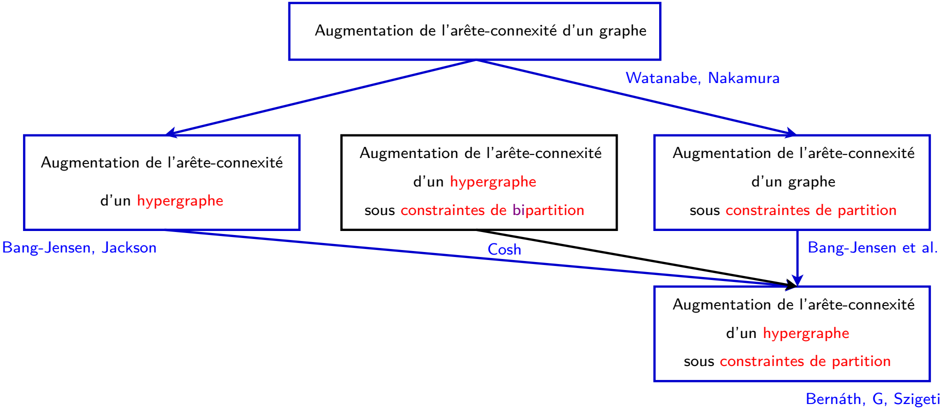
$$\begin{cases} \max\{BIH,\ BIS,\ BICP\} & \text{si } G \text{ ne contient ni } \mathcal{C}_4\text{- ni } \mathcal{C}_6\text{-configuration,} \\ \max\{BIH,\ BIS,\ BICP\} + 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Bilan



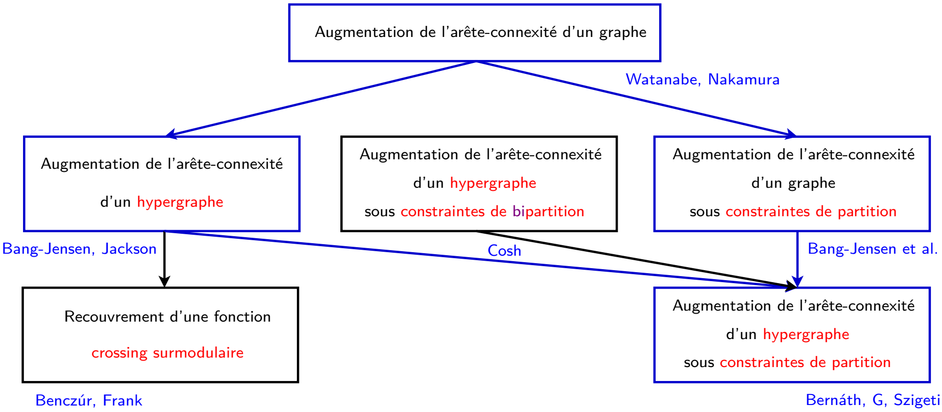
Augmentation de l'arête-connexité d'un graphe
Watanabe, Nakamura
Augmentation de l'arête-connexité d'un hypergraphe
Augmentation de l'arête-connexité d'un graphe sous constraintes de partition
Bang-Jensen, Jackson
Bang-Jensen et al.
Augmentation de l'arête-connexité d'un hypergraphe sous constraintes de partition
Bernáth, G, Szigeti

Bilan

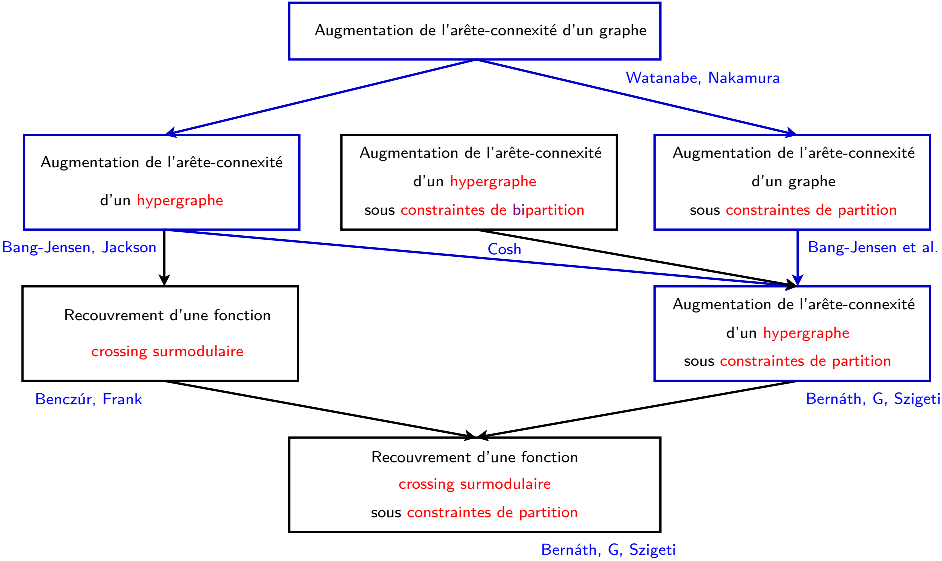


Augmentation de l'arête-connexité d'un graphe
Watanabe, Nakamura
Augmentation de l'arête-connexité d'un hypergraphe
Augmentation de l'arête-connexité d'un hypergraphe sous constraintes de bipartition
Augmentation de l'arête-connexité d'un graphe sous constraintes de partition
Bang-Jensen, Jackson
Cosh
Bang-Jensen et al.
Augmentation de l'arête-connexité d'un hypergraphe sous constraintes de partition
Bernáth, G, Szigeti

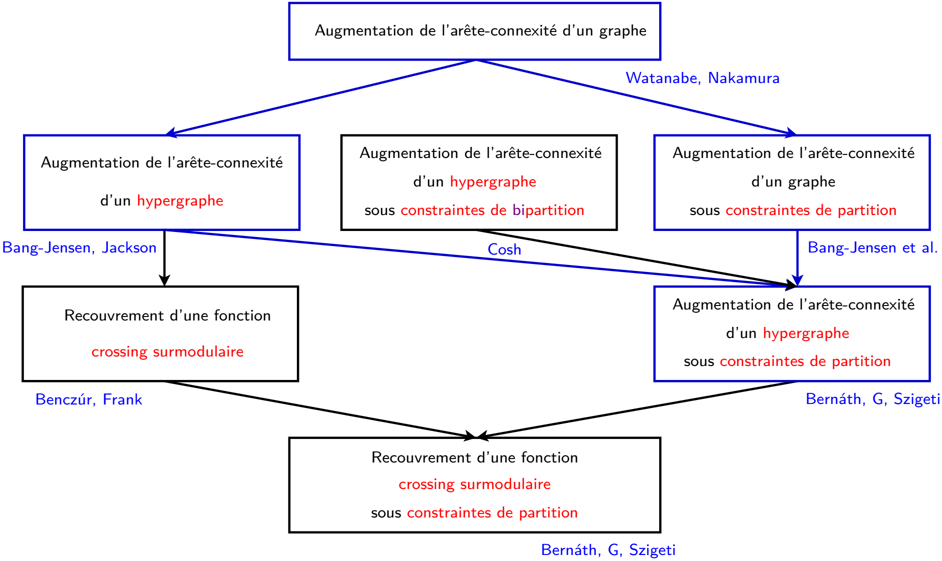
Bilan


Augmentation de l'arête-connexité d'un graphe
Watanabe, Nakamura
Augmentation de l'arête-connexité d'un hypergraphe
Augmentation de l'arête-connexité d'un hypergraphe sous contraintes de bipartition
Augmentation de l'arête-connexité d'un graphe sous contraintes de partition
Bang-Jensen, Jackson
Cosh
Bang-Jensen et al.
Recouvrement d'une fonction crossing surmodulaire
Augmentation de l'arête-connexité d'un hypergraphe sous contraintes de partition
Benczúr, Frank
Bernáth, G, Szigeti

Bilan


Augmentation de l'arête-connexité d'un graphe
Watanabe, Nakamura
Augmentation de l'arête-connexité d'un hypergraphe
Augmentation de l'arête-connexité d'un hypergraphe sous constraintes de bipartition
Augmentation de l'arête-connexité d'un graphe sous constraintes de partition
Bang-Jensen, Jackson
Cosh
Bang-Jensen et al.
Recouvrement d'une fonction crossing surmodulaire
Augmentation de l'arête-connexité d'un hypergraphe sous constraintes de partition
Benczúr, Frank
Bernáth, G, Szigeti
Recouvrement d'une fonction crossing surmodulaire sous constraintes de partition
Bernáth, G, Szigeti

Bilan Tous ces problèmes sont polynomiaux



Merci de votre attention !