Router les circulations planaires

Guyslain Naves

5–6 novembre 2009

G-SCOP, Université Joseph Fourier, Grenoble

Problème (FLOT (décision))

Soient G un graphe, $s, t \in V(G)$, $c : E(G) \to \mathbb{N}$. Décider l'existence d'un multi-ensemble $\mathcal{P}$ de (s, t)-chemins tel que :

$$|\{P \in \mathcal{P} \mid e \in E(P)\}| \leq c(e) \quad (e \in E(G))$$
$$|\mathcal{P}| = k$$

Flots et Multiflots

Problème (Flot (décision))

Soient G un graphe, $h \in E(G)$, $c : E(G) \rightarrow \mathbb{N}$. Décider l'existence d'un multi-ensemble $\mathcal{C}$ de cycles tel que :

$$|\{P \in \mathcal{C} \mid e \in E(P)\}| \leq c(e) \quad (e \in E(G) - h)$$
$$|\{P \in \mathcal{C} \mid e \in E(P)\}| = c(h)$$

Flots et Multiflots

Problème (Flot (décision))

Soient G un graphe, $h \in E(G)$, $c : E(G) \to \mathbb{N}$. Décider l'existence d'un multi-ensemble $\mathcal{C}$ de cycles tel que :

$$|\{P \in \mathcal{C} \mid e \in E(P)\}| \leq c(e) \quad (e \in E(G) - h)$$
$$|\{P \in \mathcal{C} \mid e \in E(P)\}| = c(h)$$

Problème (Multiflot entier)

Soient G, H deux graphes, $V(H) \subseteq V(G)$ $c : E(G + H) \to \mathbb{N}$. Décider l'existence d'un multi-ensemble $\mathcal{C}$ de cycles intersectant H exactement une fois, tel que :

$$f(e) = |\{P \in \mathcal{P} \mid e \in E(P)\}| \leq c(e) \quad (e \in E(G))$$
$$f(h) = |\{P \in \mathcal{P} \mid e \in E(P)\}| = c(h) \quad (h \in E(H))$$

Loi de conservation

Pour un cycle C :

$$\chi_C(\delta^+(v)) - \chi_C(\delta^-(v)) = 0 \qquad (v \in V(G))$$

Pour un flot :

$$f(\delta^+(v)) - f(\delta^-(v)) = 0 \qquad (v \in V(G))$$

Définition

$f : E(G) \to \mathbb{N}$ *est une circulation de* G *si* f *vérifie ces équations.*

Théorème (Fulkerson)

Il existe un (s,t)*-flot de valeur* k *dans* G *ssi il existe une circulation* f *de* G *avec* $f(h) = k$.

Problème du jour

Problème (Multiflot dans les circulations)

Multiflot dans le cas où la capacité c est une circulation de $G + H$.

Remarque :
Si $|E(H)| = 1$ (flot dans une circulation), ce problème est constant, il existe toujours un flot.
Si $|E(H)| = 2$, il est polynomial (Nash-Williams, Frank).
Si $|E(H)| \geq 3$, c'est NP-complet, même avec G acyclique (Vygen).

Cas G planaire acyclique

Théorème (Pfeiffer, Marx)

Si G est planaire acyclique, MULTIFLOT DANS LES CIRCULATIONS *est NP-complet*

Théorème (Ibaraki et Nagamochi)

Si G est planaire acyclique, que toutes les origines des arcs de demande sont sur le bord d'une même face de G et qu'il existe un bon ordre d'élimination des sommets, MULTIFLOT DANS LES CIRCULATIONS *est polynomial.*

G-SCOP SCIENCES POUR LA CONCEPTION, L'OPTIMISATION ET LA PRODUCTION

Résultat

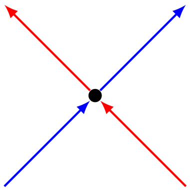
Théorème

Si G est planaire acyclique, et $|H|$ est fixé, MULTIFLOT DANS LES CIRCULATIONS *est pseudopolynomial.*

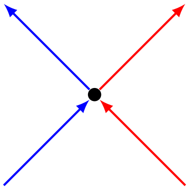
Preuve :

- Décroiser les chemins,
- Étudier la structure des chemins (indépendant de G),
- Router localement en chaque sommet.

Décroisement

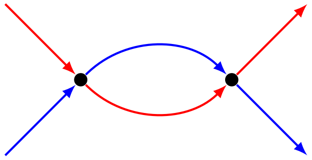


Croisés.

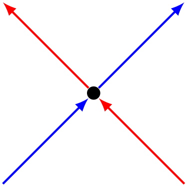


Pas croisés.

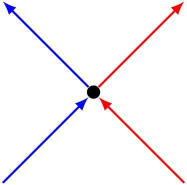
Décroisement : deux chemins se croisent au plus une fois.



Décroisement

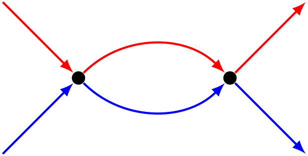


Croisés.



Pas croisés.

Décroisement : deux chemins se croisent au plus une fois.



Décroisement

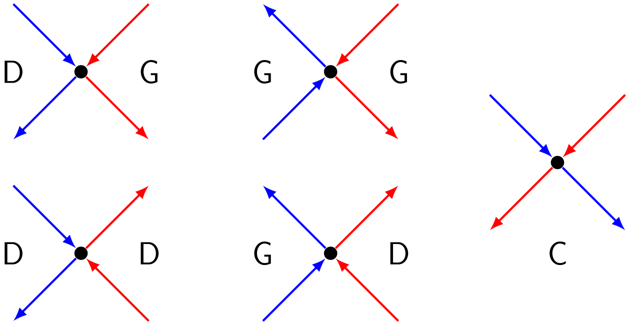
Plus exactement :

Proposition

S'il existe une solution, il existe une solution telle que, si deux chemins sont croisés, ils se croisent uniquement en leur premier sommet commun, et leurs terminaux sont distincts.

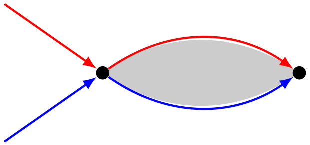
Preuve : Décroisement successifs des chemins, terminaison par décroissance lexicographique des nombres de croisement en chaque sommet.

Première intersection



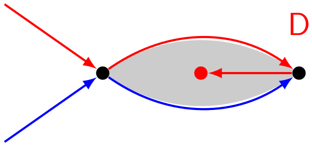
Pour deux chemins, 5 possibilités en première intersection.

Deuxième intersection



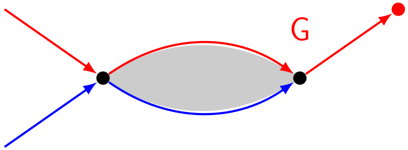
- Pas de croisement possible.
- Cycle formé par les chemins.
- Position des terminaux déterminante.

Deuxième intersection



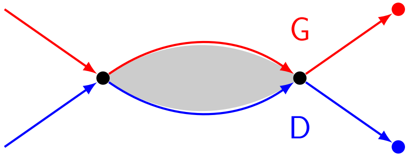
- Pas de croisement possible.
- Cycle formé par les chemins.
- Position des terminaux déterminante.

Deuxième intersection



- Pas de croisement possible.
- Cycle formé par les chemins.
- Position des terminaux déterminante.

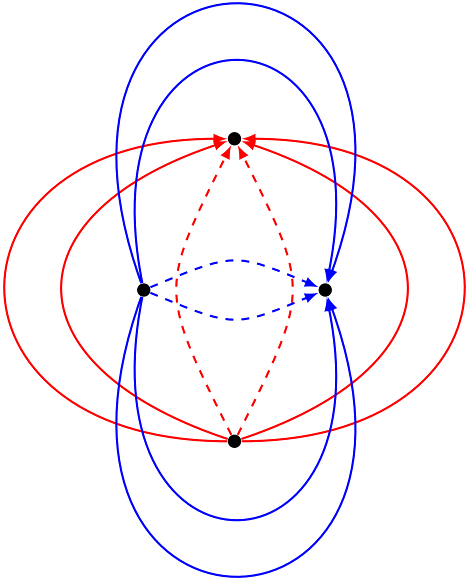
Deuxième intersection



- Pas de croisement possible.
- Cycle formé par les chemins.
- Position des terminaux déterminante.

Il suffit de déterminer la première intersection !

Pour deux demandes



Deux demandes

Plus précisément :

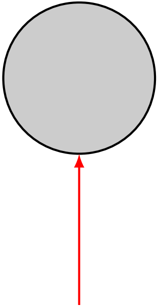
Proposition

Pour un arc de demande h et un chemin P d'une autre demande, l'ensemble des chemins pour h passant à droite de (resp. passant à gauche de, croisant) P en leur première intersection est consécutif.

Consécutif = consécutif autour de leur sommet d'origine.
Remarque : $O((\max_{h \in E(H)} c(h))^{3|E(H)|^2})$ possibilités.

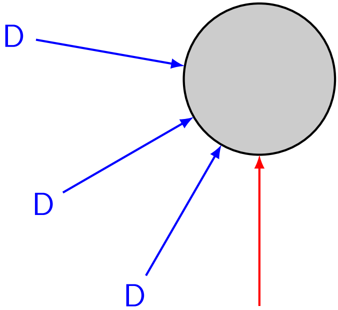
Router les sommets

Suivant un ordre cohérent :



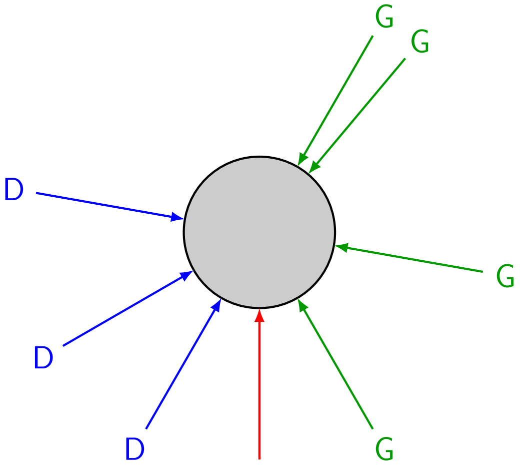
Router les sommets

Suivant un ordre cohérent :



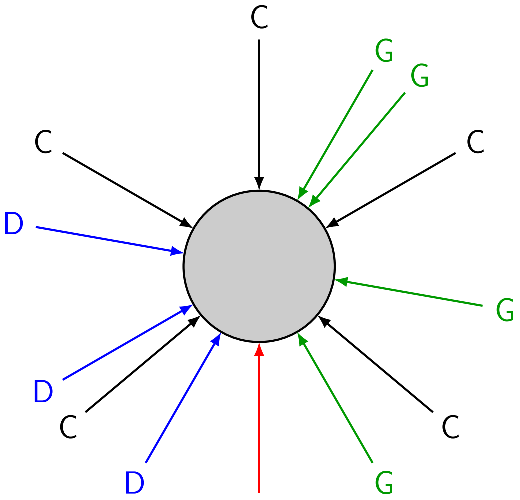
Router les sommets

Suivant un ordre cohérent :



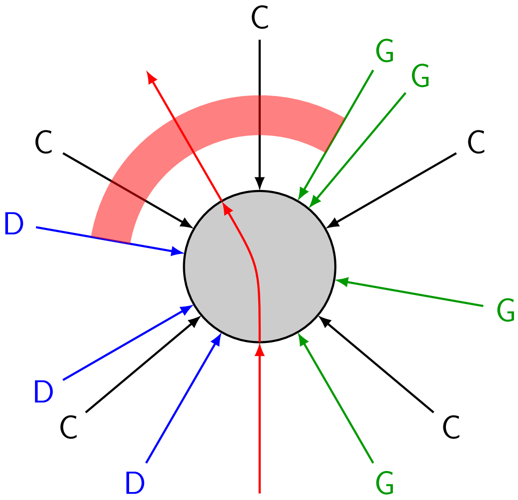
Router les sommets

Suivant un ordre cohérent :



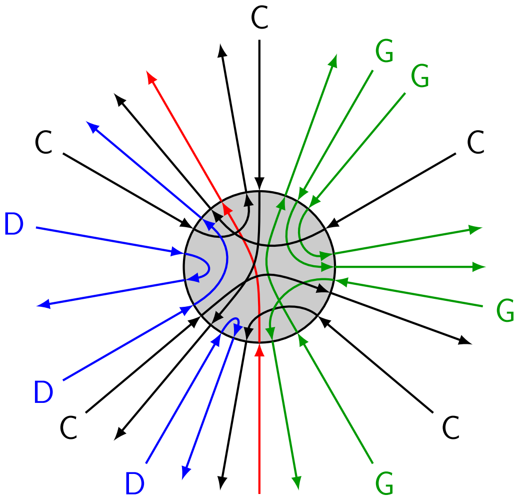
Router les sommets

Suivant un ordre cohérent :



Router les sommets

Suivant un ordre cohérent : il existe au plus un routage



Algorithme

1. Deviner les comportements relatifs des chemins.
2. Router chaque sommet par ordre croissant.

Complexité : $O(f(C)^{|E(H)|^2}n)$, avec $C = \max_{h \in E(H)} c(h)$ et f fonction polynomiale.

Questions

- Trouver un algorithme polynomial. (ou une preuve de NP-complétude faible)
- Que se passe-t-il si G n'est pas acyclique ?