*Journées Graphes et Algorithmes 2009*

# Deux variantes autour des codes identifiants

Olivier Delmas, Sylvain Gravier, Mickaël Montassier, Aline Parreau

5 novembre 2009

ANR IDEA

# Codes $r$-identifiants

$G = (V, E)$ un graphe, $r \in \mathbb{N}$.

$C \subseteq V$ est un code $r$-identifiant si :

- $C$ est un ensemble dominant :

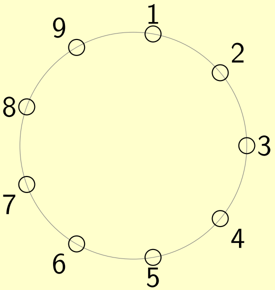
$$\forall x \in V, B_r(x) \cap C \neq \emptyset$$

- $C$ $r$-sépare tous les sommets :

$$\forall x \in V, \forall y \in V, B_r(x) \cap C \neq B_r(y) \cap C$$

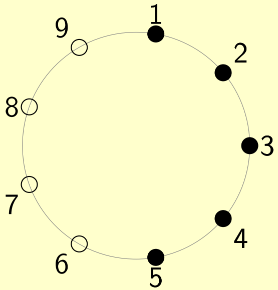
# Codes $r$-identifiants

Exemple avec $r = 2$ sur $\mathcal{C}_8$ :



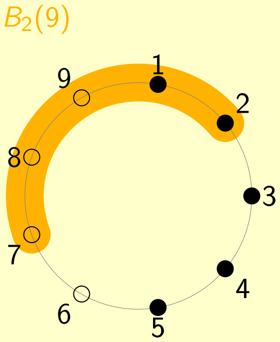
# Codes $r$-identifiants

Exemple avec $r = 2$ sur $\mathcal{C}_8$ :



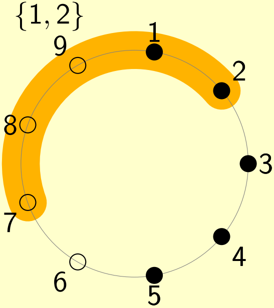
# Codes $r$-identifiants

Exemple avec $r = 2$ sur $\mathcal{C}_8$ :



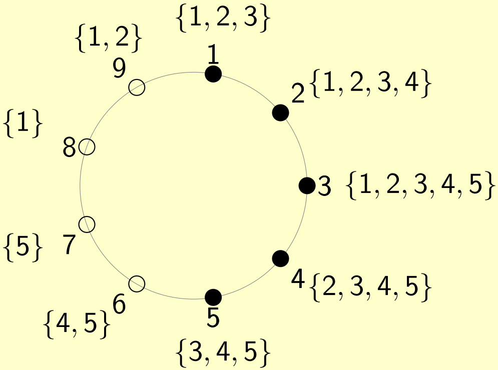
# Codes $r$-identifiants

Exemple avec $r = 2$ sur $\mathcal{C}_8$ :



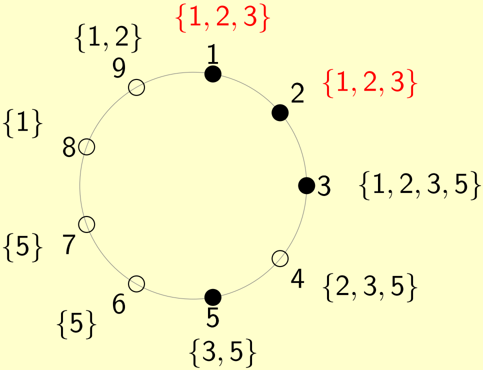
# Codes $r$-identifiants

Exemple avec $r = 2$ sur $\mathcal{C}_8$ :



# Codes $r$-identifiants

Exemple avec $r = 2$ sur $\mathcal{C}_8$ :



# Une première variante

$G = (V, E)$ un graphe, $r \in \mathbb{N}$.

$C \subseteq V$ est un code $r$-identifiant si :

- $C$ est un ensemble dominant :

$$\forall x \in V, B_r(x) \cap C \neq \emptyset$$

- $C$ $r$-sépare tous les sommets :

$$\forall x \in V, \forall y \in V, B_r(x) \cap C \neq B_r(y) \cap C$$

# Une première variante

$G = (V, E)$ un graphe, $r \in \mathbb{N}$.

$C \subseteq V$ est un code $r$-identifiant faible si :

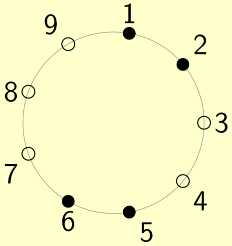
- $C$ est un ensemble dominant :

$$\forall x \in V, B_r(x) \cap C \neq \emptyset$$

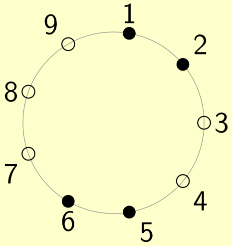
- $C$ $r$-sépare faiblement tous les sommets :

$$\forall x \in V, \exists r_x \in [0, r], \forall y \in V, B_{r_x}(x) \cap C \neq B_{r_x}(y) \cap C$$

# Codes $r$-identifiants faibles

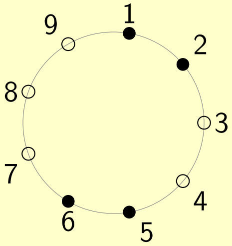


# Codes $r$-identifiants faibles



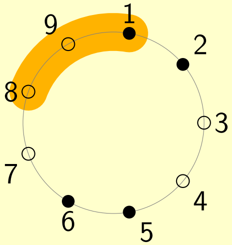

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

# Codes $r$-identifiants faibles



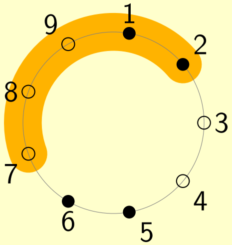

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $B_0(x) \cap C$ | 1 | 2 | $\emptyset$ | $\emptyset$ | 5 | 6 | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ |

# Codes $r$-identifiants faibles



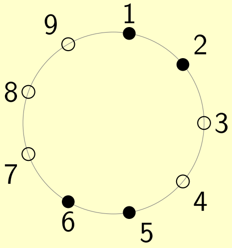

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $B_0(x) \cap C$ | 1 | 2 | $\emptyset$ | $\emptyset$ | 5 | 6 | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ |
| $B_1(x) \cap C$ | 1, 2 | 1, 2 | 2 | 5 | 5, 6 | 5, 6 | 6 | $\emptyset$ | 1 |

# Codes $r$-identifiants faibles




| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $B_0(x) \cap C$ | 1 | 2 | $\emptyset$ | $\emptyset$ | 5 | 6 | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ |
| $B_1(x) \cap C$ | 1, 2 | 1, 2 | 2 | 5 | 5, 6 | 5, 6 | 6 | $\emptyset$ | 1 |
| $B_2(x) \cap C$ | 1, 2 | 1, 2 | 1, 2, 5 | 2, 5, 6 | 5, 6 | 5, 6 | 5, 6 | 1, 6 | 1, 2 |

# Codes $r$-identifiants faibles




| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $B_0(x) \cap C$ | 1 | 2 | $\emptyset$ | $\emptyset$ | 5 | 6 | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ |
| $B_1(x) \cap C$ | 1, 2 | 1, 2 | 2 | 5 | 5, 6 | 5, 6 | 6 | $\emptyset$ | 1 |
| $B_2(x) \cap C$ | 1, 2 | 1, 2 | 1, 2, 5 | 2, 5, 6 | 5, 6 | 5, 6 | 5, 6 | 1, 6 | 1, 2 |
| $r_x$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 2 | 1 |

# Une deuxième variante

$G = (V, E)$ un graphe, $r \in \mathbb{N}$.

$C \subseteq V$ est un code $r$-identifiant faible si :

- $C$ est un ensemble dominant :

$$\forall x \in V, B_r(x) \cap C \neq \emptyset$$

- $C$ $r$-sépare faiblement tous les sommets :

$$\forall x \in V, \exists r_x \in [0, r], \forall y \in V, B_{r_x}(x) \cap C \neq B_{r_x}(y) \cap C$$

# Une deuxième variante

$G = (V, E)$ un graphe, $r \in \mathbb{N}$.

$C \subseteq V$ est un code $r$-identifiant allégé si :

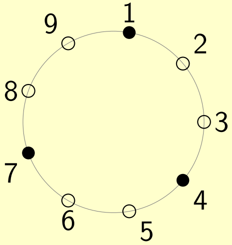
- $C$ est un ensemble dominant :

$$\forall x \in V, B_r(x) \cap C \neq \emptyset$$

- $C$ $r$-sépare légèrement tous les sommets :

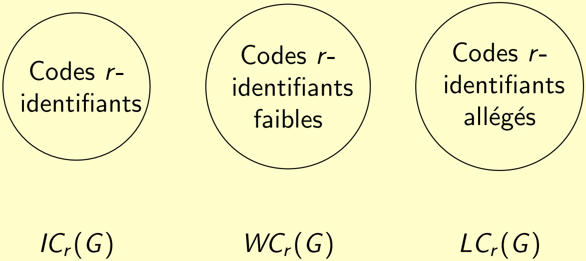
$$\forall x, y \in V^2, \exists r_{xy} \in [0, r], B_{r_{xy}}(x) \cap C \neq B_{r_{xy}}(y) \cap C$$

# Codes $r$-identifiants allégés

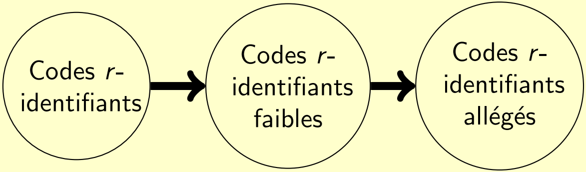



| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $B_0(x) \cap C$ | 1 | $\emptyset$ | $\emptyset$ | 4 | $\emptyset$ | $\emptyset$ | 7 | $\emptyset$ | $\emptyset$ |
| $B_1(x) \cap C$ | 1 | 1 | 4 | 4 | 4 | 7 | 7 | 7 | 1 |
| $B_2(x) \cap C$ | 1 | $1,4$ | $1,4$ | 4 | $4,7$ | $4,7$ | 7 | $1,7$ | $1,7$ |

# Inclusions

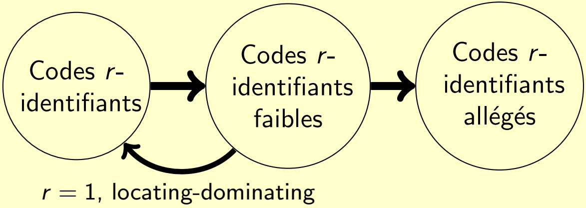

Codes $r$-identifiants
Codes $r$-identifiants faibles
Codes $r$-identifiants allégés
$IC_r(G)$
$WC_r(G)$
$LC_r(G)$

# Inclusions

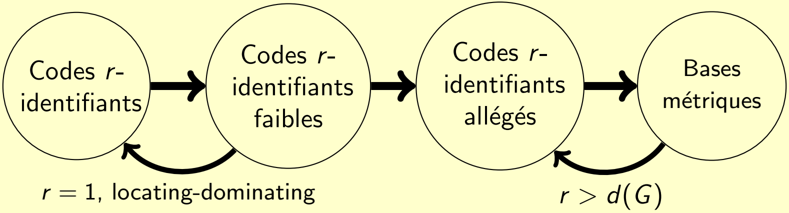



$$IC_r(G) \geq WC_r(G) \geq LC_r(G)$$

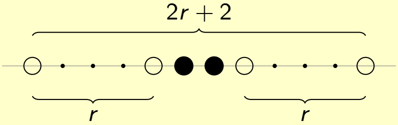
# Inclusions


Codes $r$-identifiants
Codes $r$-identifiants faibles
Codes $r$-identifiants allégés
$r = 1$, locating-dominating

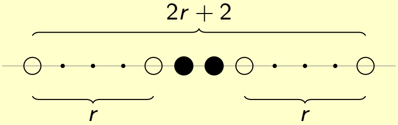
# Inclusions

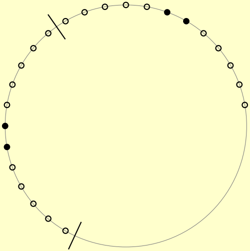

Codes r-identifiants
Codes r-identifiants faibles
Codes r-identifiants allégés
Bases métriques
r = 1, locating-dominating
r > d(G)

# Codes faibles sur les cycles

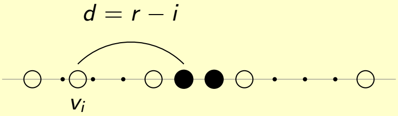


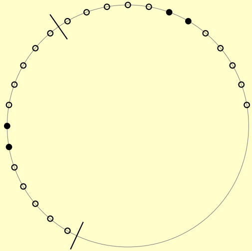
# Codes faibles sur les cycles



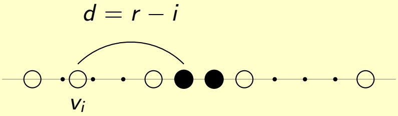



# Codes faibles sur les cycles

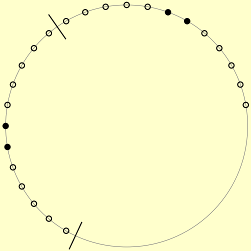


# Codes faibles sur les cycles



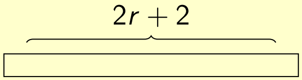

$$r_{v_i} = r - i$$



Si $n = (2r + 2)p$, il y a un code $r$-identifiant faible de taille $2p$.

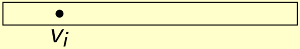
# Optimalité

*Dans $2r+2$ sommets consécutifs, il y a au moins deux sommets du code*



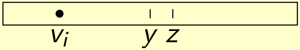
# Optimalité

*Dans $2r + 2$ sommets consécutifs, il y a au moins deux sommets du code*



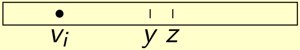
# Optimalité

*Dans $2r + 2$ sommets consécutifs, il y a au moins deux sommets du code*



# Optimalité

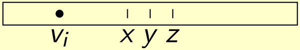
*Dans $2r + 2$ sommets consécutifs, il y a au moins deux sommets du code*




$r_y = r_z = d(y, v_i)$

# Optimalité

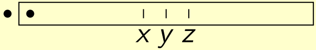
*Dans $2r+2$ sommets consécutifs, il y a au moins deux sommets du code*




$r_y = r_z = d(y, v_i)$
$r_x = r_y = r$

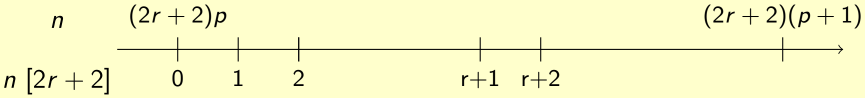
# Optimalité

*Dans $2r+2$ sommets consécutifs, il y a au moins deux sommets du code*

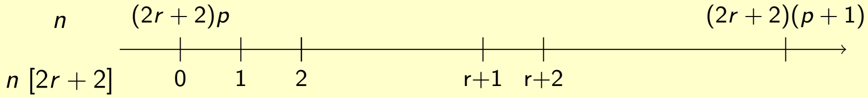



$r_y = r_z = d(y, v_i)$
$r_x = r_y = r$
$z$ n'est pas dominé !

# Pour les autres cycles ?

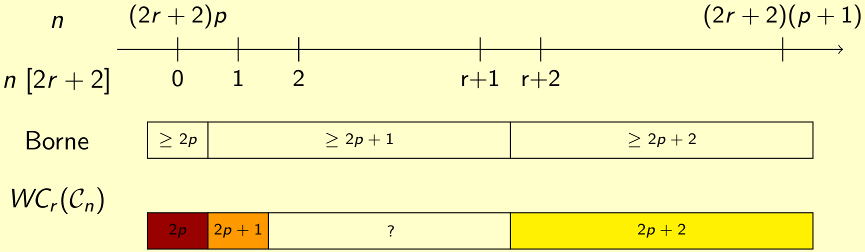


# Pour les autres cycles ?

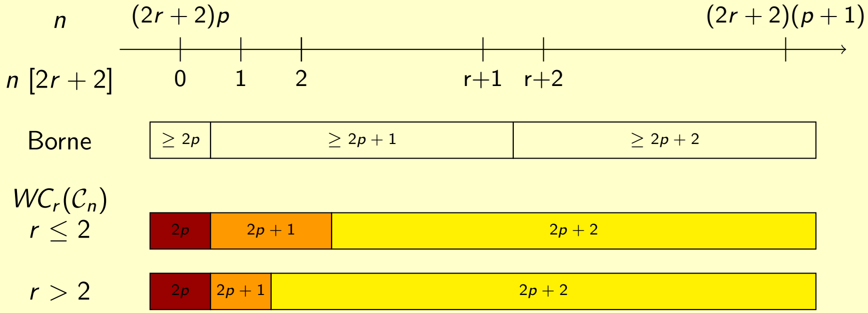



| | | | |
|---|---|---|---|
| Borne | $\geq 2p$ | $\geq 2p+1$ | $\geq 2p+2$ |

# Pour les autres cycles ?

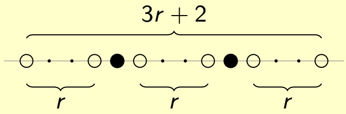


# Pour les autres cycles ?

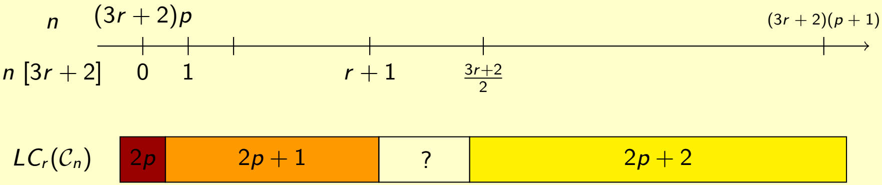


# Codes allégés

Les périodes sont de $3r+2$ sommets :

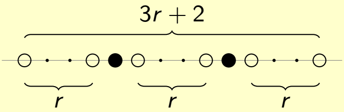



Borne exacte :

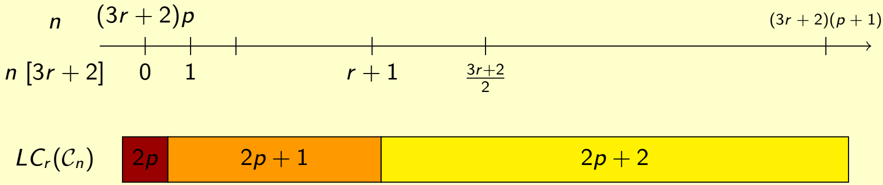


# Codes allégés

Les périodes sont de $3r+2$ sommets :




Borne exacte :



# En conclusion

- Résultats complets pour les cycles, contrairement aux codes identifiants
- Variantes qui pourraient permettre de trouver de nouvelles bornes ?

Pour continuer :

- Uniformiser toutes les définitions
- Etudier ces variantes sur d'autres graphes