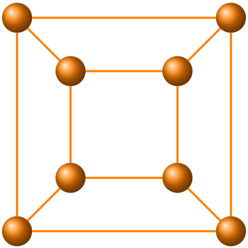
GREYC

Université de Caen Basse-Normandie

Un algorithme de factorisation pour les hypergraphes conformes

Alain Bretto   Yannick Silvestre   Thierry Vallée

6 novembre 2009, JGA'09



Sommaire de la présentation

1. État des lieux
   - Définition
   - Intérêt du produit cartésien
   - Reconnaissance du produit cartésien
2. Le produit cartésien d'hypergraphes
   - Définitions basiques
   - L'outil de L2-section
3. Conclusion

Définition du produit cartésien

Définition

Soient $H_1 = (V_1, E_1)$ et $H_2 = (V_2, E_2)$ des hypergraphes. Le produit cartésien de H_1 et H_2 est l'hypergraphe $H_1 \square H_2$ d'ensemble de sommets $V_1 \times V_2$ et d'ensemble d'arêtes :

$$E_1 \square E_2 = \{\{x\} \times e : x \in V_1 \text{ and } e \in E_2\} \cup \{e \times \{u\} : e \in E_1 \text{ and } u \in V_2\} .$$

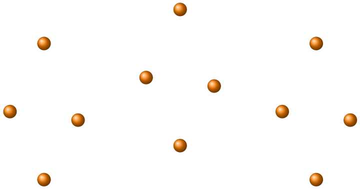


FIGURE: Le produit cartésien $C_3 \square C_4$

GREYC

Définition du produit cartésien

Définition

Soient $H_1 = (V_1, E_1)$ et $H_2 = (V_2, E_2)$ des hypergraphes. Le produit cartésien de H_1 et H_2 est l'hypergraphe $H_1 \square H_2$ d'ensemble de sommets $V_1 \times V_2$ et d'ensemble d'arêtes :

$$E_1 \square E_2 = \{\{x\} \times e : x \in V_1 \text{ and } e \in E_2\} \cup \{e \times \{u\} : e \in E_1 \text{ and } u \in V_2\}.$$

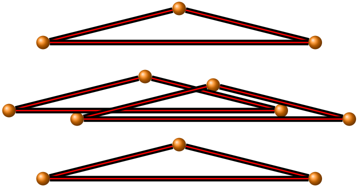


FIGURE: Le produit cartésien $C_3 \square C_4$

Définition du produit cartésien

Définition

Soient $H_1 = (V_1, E_1)$ et $H_2 = (V_2, E_2)$ des hypergraphes. Le produit cartésien de H_1 et H_2 est l'hypergraphe $H_1 \square H_2$ d'ensemble de sommets $V_1 \times V_2$ et d'ensemble d'arêtes :

$$E_1 \square E_2 = \{\{x\} \times e : x \in V_1 \text{ and } e \in E_2\} \cup \{e \times \{u\} : e \in E_1 \text{ and } u \in V_2\} .$$

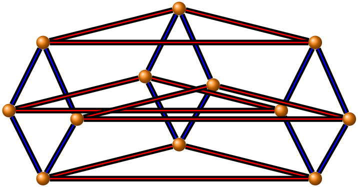
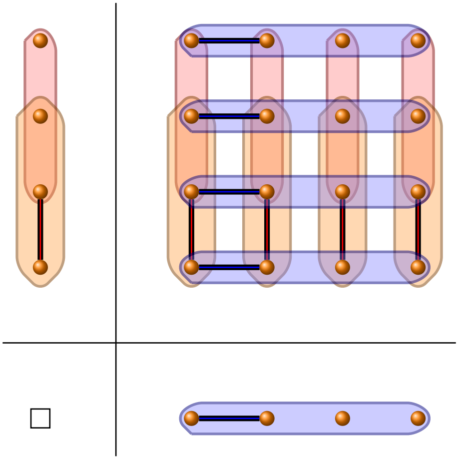


FIGURE: Le produit cartésien $C_3 \square C_4$

Définition du produit cartésien

Un hypergraphe est la généralisation d'un graphe où chaque (hyper)arête contient un nombre quelconque de sommets.



Pourquoi étudier les produits cartésiens ?

On suppose que $G = G_1 \Box G_2$.

Ils rendent un bon nombre de problèmes combinatoires faciles à étudier grâce à leur structure particulière :

Problème	**Propriété**	**Complexité**
Hamiltonicité ($\mathcal{H}$)	$\mathcal{H}(G_1)$ et $\mathcal{H}(G_2) \Rightarrow \mathcal{H}(G)$	NP-complet
Planarité ($\mathcal{P}$)	$\mathcal{P}(G) \Leftrightarrow$ Chemin(G_i) et $(\mathrm{Chemin}(G_j)$ ou $\mathrm{Cycle}\ (G_j))$	$O(\|V(G)\|)$
Nombre chromatique (χ)	$\chi(G) = \max\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}$	NP-complet

Pourquoi étudier les produits cartésiens ?

On suppose que $G = G_1 \Box G_2$.

Ils rendent un bon nombre de problèmes combinatoires faciles à étudier grâce à leur structure particulière :

Problème	**Propriété**	**Complexité**
Hamiltonicité ($\mathcal{H}$)	$\mathcal{H}(G_1)$ et $\mathcal{H}(G_2) \Rightarrow \mathcal{H}(G)$	NP-complet
Planarité ($\mathcal{P}$)	$\mathcal{P}(G) \Leftrightarrow$ Chemin(G_i) et (Chemin(G_j) ou Cycle (G_j))	$O(\|V(G)\|)$
Nombre chromatique (χ)	$\chi(G) = \max\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}$	NP-complet

Fait [Imrich, Peterin 2006]

Il est possible de factoriser un graphe connexe en temps et en espace linéaire

Pourquoi étudier les produits cartésiens ?

On suppose que $G = G_1 \square G_2$.

Ils rendent un bon nombre de problèmes combinatoires faciles à étudier grâce à leur structure particulière :

Problème	**Propriété**	**Complexité**
Hamiltonicité ($\mathcal{H}$)	$\mathcal{H}(G_1)$ et $\mathcal{H}(G_2) \Rightarrow \mathcal{H}(G)$	NP-complet
Planarité ($\mathcal{P}$)	$\mathcal{P}(G) \Leftrightarrow$ Chemin(G_i) et (Chemin(G_j) ou Cycle (G_j))	$O(\|V(G)\|)$
Nombre chromatique (χ)	$\chi(G) = \max\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}$	NP-complet

Fait [Imrich, Peterin 2006]

Il est possible de factoriser un graphe connexe en temps et en espace linéaire

Il est alors possible de réduire la complexité des problèmes en utilisant le produit cartésien.

Fibres dans les produits cartésiens

Dans un produit cartésien non trivial, on peut identifier des copies isomorphes des facteurs en tant que sous-graphes. Celles-ci sont appelées fibres.

Définition

Soient G et H des graphes. Etant donné $w \in V(H)$, $G \square \{w\}$, aussi noté G^w est une G-fibre.

Fibres dans les produits cartésiens

Les algorithmes de reconnaissance de produit cartésien procèdent par coloration des arêtes : en coloriant les arêtes adjacentes à un sommet qui appartiennent à la même fibre de la même couleur.

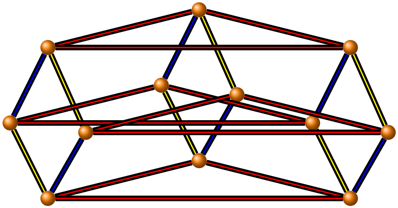


FIGURE: La décomposition en facteurs premiers du graphe : $C_3 \square K_2 \square K_2$

Colorier les produits afin de révéler leur structure

Soit G un graphe et $\{x, y\}$, $\{u, v\} \in E(G)$.

La relation de Djoković-Winkler Θ

Deux arêtes $\{x, y\}$, $\{u, v\}$ sont en relation $\{x, y\}\Theta\{u, v\}$ si :

$$d(x, u) + d(y, v) \neq d(x, v) + d(y, u).$$

Colorier les produits afin de révéler leur structure

Soit G un graphe et $\{x, y\}$, $\{u, v\} \in E(G)$.

La relation de Djoković-Winkler Θ

Deux arêtes $\{x, y\}$, $\{u, v\}$ sont en relation $\{x, y\}\Theta\{u, v\}$ si :

$$d(x, u) + d(y, v) \neq d(x, v) + d(y, u).$$

La relation τ de "l'unique voisin commun"

Deux arêtes $\{u, y\}$, $\{u, v\}$ sont en relation $\{u, y\}\tau\{u, v\}$ si et seulement si u est le seul voisin commun des sommets non adjacents v et y.

Colorier les produits afin de révéler leur structure

Soit G un graphe et $\{x, y\}$, $\{u, v\} \in E(G)$.

La relation de Djoković-Winkler Θ

Deux arêtes $\{x, y\}$, $\{u, v\}$ sont en relation $\{x, y\}\Theta\{u, v\}$ si :

$$d(x, u) + d(y, v) \neq d(x, v) + d(y, u).$$

La relation τ de "l'unique voisin commun"

Deux arêtes $\{u, y\}$, $\{u, v\}$ sont en relation $\{u, y\}\tau\{u, v\}$ si et seulement si u est le seul voisin commun des sommets non adjacents v et y.

Caractérisation de la relation produit [Feder'95]

La relation $\Pi = (\Theta \cup \tau)^*$ est une relation de produit (cartésien).

Soit G un graphe et $\{x, y\}$, $\{u, v\} \in E(G)$.

La relation de DJOKOVIĆ-WINKLER Θ

Deux arêtes $\{x, y\}$, $\{u, v\}$ sont en relation $\{x, y\}\Theta\{u, v\}$ si :

$$d(x, u) + d(y, v) \neq d(x, v) + d(y, u).$$

La relation τ de "l'unique voisin commun"

Deux arêtes $\{u, y\}$, $\{u, v\}$ sont en relation $\{u, y\}\tau\{u, v\}$ si et seulement si u est le seul voisin commun des sommets non adjacents v et y.

Result [SABIDUSSI'59], [VIZING'63]

Chaque graphe connexe a une unique décomposition en facteurs premiers [a] (relativement au product cartésien).

a. à isomorphismes et à l'ordre des facteurs près

La relation de Feder donne un algorithme polynomial pour trouver la décomposition en facteurs premiers du graphe[1] en ($O(mn)$).

- On introduit la relation Θ_1 définie par : $e\Theta_1 f \Leftrightarrow e\Theta f$ et $\{e, f\} \cap E(T) \neq \emptyset$.. On a $\Theta_1^* = \Theta^*$, donc on peut calculer Θ^*.

1. connexe

La relation de FEDER donne un algorithme polynomial pour trouver la décomposition en facteurs premiers du graphe[1] en $(O(mn))$.

- On introduit la relation Θ_1 définie par : $e\Theta_1 f \Leftrightarrow e\Theta f$ et $\{e, f\} \cap E(T) \neq \emptyset$.. On a $\Theta_1^* = \Theta^*$, donc on peut calculer Θ^*. Calculable en $O(mn)$.

1. connexe

La relation de FEDER donne un algorithme polynomial pour trouver la décomposition en facteurs premiers du graphe[1] en ($O(mn)$).

- On introduit la relation Θ_1 définie par : $e\Theta_1 f \Leftrightarrow e\Theta f$ et $\{e, f\} \cap E(T) \neq \emptyset$.. On a $\Theta_1^* = \Theta^*$, donc on peut calculer Θ^*. Calculable en $O(mn)$.
- Il s'agit ensuite de calculer τ. Pour chaque sommet u, il y a au plus $\frac{1}{2}\deg(u)^2$ paires d'arêtes ayant u comme unique voisin commun, soit $\frac{1}{2}\sum_{u \in V(G)} \deg(u)^2 \leqslant nm$ paires à examiner au total.

1. connexe

La relation de FEDER donne un algorithme polynomial pour trouver la décomposition en facteurs premiers du graphe[1] en ($O(mn)$).

- On introduit la relation Θ_1 définie par : $e\Theta_1 f \Leftrightarrow e\Theta f$ et $\{e, f\} \cap E(T) \neq \emptyset$.. On a $\Theta_1^* = \Theta^*$, donc on peut calculer Θ^*.
  Calculable en $O(mn)$.
- Il s'agit ensuite de calculer τ. Pour chaque sommet u, il y a au plus $\frac{1}{2}\deg(u)^2$ paires d'arêtes ayant u comme unique voisin commun, soit $\frac{1}{2}\sum_{u \in V(G)} \deg(u)^2 \leqslant nm$ paires à examiner au total.
  Étant donnés deux sommets $x, u \in V(G)$, on examine $I = N(u) \cap N(x)$, et on cherche à déterminer les u éligibles au statut d'"uniques voisins communs".

1. connexe

La relation de FEDER donne un algorithme polynomial pour trouver la décomposition en facteurs premiers du graphe[1] en $(O(mn))$.

- On introduit la relation Θ_1 définie par : $e\Theta_1 f \Leftrightarrow e\Theta f$ et $\{e,f\} \cap E(T) \neq \emptyset$.. On a $\Theta_1^* = \Theta^*$, donc on peut calculer Θ^*.
  Calculable en $O(mn)$.
- Il s'agit ensuite de calculer τ. Pour chaque sommet u, il y a au plus $\frac{1}{2}\deg(u)^2$ paires d'arêtes ayant u comme unique voisin commun, soit $\frac{1}{2}\sum_{u \in V(G)} \deg(u)^2 \leqslant nm$ paires à examiner au total.
  Étant donnés deux sommets $x, u \in V(G)$, on examine $I = N(u) \cap N(x)$, et on cherche à déterminer les u éligibles au statut d'"uniques voisins communs".
  - Si v et $w \in I$ $(v \neq w)$, $\{\{u,v\},\{u,w\}\} \notin \tau$.

1. connexe

La relation de FEDER donne un algorithme polynomial pour trouver la décomposition en facteurs premiers du graphe[1] en $(O(mn))$.

- On introduit la relation Θ_1 définie par : $e\Theta_1 f \Leftrightarrow e\Theta f$ et $\{e, f\} \cap E(T) \neq \emptyset$.. On a $\Theta_1^* = \Theta^*$, donc on peut calculer Θ^*. Calculable en $O(mn)$.
- Il s'agit ensuite de calculer τ. Pour chaque sommet u, il y a au plus $\frac{1}{2}\deg(u)^2$ paires d'arêtes ayant u comme unique voisin commun, soit $\frac{1}{2}\sum_{u\in V(G)} \deg(u)^2 \leqslant nm$ paires à examiner au total.
  Étant donnés deux sommets $x, u \in V(G)$, on examine $I = N(u) \cap N(x)$, et on cherche à déterminer les u éligibles au statut d'“uniques voisins communs”.
  - Si v et $w \in I$ $(v \neq w)$, $\{\{u, v\}, \{u, w\}\} \notin \tau$.
  - Si $x \in N(u)$ et $w \in I$, $\{\{u, x\}, \{u, w\}\} \notin \tau$.

1. connexe

La relation de FEDER donne un algorithme polynomial pour trouver la décomposition en facteurs premiers du graphe [1] en $(O(mn))$.

- On introduit la relation Θ_1 définie par : $e\Theta_1 f \Leftrightarrow e\Theta f$ et $\{e, f\} \cap E(T) \neq \emptyset$.. On a $\Theta_1^* = \Theta^*$, donc on peut calculer Θ^*. Calculable en $O(mn)$.
- Il s'agit ensuite de calculer τ. Pour chaque sommet u, il y a au plus $\frac{1}{2}\deg(u)^2$ paires d'arêtes ayant u comme unique voisin commun, soit $\frac{1}{2}\sum_{u \in V(G)} \deg(u)^2 \leqslant nm$ paires à examiner au total.
  Étant donnés deux sommets $x, u \in V(G)$, on examine $I = N(u) \cap N(x)$, et on cherche à déterminer les u éligibles au statut d'"uniques voisins communs".
  - Si v et $w \in I$ $(v \neq w)$, $\{\{u, v\}, \{u, w\}\} \notin \tau$.
  - Si $x \in N(u)$ et $w \in I$, $\{\{u, x\}, \{u, w\}\} \notin \tau$.
  - Les paires d'arêtes sont dans τ dans les autres cas.

1. connexe

Colorier les produits afin de révéler leur structure

L'idée principale exploitée par IMRICH pour connaître la structure du produit cartésien est la suivante :

Lemme du carré [Imrich Peterin]

Dans un produit cartésien, deux arêtes incidentes provenant de fibres distinctes s'étendent dans exactement un carré sans diagonale (i.e. un carré induit).

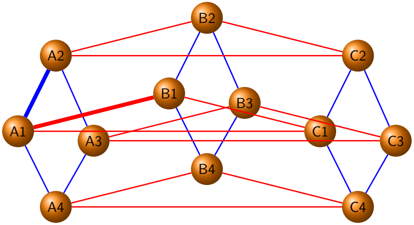


FIGURE: Le produit cartésien $C_3 \square C_4$

Colorier les produits afin de révéler leur structure

L'idée principale exploitée par IMRICH pour connaître la structure du produit cartésien est la suivante :

Lemme du carré [Imrich Peterin]

Dans un produit cartésien, deux arêtes incidentes provenant de fibres distinctes s'étendent dans exactement un carré sans diagonale (i.e. un carré induit).

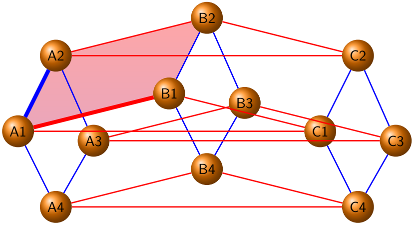


FIGURE: Le produit cartésien $C_3 \square C_4$

IMRICH et PETERIN ont donné un algorithme linéaire en espace et en temps ($O(m)$) pour reconnaître un produit cartésien de graphes.

Définition d'un hypergraphe

Soit X un ensemble de sommets. Un hypergraphe sur X est un ensemble $\{E_1, E_2, \ldots, E_m\}$ de sous-ensembles de H tels que :

- $E_i \neq \emptyset \; (i = 1, 2, \ldots, m)$
- $$\bigcup_{i=1}^{m} E_i = X$$

Définition d'un hypergraphe

Soit X un ensemble de sommets. Un hypergraphe sur X est un ensemble $\{E_1, E_2, \ldots, E_m\}$ de sous-ensembles de H tels que :

- $E_i \neq \emptyset$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$
- $$\bigcup_{i=1}^{m} E_i = X$$

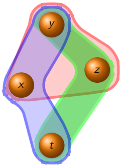


FIGURE: Hypergraphe $\{\{x, y, z\}, \{x, y, t\}, \{y, z, t\}\}$

L2-section

Notre propos est de généraliser l'algorithme d'IMRICH et PETERIN en décomposant les arêtes en cliques étiquetées. Le graphe pour lequel les cliques remplacent les hyperarêtes est appelé la $2-$ *section* de l'hypergraphe.

L2-section

Notre propos est de généraliser l'algorithme d'IMRICH et PETERIN en décomposant les arêtes en cliques étiquetées. Le graphe pour lequel les cliques remplacent les hyperarêtes est appelé la $2-$ *section* de l'hypergraphe.

L2-section

Soit $H = (V, E)$ un hypergraphe, on définit la L2-section $[H]_{L2}$ of H comme étant le graphe étiqueté $(V, E', \mathcal{L})$ où (V, E') est la 2-section de H et $\mathcal{L} : E' \to \mathcal{P}(E)$ est définie par $\mathcal{L}(\{x, y\}) := \{e \in E : x, y \in e \in H\}$.

L2-section

La L2-section d'un hypergraphe n'est rien d'autre qu'une "version étiquetée" de la 2-section.

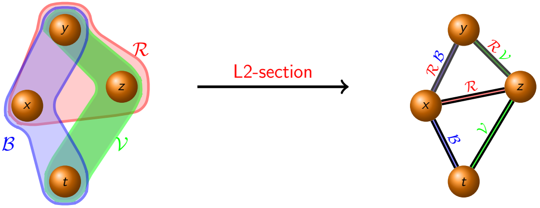


FIGURE: Hypergraphe $\{\{x, y, z\}, \{x, y, t\}, \{y, z, t\}\}$

À partir de la 2-section d'un hypergraphe H, il est possible de reconstruire l'hypergraphe duquel il provient grâce à l'opérateur de L2-section inverse : $[\cdot]_{L2}^{-1}$.

L2-section inverse

Soit G la L2-section d'un hypergraphe H avec pour application d'étiquetage $\mathcal{L}$, on définit l'hypergraphe $[G]_{L2}^{-1} = (V, E)$ par $V = V(G)$ and $E = \mathcal{L}(E(G))$.

Définition

Un hypergraphe est conforme si toutes les cliques maximales de sa 2-section sont des hyperarêtes.

Proposition

Définition

Un hypergraphe est conforme si toutes les cliques maximales de sa 2-section sont des hyperarêtes.

Proposition

Voici quelques propriétés de la $L2$-section :

- $[[H]_{L2}]_{L2}^{-1} = H$ (facile)

Définition

Un hypergraphe est conforme si toutes les cliques maximales de sa 2-section sont des hyperarêtes.

Proposition

Voici quelques propriétés de la $L2$-section :

- $[[H]_{L2}]_{L2}^{-1} = H$ (facile)
- Compatibilité avec le produit cartésien $[H_1]_{L2} \square [H_2]_{L2} = [H_1 \square H_2]_{L2}$.

Définition

Un hypergraphe est conforme si toutes les cliques maximales de sa 2-section sont des hyperarêtes.

Proposition

Voici quelques propriétés de la $L2$-section :

- $[[H]_{L2}]_{L2}^{-1} = H$ (facile)
- Compatibilité avec le produit cartésien $[H_1]_{L2} \square [H_2]_{L2} = [H_1 \square H_2]_{L2}$.
- $H \simeq H' \Leftrightarrow [H]_{L2} \simeq [H']_{L2}$

Définition

Un hypergraphe est conforme si toutes les cliques maximales de sa 2-section sont des hyperarêtes.

Proposition

Voici quelques propriétés de la $L2$-section :

- $[[H]_{L2}]_{L2}^{-1} = H$ (facile)
- Compatibilité avec le produit cartésien $[H_1]_{L2} \square [H_2]_{L2} = [H_1 \square H_2]_{L2}$.
- $H \simeq H' \Leftrightarrow [H]_{L2} \simeq [H']_{L2}$
- Pour les hypergraphes conformes $H \simeq H' \Leftrightarrow [H]_2 \simeq [H']_2$

Les deux derniers points montrent que les hypergraphes conformes sont "essentiellement" les mêmes objets que les 2-sections d'hypergraphes.

Schéma général de l'algorithme

Un hypergraphe conforme H

Schéma général de l'algorithme

Un hypergraphe conforme H

$$\Big\downarrow \; O(mr^2)$$

$G = [H]_{L2}$, *La L2-section de H*

Schéma général de l'algorithme

Un hypergraphe conforme H

$\Big\downarrow$ $O(mr^2)$

$G = [H]_{L2}$, *La L2-section de H*

$\Big\downarrow$

Algorithme de factorisation sur les graphes

GREYC

Schéma général de l'algorithme

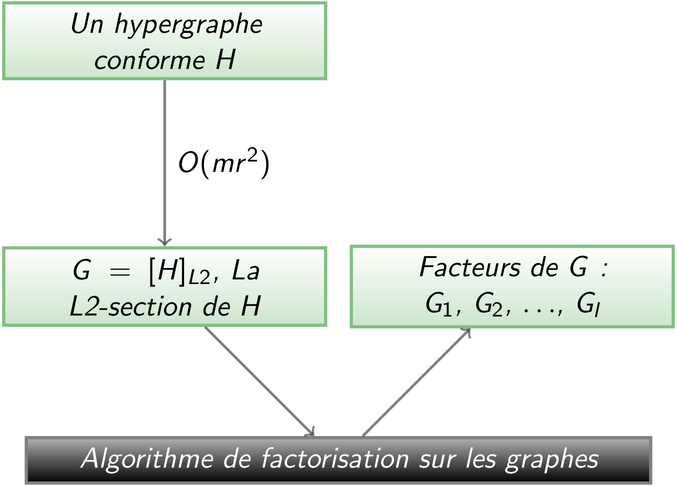
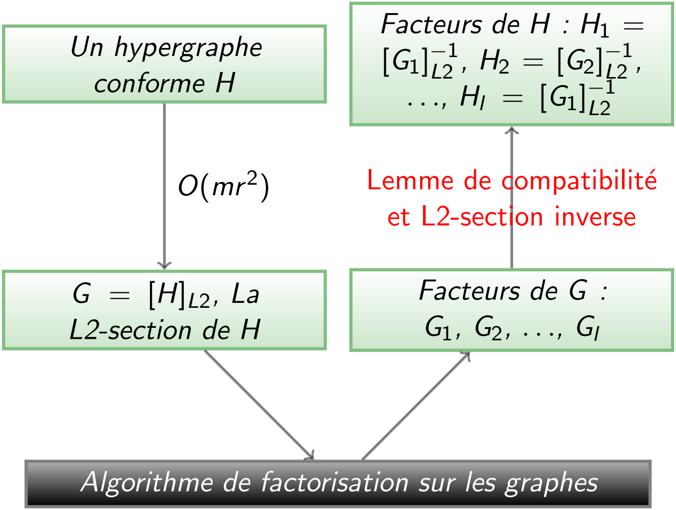


Schéma général de l'algorithme



Fait : Même si des classes très importantes d'hypergraphes sont des produits cartésiens, presque tous les hypergraphes sont premiers.

Fait : Même si des classes très importantes d'hypergraphes sont des produits cartésiens, presque tous les hypergraphes sont premiers. Comment peut-on alors utiliser le produit cartésien sur ces classes ? En trouvant, depuis un hypergraphe quelconque, un produit cartésien d'hypergraphes "proche" et "bon".

Impact de la factorisation sur d'autres problèmes

Exemple : Le nombre chromatique

- Un sandwich d'hypergraphes est un couple (H, H') tel que $V(H) = V(H')$ et pour chaque hyperarête E de H il existe une autre hyperarête E' de H' telle que $E \subseteq E'$.

$$\chi(H) \leqslant \chi(H').$$

Impact de la factorisation sur d'autres problèmes

Exemple : Le nombre chromatique

- Un sandwich d'hypergraphes est un couple (H, H') tel que $V(H) = V(H')$ et pour chaque hyperarête E de H il existe une autre hyperarête E' de H' telle que $E \subseteq E'$.

$$\chi(H) \leqslant \chi(H').$$

- Soit G un graphe connexe. La représentation métrique canonique de G est une application de G vers un produit cartésien de graphes :

$$\alpha : G \to \square_{i=1}^{k} G_i$$

tel que α est un plongement non-redondant dans $\square_{i=1}^{k} G_i$.

$$\chi(G) \leqslant \chi(\square_{i=1}^{k} G_i).$$

Il est alors possible de traiter des hypergraphes quelconques en termes de produits cartésiens, ce qui nous permet d'hériter de leurs bonnes propriétés. Pour le nombre chromatique, deux applications sont à explorer :

- Trouver des "tranches cartésiennes" de sandwich dont un hypergraphe donné est solution.
- Trouver l'application canonique métrique d'un hypergraphe (déjà connue pour les graphes).

Il est alors possible de traiter des hypergraphes quelconques en termes de produits cartésiens, ce qui nous permet d'hériter de leurs bonnes propriétés. Pour le nombre chromatique, deux applications sont à explorer :

- Trouver des "tranches cartésiennes" de sandwich dont un hypergraphe donné est solution.
- Trouver l'application canonique métrique d'un hypergraphe (déjà connue pour les graphes).

On est alors capable de donner un encadrement du nombre chromatique en un meilleur temps.

Merci de votre attention !