Les graphes hypotriangulés

Hélène Topart, Marie-Christine Costa, Christophe Picouleau

Équipe Optimisation Combinatoire
Laboratoire CEDRIC

Vendredi 6 novembre 2009

Journes graphes et algorithmes 09

Cadre de travail :

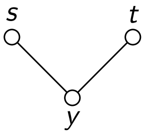
- Soit $G = (V, E)$ un graphe simple connexe non orienté, $n = |V|$ le nombre de sommets et $m = |E|$ le nombre d'arêtes ;

Cadre de travail :

- Soit $G = (V, E)$ un graphe simple connexe non orienté, $n = |V|$ le nombre de sommets et $m = |E|$ le nombre d'arêtes ;
- on note P_k (respectivement C_k) un chemin (resp. un cycle) à k sommets ;

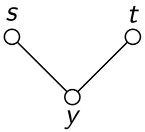
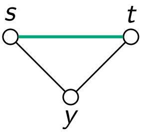
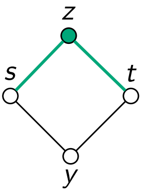
Première définition

G est *hypotriangulé* si pour toute paire de sommets s, t de V telle que $s - y - t$ est un P_3, on a $s - t \in E$ ou il existe $z \neq y$ tel que $s - z - t$ est un P_3.

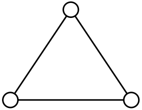
Pour tout 

Première définition

G est *hypotriangulé* si pour toute paire de sommets s, t de V telle que $s - y - t$ est un P_3, on a $s - t \in E$ ou il existe $z \neq y$ tel que $s - z - t$ est un P_3.

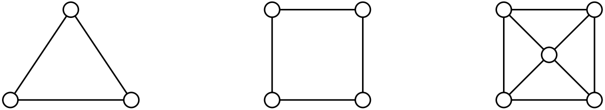
Pour tout  on a  ou 

Exemples simples

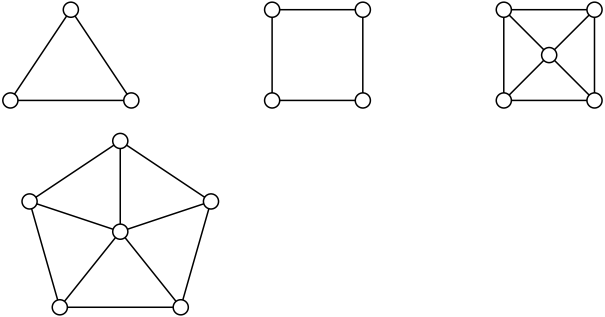


Exemples simples

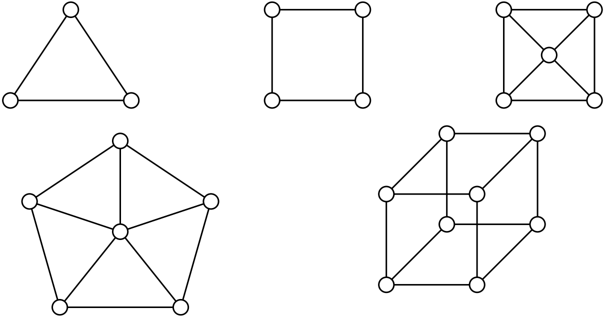
Exemples simples



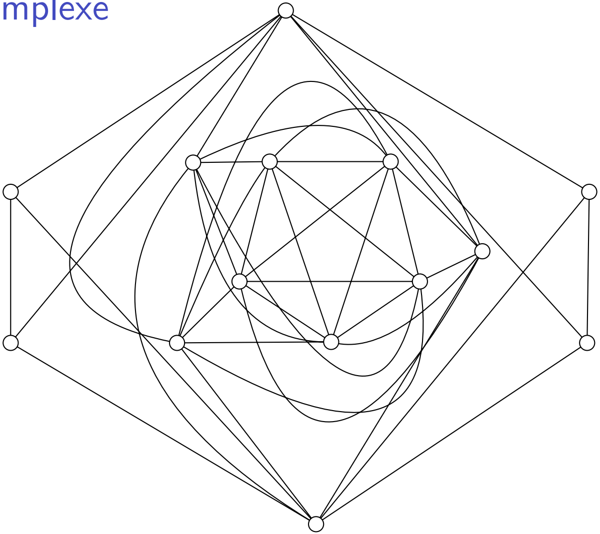
Exemples simples



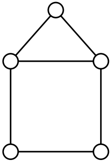
Exemples simples



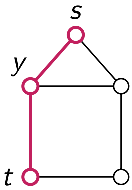
Et plus complexe



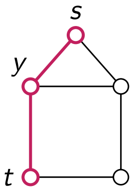
Contre-exemples simples

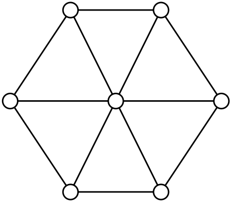


Contre-exemples simples

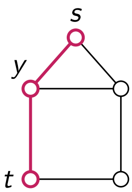


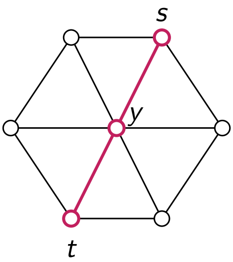
Contre-exemples simples





Contre-exemples simples



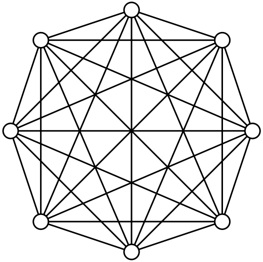


Remarques immédiates

- Les graphes complets K_n sont hypotriangulés ;

Exemples :

K_8

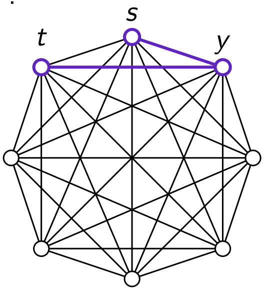


Remarques immédiates

- Les graphes complets K_n sont hypotriangulés ;

Exemples :

K_8

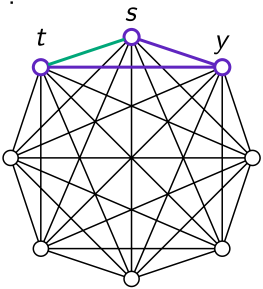


Remarques immédiates

- Les graphes complets K_n sont hypotriangulés ;

Exemples :

K_8

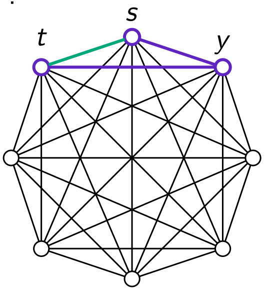


Remarques immédiates

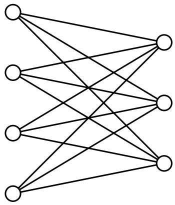
- Les graphes complets K_n sont hypotriangulés ;
- les graphes bipartis complets K_{n_1,n_2} pour $n_1, n_2 \geq 2$ sont hypotriangulés ;

Exemples :

K_8



$K_{4,3}$

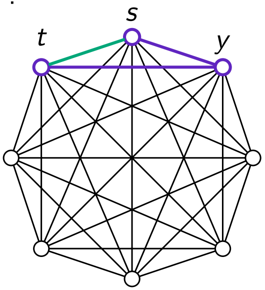


Remarques immédiates

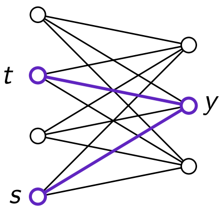
- Les graphes complets K_n sont hypotriangulés ;
- les graphes bipartis complets K_{n_1,n_2} pour $n_1, n_2 \geq 2$ sont hypotriangulés ;

Exemples :

K_8



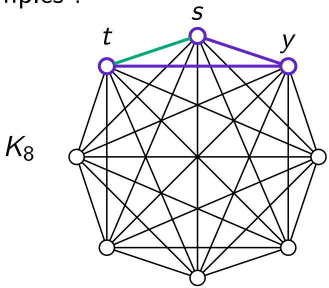
$K_{4,3}$

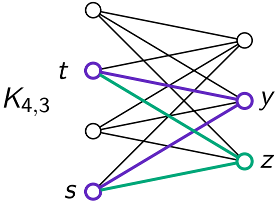


Remarques immédiates

- Les graphes complets K_n sont hypotriangulés ;
- les graphes bipartis complets K_{n_1,n_2} pour $n_1, n_2 \geq 2$ sont hypotriangulés ;

Exemples :





Remarques immédiates (2)

Si G est un graphe hypotriangulé connexe avec $n \geq 3$, alors

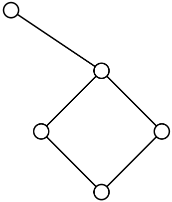
- $\deg_{\text{min}}(G) \geq 2$.

Remarques immédiates (2)

Si G est un graphe hypotriangulé connexe avec $n \geq 3$, alors

- $\deg_{\mathsf{min}}(G) \geq 2$.

En effet,

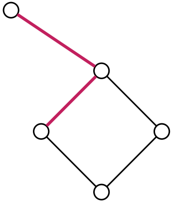


Remarques immédiates (2)

Si G est un graphe hypotriangulé connexe avec $n \geq 3$, alors

- $\deg_{\text{min}}(G) \geq 2$.

En effet,



IMPOSSIBLE

Comparaison aux graphes triangulés

Aucune relation d'inclusion :

Comparaison aux graphes triangulés

Aucune relation d'inclusion :

- les arbres sont triangulés, mais non hypotriangulés ;

Comparaison aux graphes triangulés

Aucune relation d'inclusion :

- les arbres sont triangulés, mais non hypotriangulés ;
- les graphes complets sont triangulés et hypotriangulés ;

Comparaison aux graphes triangulés

Aucune relation d'inclusion :

- les arbres sont triangulés, mais non hypotriangulés ;
- les graphes complets sont triangulés et hypotriangulés ;
- les graphes bipartis complets sont hypotriangulés, mais non triangulés.

Définitions équivalentes

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- G est hypotriangulé ;

Définitions équivalentes

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- G est hypotriangulé ;
- la suppression d'un sommet ne modifie pas les distances entre toute paire de sommets non adjacents ;

Définitions équivalentes

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- G est hypotriangulé ;
- la suppression d'un sommet ne modifie pas les distances entre toute paire de sommets non adjacents ;
- la suppression d'une arête ne modifie pas les distances entre toute paire de sommets non adjacents ;

Définitions équivalentes

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- G est hypotriangulé ;
- la suppression d'un sommet ne modifie pas les distances entre toute paire de sommets non adjacents ;
- la suppression d'une arête ne modifie pas les distances entre toute paire de sommets non adjacents ;
- il existe au moins deux plus courts chemins sommets-disjoints entre toute paire de sommets non adjacents.

Probabilité qu'un graphe aléatoire soit hypotriangulé

On se base sur le modèle de Erdös-Rényi. Soit p la probabilité d'existence de chaque arête. Soit alors $G = (V, E)$ un graphe aléatoire à n sommets.

Probabilité qu'un graphe aléatoire soit hypotriangulé

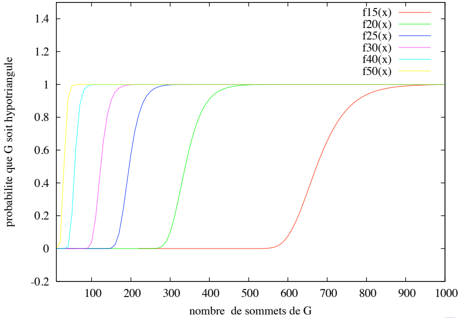
On se base sur le modèle de Erdös-Rényi. Soit p la probabilité d'existence de chaque arête. Soit alors $G = (V, E)$ un graphe aléatoire à n sommets.

$$P(G \text{ hypo-triangulé}) = \left(1 - (1-p)p^2(n-2)(1-p^2)^{n-3}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Probabilité qu'un graphe aléatoire soit hypotriangulé

On se base sur le modèle de Erdös-Rényi. Soit p la probabilité d'existence de chaque arête. Soit alors $G = (V, E)$ un graphe aléatoire à n sommets.

$$P(G \text{ hypo-triangulé}) = \left(1 - (1-p)p^2(n-2)(1-p^2)^{n-3}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

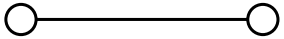
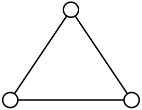


Problématique

Pour n fixé, on veut caractériser les graphes hypotriangulés connexes ayant un nombre minimum d'arêtes. On les appelera *graphes hypotriangulés minimum*.

Problématique

Pour n fixé, on veut caractériser les graphes hypotriangulés connexes ayant un nombre minimum d'arêtes. On les appelera *graphes hypotriangulés minimum*.

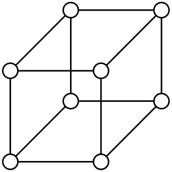
Pour $n = 2$ et $n = 3$, il existe un unique graphe hypotriangulé connexe :  et 

Si $n \geq 4$, alors $m = 2n - 4$ et $\deg_{\mathsf{min}}(G) = 2$ ou 3

Si $n \geq 4$, alors $m = 2n - 4$ et $\deg_{\min}(G) = 2$ ou 3

Théorème

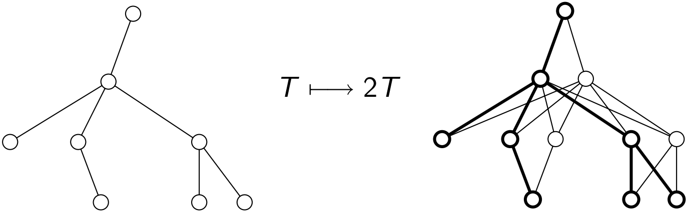
Le seul graphe hypotriangulé minimum avec $deg_{\min}(G) = 3$ est le cube.



Si $n \geq 4$, alors $m = 2n - 4$ et $\deg_{\min}(G) = 2$ ou 3

Théorème

Les graphes hypotriangulés minimum avec $deg_{\min}(G) = 2$ sont de la forme $G = 2T$ où T est un arbre.



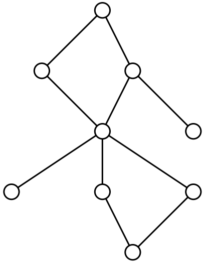
Hypotriangulation

L'*hypotriangulation* d'un graphe G consiste à modifier de manière minimale l'ensemble des arêtes de G afin de construire un graphe G' hypotriangulé.

Hypotriangulation

L'*hypotriangulation* d'un graphe G consiste à modifier de manière minimale l'ensemble des arêtes de G afin de construire un graphe G' hypotriangulé.

Par Completion : on ajoute un nombre minimum d'arêtes à G.

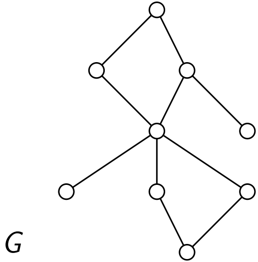


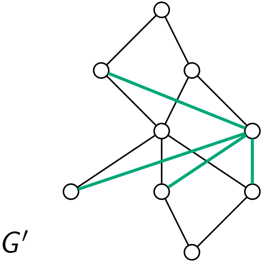
G

Hypotriangulation

L'*hypotriangulation* d'un graphe G consiste à modifier de manière minimale l'ensemble des arêtes de G afin de construire un graphe G' hypotriangulé.

Par Completion : on ajoute un nombre minimum d'arêtes à G.





Résultats

L'hypotriangulation par completion est polynomiale dans les graphes suivants :

- les chaînes ;

Résultats

L'hypotriangulation par completion est polynomiale dans les graphes suivants :

- les chaînes ;
- les cycles ;

Résultats

L'hypotriangulation par completion est polynomiale dans les graphes suivants :

- les chaînes ;
- les cycles ;
- les étoiles ;

Résultats

L'hypotriangulation par completion est polynomiale dans les graphes suivants :

- les chaînes ;
- les cycles ;
- les étoiles ;
- les chenilles ;

Résultats

L'hypotriangulation par completion est polynomiale dans les graphes suivants :

- les chaînes ;
- les cycles ;
- les étoiles ;
- les chenilles ;
- les arbres à feuilles uniformes.

Conclusion

Nos résultats :

- étude des graphes hypotriangulés et caractérisation en terme de conservation de distances ;
- caractérisation des hypotriangulés minimum ;
- complexité de certains problèmes de graphes classiques dans les hypotriangulés : les problèmes Cycle Hamiltonien, Coloration, Clique Max et Stable Max sont $\mathcal{NP}$-complets dans les graphes hypotriangulés.

Conclusion

Les travaux en cours :

- trouver un algorithme de reconnaissance des hypotriangulés plus efficace (pour le moment $\mathcal{O}(n^{2.376})$ par un produit de matrices) ;
- hypotriangulation d'un arbre quelconque et d'une grille ;
- hypotriangulation des graphes quelconques.