

Задачи по арифметике и алгебре (5–9 классы)

Пояснительная записка

Сейчас много говорят самого разного о целях и возможностях курса математики в средней школе, его программе и возможных реформах. Участники таких обсуждений, однако, сильно расходятся в оценках текущего положения дел и потому кажется полезным хотя бы попытаться «сверить часы».

С этой целью собраны (из разных известных задачников) некоторые задачи, которые для своего решения требуют лишь знакомства с основными понятиями школьной программы по математике (которые есть практически во всех действующих учебниках) и здравого смысла (даже если их формулировки могут показаться и не совсем стандартными). Они сгруппированы по темам, встречающимся в программах по математике (темы набраны жирным шрифтом), хотя это деление условно. Задачи не предполагают громоздких вычислений и рассчитаны на решение без калькулятора.

Далее приведены возможные варианты работ для девятиклассников (на один-два урока), составленные из этих задач. Задачи расположены в случайном порядке. Предлагая их школьникам, следует объяснить, что не обязательно решать их по порядку, должны быть записаны решения (не только ответы) и что не обязательно решить все задачи, так как среди них есть и трудные.

ТЕМЫ И ЗАДАЧИ

Числа и числовые выражения. Сумма, разность и произведение натуральных чисел. Десятичная система счисления.

1. Разделите 123 123 123 (сто двадцать три миллиона сто двадцать три тысячи сто двадцать три) на 123.

2. Сколько цифр может быть в произведении пятизначного и семизначного натуральных чисел? Укажите все возможности и объясните, почему других нет.

3. Порядк выписали все натуральные числа от единицы до тысячи:

1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., 998, 999, 1000.

Сколько всего цифр для этого понадобилось? Сколько цифр из них — семёрки?

4. Сумма уменьшаемого, вычитаемого и разности равна 250. Найдите уменьшаемое.

Делимость натуральных чисел. Делимое, делитель, частное, остаток. Признаки делимости на 2, 3, 5, 9. Простые и составные числа.

5. В примере на деление с остатком делимое и делитель увеличили втрое. Как изменятся при этом частное и остаток?

6. Какой наибольший остаток может получиться при делении числа 43 на другое натуральное число, меньшее 43?

7. На какие цифры могут оканчиваться двузначные простые числа?

8. Найдите положительное целое число n , если $(n + 2)(n + 3)(n + 5)(n + 7) = 4158$.

9. Сколько натуральных чисел от 1 до 1000 (включительно) делятся на 7 без остатка?

10. Можно ли найти два натуральных числа, сумма и произведение которых нечётны?

Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное.

11. Кольцевое шоссе имеет длину 330 км. Автобус выезжает из некоторой точки этого шоссе, и делает остановки через каждые 75 км, пока не остановится в точке старта. Сколько километров он проедет?

Целые числа: положительные, отрицательные числа и нуль. Сумма, разность и произведение целых чисел.

12. Вычислите

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots + 97 - 98 + 99 - 100.$$

13. Произведение двух соседних отрицательных целых чисел равно 72. Найдите эти числа.

14. Второе число больше первого на 3, а сумма этих двух чисел равна 105. Что это за числа?

Рациональные числа: обыкновенные и десятичные дроби. Знак и модуль (абсолютная величина) числа. Сумма, разность, произведение и частное рациональных чисел. Натуральная степень рационального числа. Равенство чисел. Сравнение чисел. Понятие об иррациональных числах. Действительные числа.

15. Запишите число 1,375 в виде несократимой обыкновенной дроби.

16. Запишите периодическую дробь $0,77777\dots$ в виде обыкновенной дроби.

17. Какое из чисел

$$\frac{10^5 + 1}{10^5 + 2} \quad \text{и} \quad \frac{10^7 + 1}{10^7 + 2}$$

больше?

18. Первый насос наполняет бассейн за два дня, второй — за три дня, третий — за пять дней. За какое время они наполнили бы бассейн, работая все вместе?

19. Первую половину пути машина ехала со скоростью 15 км/час, вторую — в полтора раза медленнее. Найдите её среднюю скорость на всём пути.

20. Знаменатель первой несократимой дроби равен 15, знаменатель второй несократимой дроби равен 5. Может ли при их сложении получиться несократимая дробь со знаменателем 4? со знаменателем 3? со знаменателем 5?

21. Какая из дробей $13/21$ и $21/34$ больше?
22. Первый сомножитель в произведении трёх сомножителей увеличили на 25%, второй — на 20%. На сколько процентов надо уменьшить третий сомножитель, чтобы в результате произведение осталось неизменным?
23. Ширину прямоугольника увеличили на 10%, а длину на 20%. На сколько процентов в результате увеличилась площадь прямоугольника?
24. Найдите отношение длины и ширины прямоугольника, если известно, что после увеличения его длины на 10% и ширины на 20% его периметр увеличился на 12%.
25. Найдите сумму дробей

$$\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7}.$$

26. Какое число (одно и то же) надо прибавить к числителю и знаменателю дроби $11/41$, чтобы получилась дробь, равная $3/8$?
27. Который час, если оставшаяся (до полуночи) часть суток вдвое больше прошедшей?
28. В какой пропорции надо смешать 3%-й и 30%-й растворы, чтобы получить 12%-й раствор?
29. В магазине в двух мешках были на равную сумму леденцы стоимостью 2 рубля за килограмм и стоимостью 3 рубля за килограмм. Их смешали в один мешок. По какой цене надо продавать эту смесь, чтобы в итоге выручить ту же сумму?

Законы арифметических действий: переместительный, сочетательный и распределительный. Числовые выражения, порядок действий в них, использование скобок.

30. Что больше: 17% от девятнадцати миллионов или 19% от семнадцати миллионов?
31. Числа a, b, c, d, e, f положительны. Во сколько раз увеличится или уменьшится выражение $a : (b : (c : (d : (e : f))))$, если увеличить f вдвое (оставив a, b, c, d, e без изменения)?
32. Каждое из двух положительных чисел A и B увеличили на 5%. На сколько процентов увеличатся их сумма и произведение?

Числовые неравенства и их свойства.

33. В каких пределах могут находиться сумма $a + b$, разность $a - b$, произведение $a \cdot b$ и частное a/b , если $6 < a < 7$ и $2 < b < 3$?
34. Яблоко стоит дешевле груши. Могут ли пять яблок быть дороже трёх груш в два или более раза?

Степень с целым показателем. Свойства степеней с целыми показателями.

35. Сколько цифр в десятичной записи числа 2^{20} ?
36. Сколькими нулями оканчивается десятичная запись числа $2^{15} \times 5^3$? Какая десятичная цифра стоит перед этими нулями?

Квадратный корень из числа. Корень натуральной степени из числа. Свойства корней.

37. Какое из чисел $\sqrt{0,1111111111}$ (девять единиц после запятой) и $1/3$ больше?
38. Во сколько раз $\sqrt{400\,000}$ больше $\sqrt{1000}$?

39. Что больше: $\sqrt[3]{2}$ или $\sqrt[5]{3}$? Объясните свой ответ.

40. Может ли квадратный корень из положительного числа быть втрое больше этого числа?

Алгебраические выражения. Буквенное (алгебраическое) выражение. Допустимые значения переменных, входящих в алгебраическое выражение. Алгебраические тождества.

41. Числа a, b, c, d, e положительны. Известно, что $ab = 3$, $bc = 2$, $cd = 4$, $de = 5$. Найдите отношение a/e .

42. Укажите наименьшее положительное число x , для которого оба числа

$$\frac{8}{15}x \quad \text{и} \quad \frac{10}{21}x$$

целые. (Само число x может и не быть целым.)

Многочлены. Сумма и произведение многочленов. Формулы сокращённого умножения.

43. Сколько цифр в числе $1000^2 - 3^2$? Докажите, что это число составное, указав его разложение в произведение двух множителей.

44. Известно, что $a + 1/a = 7$. Найдите $a^2 + 1/a^2$.

45. Раскройте скобки и приведите подобные члены в произведении

$$(x + y - z)(x - y + z).$$

46. В выражении

$$(a + b - c)(d - e + f)(g - h - k)$$

раскрыли скобки. Сколько слагаемых получится? Перед сколькими из них будет стоять знак «минус»?

47. Сумма двух чисел равна 3, а сумма их квадратов равна 7. Найдите произведение этих чисел.

Многочлены от одной переменной. Многочлены первой и второй степени. Корень многочлена.

48. Раскроем скобки в произведении

$$(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)$$

и приведём подобные члены. Сколько слагаемых получится?

49. В многочлене $x^3 + *x + 18$ звёздочка заменяет один из числовых коэффициентов. Что это за коэффициент, если известно, что число -2 является корнем этого многочлена?

Дискриминант и формула корней квадратного трёхчлена. Теорема Виета и обратная к ней.

50. Укажите два числа, сумма которых равна 7, а произведение равно 11.

51. Сумма числа и обратного к нему равна 3. Что это за число? Укажите все возможности.

52. Подберите коэффициент при x в уравнении $x^2 + *x + 9 = 0$ так, чтобы полученное уравнение имело ровно один корень.

53. Составьте квадратное уравнение с целыми коэффициентами, корнями которого являются числа 2 и $1/3$.

54. Сумма двух положительных чисел равна 5. Может ли их произведение равняться 7?

Алгебраические и рациональные дроби. Сумма, произведение и частное рациональных дробей.

55. Запишите выражение

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}$$

в виде отношения двух многочленов.

Уравнения, неравенства и системы. Уравнение с одним неизвестным. Корень (решение) уравнения, множество решений.

56. Напишите какое-нибудь уравнение с одним неизвестным x , у которого были бы решения 2, 3, 5 и не было бы никаких других.

57. Ученик должен был разделить число на 2 и к результату прибавить 3, а он по ошибке умножил число на 2 и от полученного произведения отнял 3. Ответ всё равно получился правильный. Какой?

Неравенство с одним неизвестным. Решение неравенства. Множество решений. Основные типы уравнений и неравенств: линейные, квадратные, рациональные, иррациональные.

58. Решите неравенство $1 - (1 - (1 - (1 - x))) < 2$.

59. Решите неравенство $x^2 + 3x + 2 \leq 0$.

60. Решите неравенство $x < |x| - 1$.

61. Решите неравенство $\frac{1}{x} < 2$.

62. Решите неравенство $x + \frac{1}{x} \leq 2$.

63. Решите неравенство $x \leq 1 + \frac{2}{x}$.

64. Решите неравенство $\sqrt{x} < x + 0,25$.

Системы уравнений и неравенств с одной или несколькими неизвестными. Решение системы, множество решений. Равносильность уравнений, неравенств, систем.

65. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = 3 \\ x + z = 4 \end{cases}$$

66. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = 3 \\ z + t = 4 \\ t + x = 5 \end{cases}$$

67. В строчку записано пять чисел, причём каждое следующее на 3 больше предыдущего. Сумма всех чисел равна 7. Найдите эти числа.

68. Артели косцов предстояло скосить два луга, из которых один вдвое больше другого. Полдня артель косила большой луг, а на вторую половину дня разделилась пополам. Одна половина осталась докашивать большой луг, а другая принялась за малый. К вечеру большой луг скосили, а от малого остался участок, который был скошен за другой день одним косцом. Сколько косцов в артели?

Координатная прямая и координатная плоскость. Координатная прямая. Изображение чисел точками координатной прямой. Геометрический смысл модуля и знака числа. Формула расстояния между точками на координатной прямой. Числовые промежутки: интервал, отрезок, полуинтервал, луч.

69. Чему равно $|-x|$, если x отрицательно: x или $-x$?

70. Найдите координату точки, делящей отрезок $[-1, 4]$ числовой прямой в отношении 3 : 4.

71. При каких x точка с координатой x^2 находится правее точки с координатой x ?

72. Нарисуйте на координатной прямой, где находятся положительные числа, у которых в десятичной записи первая цифра после запятой равна трём.

73. Нарисуйте на координатной прямой те точки x , для которых среди неравенств

$$x > 1, x > 2, x > 3, x > 4, x > 5, x > 6, x > 7$$

два верных и пять неверных.

74. Нарисуйте на координатной прямой все точки x , для которых $|x - 5| \leq 3$.

75. Нарисуйте на координатной прямой все точки x , для которых $|x + 1| + |x + 2| = 1$.

76. Укажите числа a и b так, чтобы множеством решений неравенства $|x - a| < b$ был интервал $(-1, 2)$.

Декартова система координат на плоскости. Координаты точки: абсцисса и ордината. Множества на плоскости: координатные оси, полуплоскости, четверти (квадранты). Уравнение прямой в координатной плоскости. Геометрический смысл коэффициентов уравнения прямой.

77. Где на координатной плоскости находятся точки, у которых абсцисса больше ординаты?

78. Где на координатной плоскости находятся точки (x, y) , у которых $x^2 = y^2$?

79. Где на координатной плоскости находятся точки (x, y) , у которых $x + y < 0$?

80. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $(1; 2)$ и пересекающей ось абсцисс под углом 45° . Укажите все возможные варианты.

Формула расстояния между точками на координатной плоскости. Уравнение окружности в координатной плоскости.

81. Рассмотрим на координатной плоскости точки, равноудалённые от начала координат и точки $(2, 3)$. Они образуют прямую. Напишите уравнение этой прямой.

82. Где на координатной плоскости находятся точки, у которых $(x - 1)^2 + y^2 < 4$?

Изображение чисел (углов) на единичной окружности. Синус, косинус произвольного числа. Основное тригонометрическое тождество. Тангенс и котангенс произвольного угла. Формулы, связывающие синус, косинус, тангенс, котангенс угла.

83. Синус острого угла равен удвоенному косинусу этого угла. Найдите синус и косинус этого угла.

84. Синус острого угла равен половине его тангенса. Найдите тангенс этого угла.

Числовые функции. Прямая и обратная пропорциональная зависимость и их графики. Линейная и дробно-линейная функция и их графики.

85. Сколько точек пересечения имеют графики функций $y = x + 3$ и $y = 1/x$? Найдите эти точки.

86. В США температура измеряется в шкале Фаренгейта: 0 градусов Цельсия составляет 32 градуса по Фаренгейту, а 100 градусов Цельсия составляет 212 градусов по Фаренгейту. Какой температуре (по Цельсию) соответствует 100 градусов Фаренгейта, если температура по Фаренгейту является линейной функцией от температуры по Цельсию?

87. Нарисуйте на координатной плоскости множество точек (x, y) , для которых $y > 1/x$, а также множество точек, для которых $xy > 1$. Совпадают ли эти множества?

Квадратный трёхчлен. Геометрический смысл коэффициентов и дискриминанта квадратного трёхчлена. График квадратного трёхчлена (парабола). Координаты вершины параболы, её ось симметрии.

88. Сумма двух чисел x и y равна единице. Каково наименьшее возможное значение выражения $x^2 + 2y^2$?

89. Будет ли график функции $y = x^2 + (x - 1)^2$ параболой?

90. Могут ли графики двух различных квадратных трёхчленов пересекаться в трёх точках?

91. Квадратный трёхчлен со старшим членом $2x^2$ принимает равные значения при $x = 3$ и $x = 5$. Найдите коэффициент при x в этом трёхчлене.

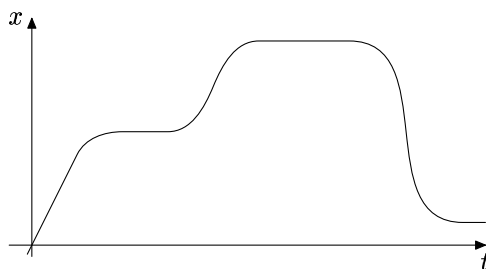
Графики степенных функций с натуральным и целым показателем. Графики функций квадратного и кубического корня.

92. Сколько точек пересечения имеют графики $y = x^{10}$ и $y = x^{15}$?

93. Запишем число 2^{-12} в десятичной системе. Сколько нулей будет в нём после запятой?

Понятие о функциональной зависимости между числовыми переменными. Способы задания функции. Область определения и множество значений функции. Нули функции. Промежутки знакопостоянства. Возрастание и убывание функций.

94. График зависимости (от времени) координаты автобуса, движущегося по прямой, показан на рисунке. Опишите движение автобуса с точки зрения пассажира.



Прогрессии и последовательности. Среднее арифметическое двух и нескольких чисел. Арифметическая прогрессия, её разность. Формулы общего члена и суммы нескольких первых членов арифметической прогрессии.

95. Первый член арифметической прогрессии равен 1, сотый член равен 50. Чему равен 50-й член этой прогрессии?

96. Сумма арифметической прогрессии из 15 членов равна 27. Чему равен восьмой член этой прогрессии?

97. Средний возраст 11 игроков футбольной команды (среднее арифметическое их возрастов) составляет 22 года. Когда одного игрока удалили, средний возраст оставшихся 10 игроков оказался равен 21 году. Сколько лет удалённому игроку?

Среднее геометрическое двух чисел, его сравнение с их средним арифметическим. Геометрическая прогрессия, её знаменатель. Формулы общего члена и суммы нескольких первых членов геометрической прогрессии.

98. Продолжите геометрическую прогрессию: $2, -3, \dots$, указав два следующих члена.

99. Первые три члена геометрической прогрессии — целые числа. Может ли её четвёртый член быть не целым числом?

Понятие о числовых последовательностях и способах их задания. Возрастаение и убывание числовых последовательностей.

100. В последовательности $1, *, *, *, *, *, *, *, *$, 7 сумма любых трёх соседних членов равна 15. Найдите второй член этой последовательности.