ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА, 1980, № 2

УДК 517.11

А. ШЕНЬ

АКСИОМАТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ТЕОРИИ АЛГОРИТМОВ И ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ВЫЧИСЛИМОСТЬ

В теории рекурсивных функций давно наблюдалось, что многие теоремы о частично-рекурсивных функциях могут быть «релятивизованы», то есть доказаны для функций, частично-рекурсивных относительно какого-либо множества. В статье [1] указаны 3 «аксиомы», названные там аксиомами протокола, программы и арифметичности, и на основе этих аксиом, точнее на основе первых двух из них, доказан ряд теорем теории рекурсивных функций. Так как две первые аксиомы (а также подразумеваемые при доказательствах интуитивно очевидные свойства замкнутости относительно подстановки, рекурсии и μ-оператора) выполнены для класса функций, частично-рекурсивных относительно какого-либо множества, то и все теоремы, выведенные из них, справедливы для этого класса. Это соображение объясняет возможность релятивизации многих теорем. Оказывается, что верно также и обратное: только те теоремы поддаются релятивизации, которые следуют из этих аксиом. Это вытекает из того, что всякий класс, удовлетворяющий условиям замкнутости, аксиомам протокола и программы, является классом всех функций, частично-рекурсивных относительно некоторого множества A. Доказательство этого факта и составляет цель настоящей статьи.

Пусть K — некоторый класс частичных функций с натуральными аргументами и значениями. В него могут входить функции от различного числа аргументов. Рассмотрим следующие условия на класс K:

(1) (Частично-рекурсивная замкнутость.) Класс K содержит все частично-рекурсивные функции, замкнут относительно подстановки, рекурсии и μ-оператора.

(2) (Аксиома протокола.) Для любой одноместной функции f из K существует множество натуральных чисел M и одноместные функции α и ω из K, определенные на всем M, такие, что:

(а) характеристическая функция множества M, равная 1 в точках M и 0 вне M, принадлежит K;

(б) значение f на числе x равно y тогда и только тогда, когда существует такое m из M, что $\alpha(m)=x$ и $\omega(m)=y$.

(В терминологии [1] M — множество «протоколов вычислений» функции f; α и ω — функции, дающие по протоколу вычисления аргумент и значение f.)

(3) (Аксиома программы.) Существует двуместная функция $F \in K$, универсальная для одноместных функций из K в следующем смысле: какова бы ни была одноместная функция f из K, существует такое натуральное число n, что, зафиксировав в F первый аргумент равным n и рассмотрев зависимость от второго аргумента, мы получим функцию, равную f.

Теорема. Если K удовлетворяет условиям (1)—(3), то существует такое множество натуральных чисел A, что K состоит в точности из функций, частично-рекурсивных относительно A (см. [2], с. 173).

Доказательство теоремы. Пусть F — двуместная универсальная функция из K (существующая по условию (3)).

Лемма 1. Произвольная функция f тогда и только тогда принадлежит классу K, когда ее график сводится по перечислимости к графику F.

Доказательство леммы 1.

1. Необходимость. Если f одноместна, то утверждение следует из универсальности F, общий случай сводится к этому с помощью нумерации кортежей.

2. Достаточность. Для доказательства достаточности предварительно покажем то, о чем говорилось выше, то есть что некоторые теории рекурсивных функций можно вывести из свойств (1)—(3), перенеся их тем самым на функции из K.

Определения.

А. Множество X называется K-перечислимым, если оно пусто или если оно есть область значений всюду определенной одноместной функции из K. (Слово «одноместной» можно было бы опустить без изменения смысла определения.)

Б. Множество X называется K-разрешимым, если его характеристическая функция принадлежит K.

Используя эти определения, легко доказать утверждения:

1.1. Всякое перечислимое множество K-перечислимо.

1.2. Всякое разрешимое множество K-разрешимо.

1.3. Всякое K-разрешимое множество K-перечислимо.

1.4. Множество K-разрешимо тогда и только тогда, когда K-разрешимо его дополнение.

1.5. Если множество X и его дополнение K-перечислимы, то X является K-разрешимым.

1.6. Пересечения, объединения и разности K-разрешимых множеств K-разрешимы.

1.7. Пересечения и объединения K-перечислимых множеств K-перечислимы.

1.8. Проекция K-перечислимого плоского множества, то есть плоского множества, имеющего K-перечислимое множество номеров в стандартной рекурсивной нумерации пар, K-перечислима.

1.9. Всякое линейное K-перечислимое множество является проекцией некоторого K-разрешимого плоского множества.

1.10. Если график функции K-перечислим, то эта функция принадлежит K.

1.11. Если множество X является K-перечислимым (K-разрешимым), то множество $\{x | x\text{-й кортеж} \subset X\}$ является K-перечислимым (K-разрешимым).

Доказательства утверждений 1.1—1.11 используют лишь частично-рекурсивную замкнутость класса K; в дальнейшем понадобится и аксиома протокола.

2.1. Область определения любой функции из K является K-перечислимой.

2.2. Множество значений любой функции из K является K-перечислимым.

2.3. График любой функции из K является K-перечислимым.

2.4. Образы и прообразы K-перечислимых множеств при функциях из K являются K-перечислимыми. Заменив в определении сводимости по перечислимости ([2], с. 191) перечислимость K-перечислимостью, получим определение сводимости по K-перечислимости.

2.5. Множество, сводимое по K-перечислимости к K-перечислимому, само K-перечислимо.

Вернемся к доказательству достаточности. Так как функция F принадлежит K, то ее график K-перечислим; раз к этому графику сводится по перечислимости график f, то график f тем более сводится по K-перечислимости к графику F. По 2.5 график f является K-перечислимым, и, следовательно, $f \in K$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть множество M таково, что класс всех функций, графики которых сводятся по перечислимости к M, удовлетворяет условиям (1)—(3). Тогда существует такое множество S, что M эквивалентно по перечислимости множеству $S \oplus$ (дополнение S). ($A \oplus B$ есть по определению $\{2n \mid n \in A\} \cup \{2n+1 \mid n \in B\}$.)

Доказательство леммы 2. Обозначим класс, о котором идет речь в лемме, через L. Множество M является L-перечислимым. Раз это так и для L выполнены условия (1)—(3), то, как следует из 1.9, M есть проекция некоторого L-разрешимого множества S. Согласно 1.3 и 1.4 S и его дополнение L-перечислимы. Но L-перечислимость равносильна сводимости по перечислимости к M. Поэтому S сводимо по перечислимости к M, дополнение S сводимо по перечислимости к M, а M сводимо по перечислимости к S (проекция множества всегда сводится к множеству). Итак, M эквивалентно по перечислимости множеству $S \oplus$ (дополнение S). Лемма 2 доказана.

Теперь теорема легко может быть получена из лемм 1 и 2; при этом используется тот факт, что сводимость по перечислимости к множеству $S \oplus$(дополнение S) равносильна рекурсивной перечислимости относительно S (определение см. в [2], с. 174). Теорема доказана.

Все три условия, указанные в формулировке теоремы, существенны. Это подтверждают следующие примеры классов, для каждого из которых заключение теоремы очевидным образом не имеет места.

1. Класс K состоит из тождественной одноместной функции, постоянных одноместных функций и всех частичных функций от двух и более аргументов. Для него все условия теоремы, кроме частично-рекурсивной замкнутости, выполнены.

2. Класс K состоит из всех функций, которые могут быть получены с помощью рекурсивных операторов ([2], с. 194) из функции ψ, описанной в [2, с. 360]. Для этого класса выполнены все условия теоремы, исключая аксиому протокола.

3. Класс K состоит из всех частичных функций. Для него выполнены все условия теоремы, кроме аксиомы программы.

Автор благодарен Владимиру Андреевичу Успенскому за постановку задачи и руководство.

A. Shen

AXIOMATIC APPROACH TO THE THEORY OF ALGORITHMS AND RELATIVIZED COMPUTABILITY

It is proved here that some conditions for a class of partial functions are necessary and sufficient for being the class of all partial functions which are computable with respect to some set.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Успенский В. А. Теорема Геделя о неполноте в элементарном изложении. — Успехи матем. наук, 1974, 29:1 (175), 3—47.
2. Роджерс Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М., 1972.

Поступила в редакцию
10.05.78