1 Modèles Stables (version propositionnelle)

Dans cette section, nous ne considérons que des programmes et des règles propositionnelles. Les définitions et notations utiles pour les exercice suivants sont rappelées en annexe (faites attention à la définition du corps négatif qui, dans le cas propositionnel, est ici simplifiée). Pour les exercices indiqués par une $*$, plus difficiles, des points bonus seront accordés suivant la qualité de la justification ou de la démonstration.

1.1 Utilisation de la définition par point fixe

Soit Π le programme propositionnel suivant.

$$
\begin{array}{ccc}
 & b, not\, c \rightarrow d & d, not\, f \rightarrow f \\
a & & \\
a \rightarrow b & b, not\, d \rightarrow c & c, not\, g \rightarrow h
\end{array}
$$

Exercice 1 Utiliser la méthode du point fixe pour savoir si $E_1 = \{a, b, c, h\}$ est un modèle stable de Π. Vous donnerez explicitement le programme réduit pour justifier votre réponse.

Exercice 2 Même question avec $E_2 = \{a, b, d\}$.

Exercice 3 Même question avec $E_3 = \{a, g\}$. Pour cet exercice, vous pourrez éviter le calcul du programme réduit par une remarque judicieuse.

1.2 Génération de tous les modèles stables

Un algorithme immédiat pour générer tous les modèles stables d'un programme Π est de calculer son *vocabulaire* V_Π (c'est à dire l'ensemble des atomes apparaissant dans une règle de Π), de générer chaque sous-ensemble E de V_Π, puis de tester E par la définition par point fixe. Cet algorithme fonctionne en temps $2^{|V_\Pi|} \times poly(|\Pi|)$. Il est donc urgent de réduire le nombre de sous-ensembles candidats à tester. Dans les exercices suivants, nous allons calculer deux sous-ensembles V_Π^{min} et V_Π^{max} de V_Π qui ont les propriétés suivantes:

- si $a \in V_\Pi^{min}$, alors a est dans tous les modèles stables de Π
- si $a \notin V_\Pi^{max}$, alors a n'est dans aucun modèle stable de Π

Ainsi, il sera uniquement nécessaire de tester tous les sous-ensembles de V_Π^{max} contenant V_Π^{min} pour retrouver tous les modèles stables de Π.

Exercice 4$*$ Trouvez une méthode pour calculer un V_Π^{max} (qui sera, pour certains programmes, strictement inclus dans V_Π). *Indice:* revoyez l'exercice 3. Vous justifierez votre réponse.

Exercice 5* ChatGPT m'a proposé pour calculer V_{Π}^{min} la notion d'*ensemble garanti*, c'est à dire l'ensemble des faits apparaissant dans le programme Π. Il m'a même (correctement) démontré que tous les atomes de l'ensemble garanti sont dans tous les modèles stables de Π. Proposez-moi pour V_{Π}^{min} un ensemble possiblement plus grand que l'ensemble garanti utilisé par ChatGPT. *Indice:* vous pouvez penser à la règle $a \rightarrow b$ du programme précédent. Vous justifierez soigneusement votre réponse, par une démonstration rigoureuse.

Annexe A: rappels de cours, et notations

En version propositionnelle, une *règle* est un objet R de la forme

$$p_1, \ldots, p_k, not\, n_1, \ldots, not\, n_q \rightarrow h$$

où $h, p_1, \ldots, p_k, n_1, \ldots, n_q$ sont des atomes propositionnels. On note $head(R) = h$, $body^+(R) = \{p_1, \ldots, p_k\}$ et $body^-(R) = \{n_1, \ldots, n_q\}$. Une règle R est un *fait* lorsque $body^+(R) = body^-(R) = \emptyset$ (et dans ce cas on la note simplement h), et elle est dite *positive* lorsque $body^-(R) = \emptyset$. La *partie positive* d'une règle R est la règle $pos(R) = p_1, \ldots, p_k \rightarrow h$ obtenue en enlevant tous les atomes du corps négatif.

Un programme Π est un ensemble de règles. Un programme sera dit *positif* lorsque toutes ses règles sont positives. La *partie positive* de Π est le programme (positif) Π^+ constitué de toutes les règles positives de Π. Si Π est un programme positif, la *saturation* de Π est l'ensemble d'atomes Π^* obtenu par une dérivation complète de Π (c'est donc son *modèle canonique*).

Soit Π un programme, et E un ensemble d'atomes, alors le *programme Π réduit par E*, noté $\Pi_{|E}$, est l'ensemble de règles obtenu de la façon suivante: pour chaque règle R de Π, si $body^-(R) \cap E = \emptyset$, alors $\Pi_{|E}$ contient $pos(R)$, sinon la règle est absente de $\Pi_{|E}$. Un *modèle stable* de Π est un ensemble d'atomes E tel que $(\Pi_{|E})^* = E$ (c'est la *définition par point fixe*).