Représentation logique et traitement algorithmique de l'espace et du temps

Philippe Balbiani
Laboratoire d'informatique de Paris-Nord
99 avenue Jean-Baptiste Clément
93430 Villetaneuse
email: `balbiani@lipn.univ-paris13.fr`

Résumé

Par "représentation logique de l'espace et du temps" nous concevons toute logique formelle dont les modèles sont des modèles mathématiques de l'espace ou du temps et dans lesquels nous ne pouvons connaître que les relations des éléments qui les composent. Nous examinerons certaines des logiques classiques et des logiques modales qui sont les solutions que les mathématiques et la logique ont apportées au problème de l'analyse rationnelle de notre perception de l'espace et du temps. En écrivant "traitement algorithmique de l'espace et du temps" nous pensons à toute méthode de décision capable d'imaginer en un temps raisonnable la démonstration d'un certain nombre de théorèmes parmi les théorèmes des logiques classiques et des logiques modales dont nous venons de parler. Nous présenterons le point de vue de la satisfaction de contraintes sous lequel le problème de la mécanisation du raisonnement sur l'espace et sur le temps a été abordé.

1 Introduction

Pour les philosophes, notre perception de l'espace est moins directe que notre perception du temps laquelle n'est pas le résultat de la pensée mais l'effet de la conscience. Il est néanmoins vrai que l'espace revendique à nos sens sa vérité plus vigoureusement que le temps. Si nous pouvons voir les formes des objets qui occupent l'espace, nous ne pouvons connaître semblablement les façons des événements qui remplissent le temps. Et cependant il est vrai que notre habileté dans le raisonnement sur les façons des objets qui occupent l'espace et notre maîtrise dans le raisonnement sur les formes des événements qui remplissent le temps nous sont pareillement nécessaires. Si bien que nous n'avons pas le droit de nous étonner de ce que le problème de la représentation logique et du traitement algorithmique de l'espace et du temps prenne, en informatique et en intelligence artificielle, une importance si grande : compréhension du langage naturel, conception assistée par ordinateur, planification, reconnaissance des formes, sémantique et validation de programmes parallèles, systèmes d'informations géographiques, systèmes multi-agents, etc.

Notre intelligence finie ne nous permet pas de mettre en œuvre les explications précises que la nature fournit sur les relations spatiales et temporelles des objets et des événements qui produisent d'une manière continuelle des impressions que nos sens éprouvent. Tant il est vrai que, le plus souvent, l'évaluation approximative des impressions qui se produisent en nous à la présence d'un objet ou à l'occurrence d'un événement importe bien davantage que leur appréciation exacte. Il s'ensuit que le problème de la représentation logique et du traitement algorithmique de l'espace et du temps est celui des exigences commandées par l'accumulation des problèmes pratiques liés aux questions qui prêtent à discussion chaque fois que l'étude qualitative des relations des objets qui occupent l'espace et des événements qui remplissent le temps prime plutôt que leur étude quantitative. C'est pourquoi la découverte de modèles qualitatifs de raisonnement sur l'espace et sur le temps est une tâche à laquelle beaucoup s'intéressent. Il est incontestable que le modèle des régions élaboré par Randell et ali [26] est le plus étudié de tous les modèles qualitatifs de raisonnement sur l'espace. Il est clair que le modèle des intervalles développé par Allen [1] est le plus connu de tous les modèles qualitatifs de raisonnement sur le temps.

A propos des modèles mathématiques de l'espace développés par Randell et ali [26], le nœud de la question réside dans les propriétés que doivent vérifier certaines des relations des régions qui les composent, à l'instar de la relation "est connectée avec" qui est vraie entre deux régions lorsque la partie intérieure de l'une a une intersection non vide avec la partie intérieure de l'autre. Au sujet des modèles mathématiques du temps élaborés par Allen [1], le cœur du problème consiste dans les qualités spécifiques qui distinguent entre elles certaines des relations des intervalles qui les composent, à l'exemple de la relation "rencontre" qui est vraie entre deux intervalles lorsque la fin de l'un est confondue avec le début de l'autre. Elles sont multiples, les applications à l'informatique et à l'intelligence artificielle des modèles qualitatifs de raisonnement sur l'espace et sur le temps que nous venons d'évoquer. Toujours est-il, le modèle des régions ne permet pas de rendre compte des relations spatiales entre objets géographiques, et ni le modèle des intervalles, des relations temporelles entre événements interruptibles. C'est pourquoi la découverte de nouveaux modèles qualitatifs de raisonnement sur l'espace et sur le temps est une tâche à laquelle il faut s'intéresser fortement. Mais il faut voir au préalable ce que nous entendons par "représentation logique et traitement algorithmique de l'espace et du temps".

Par "représentation logique de l'espace et du temps" nous concevons toute logique formelle dont les modèles sont des modèles mathématiques de l'espace ou du temps et dans lesquels nous ne pouvons connaître que les relations des éléments qui les composent. Il en résulte que la logique classique et la logique modale conviennent mieux que tout autre logique formelle à l'élaboration d'un langage de représentation logique de l'espace et du temps permettant de formuler les propriétés de ces relations. Nous examinerons certaines des logiques classiques et des logiques modales qui sont les solutions que les mathématiques et la logique ont apportées au problème de l'analyse rationnelle de notre perception de l'espace et du temps, et nommément, les logiques classiques et les logiques modales dont les modèles sont des ordres linéaires idéaux, des ordres linéaires réalistes, des ordres bilinéaires idéaux, des ordres bilinéaires réalistes. Pour faire la différence entre tous ces modèles, nous considérerons les propriétés que vérifient les relations des éléments qui les composent : la relation "est plus petit que" entre les points d'un ordre linéaire idéal, la relation "rencontre" entre les intervalles d'un ordre linéaire réaliste, les relations "est plus petit horizontalement que" et "est plus petit verticalement que" entre les bipoints d'un ordre bilinéaire idéal, les relations "rencontre horizontalement" et "rencontre verticalement" entre les rectangles d'un ordre bilinéaire réaliste.

En écrivant "traitement algorithmique de l'espace et du temps" nous pensons à toute méthode de décision capable d'imaginer en un temps raisonnable la démonstration d'un certain nombre de théorèmes parmi les théorèmes des logiques classiques et des logiques modales dont nous venons de parler. Bien-sûr, il y a dans les modèles mathématiques de l'espace et du temps des formes particulières sous lesquelles se présentent les relations des éléments qui les composent, qui favorisent tel type de méthodes plutôt que tel autre. Nous présenterons le point de vue de la satisfaction de contraintes sous lequel le problème de la mécanisation du raisonnement sur l'espace et sur le temps a été abordé, et notamment, les problèmes de satisfaction de contraintes dans l'algèbre des points, l'algèbre des intervalles, l'algèbre des relations cardinales, l'algèbre des rectangles. Pour marquer la différence entre toutes ces algèbres, nous considérerons les sous-classes polynomiales que définissent les positions relatives des éléments qui les composent : les 3 positions relatives entre les points de l'algèbre des points, les 13 positions relatives entre les intervalles de l'algèbre des intervalles, les 9 positions relatives entre les bipoints de l'algèbre des relations cardinales, les 169 positions relatives entre les rectangles de l'algèbre des rectangles.

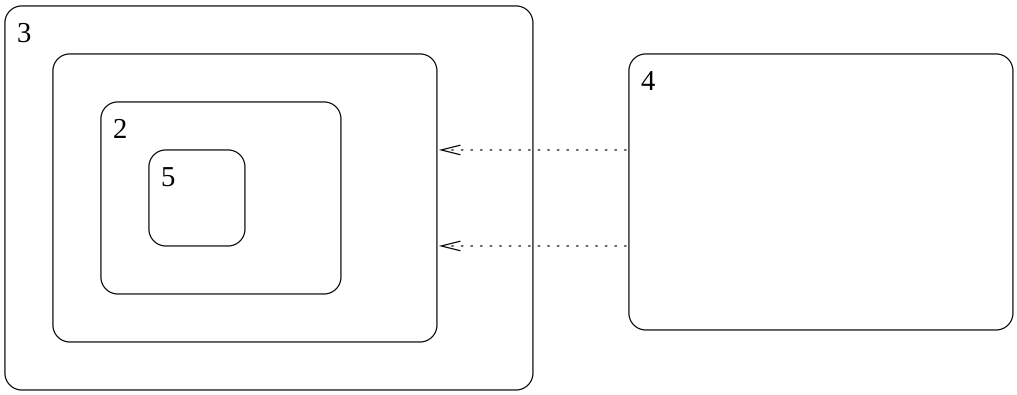

FIG. 1 – *(2) : logique classique du premier ordre; (3) : logique classique du second ordre monadique; (4) : logique modale propositionnelle; (5) : problèmes de satisfaction de contraintes.*

Expressivité des logiques formelles qui solutionnent le problème de l'analyse rationnelle de notre perception de l'espace et du temps, efficacité des méthodes de décision qui solutionnent le problème de la mécanisation du raisonnement sur l'espace et sur le temps : les principes qui président à la rédaction de cet article nous conduisent à l'adoption d'un plan en 4 parties. Parce que notre perception de l'espace et du temps nous amène immanquablement à étudier la relativité des positions des objets qui occupent l'espace comme celle des moments des événements qui remplissent le temps, nous parlerons d'abord de logique classique du premier ordre. Afin d'exprimer certaines propriétés de la relation "est plus petit que" entre les points d'un ordre linéaire idéal, nous parlerons ensuite de logique classique du second ordre monadique de l'ordre linéaire idéal. Pour constituer un fragment PSPACE-complet de la logique classique du second ordre monadique de l'ordre linéaire idéal, nous parlerons également de logique modale propositionnelle de l'ordre linéaire idéal. Dans le but de former un fragment NP-complet de la logique classique du premier ordre, nous parlerons enfin de problèmes de satisfaction de contraintes.

2 Logique classique du premier ordre

C'est si peu dire que la logique classique du premier ordre est propice à la représentation logique de l'espace et du temps, en considération de la grande quantité de logiques de l'espace ou du temps que les mathématiques et la logique ont produite. En tant que théorie axiomatique appliquée au problème de l'analyse logique de notre perception de l'espace, la géométrie a connu une destinée singulière. Considérée comme une théorie axiomatique appliquée au problème de l'analyse logique de notre perception du temps, la logique du temps a bénéficié d'un sort comparable, quoique plus tardif. Pour spécifier le langage des logiques classiques du premier ordre que nous allons présenter, il est nécessaire de fixer un ensemble dénombrable V_i de variables individuelles. Nous utiliserons les lettres x, y, etc, pour les variables individuelles.

2.1 Ordre linéaire idéal

La logique classique du premier ordre de l'ordre linéaire idéal est basée sur les points. L'ensemble $\mathcal{L}_{cpo}^{oli}$ de ses formules est défini de la façon suivante :

- $A ::= x = y \mid x < y \mid \bot \mid A \rightarrow B \mid \forall x A$.

Un modèle se compose d'un ordre linéaire idéal $(P, <_P)$ et d'une application v_i de V_i à valeurs dans P. Les éléments de P, nous les appellerons points et nous les désignerons par les lettres t, u, etc. La relation binaire $<_P$, nous l'appellerons relation de précédence. Jusqu'ici, tout ce que nous avons supposé sur les points et la relation de précédence qui

FIG. 2 – *La relation de précédence.*

les unit se ramène à ceci :

- Pour tout $t, u \in P$, si $t <_P u$ alors $t \neq u$;
- Pour tout $t, u, v \in P$, si $t <_P u$ et $u <_P v$ alors $t <_P v$;
- Pour tout $t, u \in P$, $t <_P u$ ou $t = u$ ou $u <_P t$;
- Pour tout $t \in P$, il existe $u \in P$ tel que $t <_P u$;
- Pour tout $t \in P$, il existe $u \in P$ tel que $u <_P t$.

Mais nous pourrons faire d'autres hypothèses caractéristiques de la logique du temps. Nous pourrons évidemment admettre que l'ordre linéaire idéal $(P, <_P)$ est discret :

- Pour tout $t \in P$, il existe $u \in P$ tel que $t <_P u$ et, pour tout $v \in P$, $t \not<_P v$ ou $v \not<_P u$;
- Pour tout $t \in P$, il existe $u \in P$ tel que $u <_P t$ et, pour tout $v \in P$, $u \not<_P v$ ou $v \not<_P t$;

ou encore qu'il est dense :

- Pour tout $t, u \in P$, si $t <_P u$ alors il existe $v \in P$ tel que $t <_P v$ et $v <_P u$.

Nous pourrons également supposer que l'ordre linéaire idéal $(P, <_P)$ est celui des nombres entiers, celui des nombres rationnels, celui des nombres réels. Les questions à résoudre qui prêtent à discussion sont celles de la décidabilité et de la complexité de l'ensemble des formules de $\mathcal{L}_{cpo}^{oli}$ vraies dans telle ou telle des classes de modèles que nous avons considérées. Au moyen d'une méthode d'élimination des quantificateurs, Langford [18]

Classe de modèles	Décidabilité
Ordres linéaires idéaux	oui [19]
Ordres linéaires idéaux discrets	oui [18]
Ordres linéaires idéaux denses	oui [18]
Ordre des nombres entiers	oui [18]
Ordre des nombres rationnels	oui [18]
Ordre des nombres réels	oui [18]

TAB. 1 – *Décidabilité de l'ensemble des formules de $\mathcal{L}_{cpo}^{oli}$ vraies dans telle ou telle des classes de modèles que nous avons considérées.*

montre que le problème de la vérité d'une formule de $\mathcal{L}_{cpo}^{oli}$ dans la classe de tous les ordres linéaires idéaux discrets est décidable. La méthode de Langford [18] donne la possibilité de démontrer le résultat suivant : l'ensemble des formules de $\mathcal{L}_{cpo}^{oli}$ vraies dans la classe de tous les ordres linéaires idéaux discrets est syntaxiquement complet. Même chose pour ce qui concerne la classe de tous les ordres linéaires idéaux denses ou les classes constituées d'un seul ordre comme celui des nombres entiers, celui des nombres rationnels, celui des nombres réels. Remarquons bien, d'après le théorème de Löwenheim-Skolem, que l'ordre des nombres réels vérifie les mêmes formules de $\mathcal{L}_{cpo}^{oli}$ que l'ordre des nombres rationnels. Quant au problème de la vérité d'une formule de $\mathcal{L}_{cpo}^{oli}$ dans la classe de tous les ordres linéaires idéaux, Läuchli et Leonard [19] démontrent sa décidabilité. Le résultat de Läuchli et Leonard [19] est en fait une conséquence directe d'un théorème démontré par Rabin [25].

2.2 Ordre linéaire réaliste

La logique classique du premier ordre de l'ordre linéaire réaliste est basée sur les intervalles. L'ensemble $\mathcal{L}_{cpo}^{olr}$ de ses formules est défini de la façon suivante :

- $A ::= x = y \mid x \parallel y \mid \bot \mid A \rightarrow B \mid \forall x A$.

Un modèle se compose d'un ordre linéaire réaliste $(I, ||_I)$ et d'une application v_i de V_i à valeurs dans I. Les éléments de I, nous les appellerons intervalles et nous les désignerons par les lettres t, u, etc. La relation binaire $||_I$, nous l'appellerons relation de rencontre. A partir d'un ordre linéaire idéal $(P, <_P)$, il est aisé de définir un ordre linéaire réaliste

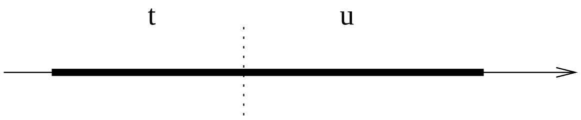

FIG. 3 – *La relation de rencontre.*

$(I, ||_I)$ de telle façon que $I = \{(t_1, t_2) \colon t_1 \in P,\ t_2 \in P$ et $t_1 <_P t_2\}$ et, pour tout $(t_1, t_2), (u_1, u_2) \in I$, $(t_1, t_2)\ ||_I\ (u_1, u_2)$ ssi $t_2 = u_1$. Réciproquement, à partir d'un ordre linéaire réaliste $(I, ||_I)$ vérifiant certaines propriétés, Ladkin [16] montre comment il est aisé de définir un ordre linéaire idéal $(P, <_P)$. Il en résulte, conformément aux résultats de décidabilité que nous avons présentés dans le cadre de la logique classique du premier ordre de l'ordre linéaire idéal, que le problème de la vérité d'une formule de $\mathcal{L}^{olr}_{cpo}$ est décidable dans toutes les classes de modèles définies à partir des classes de modèles basées sur les points que nous avons considérées.

2.3 Ordre bilinéaire idéal

La logique classique du premier ordre de l'ordre bilinéaire idéal est basée sur les bipoints. L'ensemble $\mathcal{L}^{obi}_{cpo}$ de ses formules est défini de la façon suivante :

– $A ::= x = y \mid x <^h y \mid x <^v y \mid \perp \mid A \to B \mid \forall x A$.

Un modèle se compose d'un ordre bilinéaire idéal $(P, <^h_P, <^v_P)$ et d'une application v_i de V_i à valeurs dans P. Les éléments de P, nous les appellerons bipoints et nous les désignerons par les lettres t, u, etc. Les relations binaires $<^h_P$ et $<^v_P$, nous les appellerons relation de précédence horizontale et relation de précédence verticale. A partir de deux ordres linéaires idéaux $(P_h, <_{P_h})$ et $(P_v, <_{P_v})$, il est facile de définir un ordre bilinéaire idéal $(P, <^h_P, <^v_P)$ de telle façon que $P = \{(t_1, t_2) \colon t_1 \in P_h$ et $t_2 \in P_v\}$ et, pour tout $(t_1, t_2), (u_1, u_2) \in P$, $(t_1, t_2) <^h_P (u_1, u_2)$ ssi $t_1 <_{P_h} u_1$ et $(t_1, t_2) <^v_P (u_1, u_2)$ ssi $t_2 <_{P_v} u_2$. Réciproquement, à partir d'un ordre bilinéaire idéal $(P, <^h_P, <^v_P)$ vérifiant certaines propriétés, Balbiani et Condotta [2] montrent comment il est facile de définir deux ordres linéaires idéaux $(P_h, <_{P_h})$ et $(P_v, <_{P_v})$. Il en résulte, conformément aux résultats de décidabilité que nous avons présentés dans le cadre de la logique classique du premier ordre de l'ordre linéaire idéal, que le problème de la vérité d'une formule de $\mathcal{L}^{obi}_{cpo}$ est décidable dans toutes les classes de modèles définies à partir des classes de modèles basées sur les points que nous avons considérées.

2.4 Ordre bilinéaire réaliste

La logique classique du premier ordre de l'ordre bilinéaire réaliste est basée sur les rectangles. L'ensemble $\mathcal{L}^{obr}_{cpo}$ de ses formules est défini de la façon suivante :

– $A ::= x = y \mid x\ ||^h\ y \mid x\ ||^v\ y \mid \perp \mid A \to B \mid \forall x A$.

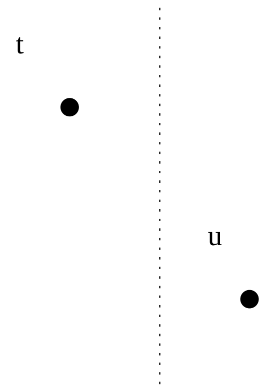

FIG. 4 – *La relation de précédence horizontale.*

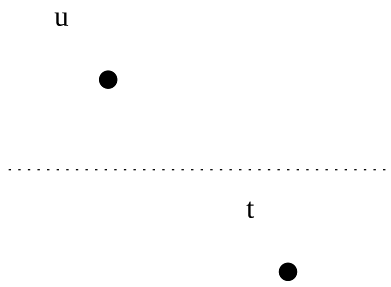

FIG. 5 – *La relation de précédence verticale.*

Un modèle se compose d'un ordre bilinéaire réaliste $(R, ||_R^h, ||_R^v)$ et d'une application v_i de V_i à valeurs dans R. Les éléments de R, nous les appellerons rectangles et nous les désignerons par les lettres t, u, etc. Les relations binaires $||_R^h$ et $||_R^v$, nous les appellerons relation de rencontre horizontale et relation de rencontre verticale. A partir de deux ordres linéaires réalistes $(I_h, ||_{I_h})$ et $(I_v, ||_{I_v})$, il est commode de définir un ordre bilinéaire réaliste $(R, ||_R^h, ||_R^v)$ de telle façon que $R = \{(t_1, t_2) \colon t_1 \in I_h \text{ et } t_2 \in I_v\}$ et, pour tout $(t_1, t_2), (u_1, u_2) \in R$, $(t_1, t_2) \ ||_R^h \ (u_1, u_2)$ ssi $t_1 \ ||_{I_h} \ u_1$ et $(t_1, t_2) \ ||_R^v \ (u_1, u_2)$ ssi $t_2 \ ||_{I_v} \ u_2$. Réciproquement, à partir d'un ordre bilinéaire réaliste $(R, ||_R^h, ||_R^v)$ vérifiant certaines propriétés, Balbiani et ali [3] montrent comment il est commode de définir deux ordres linéaires réalistes $(I_h, ||_{I_h})$ et $(I_v, ||_{I_v})$. Il en résulte, conformément aux résultats de décidabilité que nous avons présentés dans le cadre de la logique classique du premier ordre de l'ordre linéaire réaliste, que le problème de la vérité d'une formule de $\mathcal{L}_{cpo}^{obr}$ est décidable dans toutes les classes de modèles définies à partir des classes de modèles basées sur les intervalles que nous avons considérées.

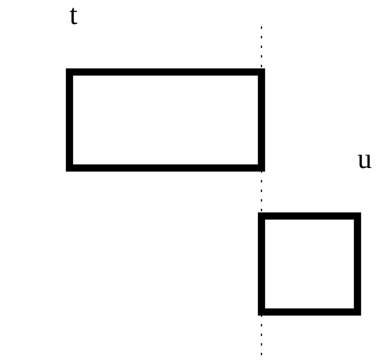

FIG. 6 – *La relation de rencontre horizontale.*

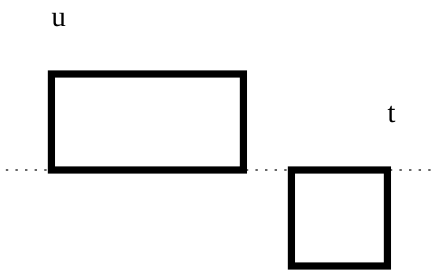

FIG. 7 – *La relation de rencontre verticale.*

3 Logique classique du second ordre monadique

Le langage de la logique classique du premier ordre est trop pauvre et trop inexpressif qui ne permet pas d'exprimer avec suffisamment de force certaines propriétés des relations des éléments qui composent les modèles mathématiques de l'espace ou du temps. Par exemple, nous savons que le passage au second ordre monadique s'avère nécessaire pour qui veut définir la classe de tous les ordres linéaires idéaux qui sont isomorphes à l'ordre des nombres entiers. Mais le langage de la logique classique du second ordre monadique n'est pas aussi riche ni aussi expressif qu'il le paraît. Par exemple, nous ignorons si le passage au second ordre monadique s'avère suffisant pour qui veut définir la classe de tous les ordres linéaires idéaux qui sont isomorphes à l'ordre des nombres réels. Qui plus est, les applications à l'informatique et à l'intelligence artificielle des logiques classiques que nous venons d'évoquer nous obligent à inclure certains prédicats dans leurs langages. Pour spécifier le langage de la logique classique du second ordre monadique de l'ordre linéaire idéal que nous allons présenter, il est nécessaire de fixer un ensemble dénombrable V_c de variables collectives. Nous utiliserons les lettres X, Y, etc, pour les variables collectives. L'ensemble $\mathcal{L}^{oli}_{csom}$ des formules de la logique classique du second ordre monadique de l'ordre linéaire idéal est défini de la façon suivante :

- $A ::= x = y \mid x < y \mid x \in X \mid \bot \mid A \rightarrow B \mid \forall x A \mid \forall X A$.

Dans une formule universelle, la quantification sur une variable collective n'est pas autorisée. Un modèle se compose d'un ordre linéaire idéal $(P, <_P)$, d'une application v_i de V_i à valeurs dans P et d'une application v_c de V_c à valeurs dans 2^P. Examinons le

Classe de modèles	Décidabilité
Ordres linéaires idéaux	oui [13]
Ordres linéaires idéaux discrets	oui [13]
Ordres linéaires idéaux denses	oui [13]
Ordre des nombres entiers	oui [25]
Ordre des nombres rationnels	oui [25]
Ordre des nombres réels	oui [6]

TAB. 2 – *Décidabilité de l'ensemble des formules universelles de $\mathcal{L}^{oli}_{csom}$ vraies dans telle ou telle des classes de modèles que nous avons considérées.*

Classe de modèles	Décidabilité
Ordres linéaires idéaux	non [29]
Ordres linéaires idéaux discrets	non [29]
Ordres linéaires idéaux denses	non [29]
Ordre des nombres entiers	oui [25]
Ordre des nombres rationnels	oui [25]
Ordre des nombres réels	non [29]

TAB. 3 – *Décidabilité de l'ensemble des formules de $\mathcal{L}^{oli}_{csom}$ vraies dans telle ou telle des classes de modèles que nous avons considérées.*

problème de la vérité d'une formule de $\mathcal{L}^{oli}_{csom}$ dans telle ou telle des classes de modèles que nous avons considérées. Remarquons d'abord que, d'après le théorème de Rabin [25], le problème de la vérité d'une formule de $\mathcal{L}^{oli}_{csom}$ dans la classe de tous les ordres linéaires idéaux dénombrables est décidable. Par conséquent, d'après le théorème de Löwenheim-Skolem, le problème de la vérité d'une formule universelle de $\mathcal{L}^{oli}_{csom}$ dans la classe de tous les ordres linéaires idéaux est décidable, un résultat auquel Gurevich [13] parvient déjà d'une tout autre manière. Même chose pour ce qui concerne la classe de tous les ordres linéaires idéaux discrets et la classe de tous les ordres linéaires idéaux denses. Notons ensuite que, d'après le théorème de Rabin [25], le problème de la vérité d'une formule de $\mathcal{L}^{oli}_{csom}$ dans les classes constituées d'un seul ordre comme celui des nombres entiers, celui des nombres rationnels est décidable. Signalons pour finir que Shelah [29] démontre l'indécidabilité du problème de la vérité d'une formule de $\mathcal{L}^{oli}_{csom}$ dans la classe de tous les ordres linéaires idéaux. Même chose pour ce qui concerne la classe de tous les ordres linéaires idéaux discrets et la classe de tous les ordres linéaires idéaux denses ou la classe constituée d'un seul ordre comme celui des nombres réels. Quant au problème de la vérité d'une formule universelle de $\mathcal{L}^{oli}_{csom}$ dans la classe constituée d'un seul ordre comme celui des nombres réels, Burgess et Gurevich [6] démontrent sa décidabilité.

4 Logique modale propositionnelle

Par analogie avec la logique temporelle qui est une logique modale dont les modèles sont des modèles mathématiques du temps, nous appellerons logique spatiale toute logique modale dont les modèles sont des modèles mathématiques de l'espace. Force nous est de reconnaître qu'elles sont communes les logiques modales dont les modèles sont des modèles mathématiques du temps, tant la simplicité des relations permises entre les points du temps amène la sémantique des mondes possibles à s'adapter particulièrement au problème de la représentation logique du temps et tant l'intérêt manifesté à leur encontre, qui procède autant de l'importance accordée au problème de la compréhension du langage naturel que de l'importance donnée à la question de la sémantique et de la validation des programmes parallèles, les a fait surgir en nombre. Pourquoi, depuis les travaux sur la logique des modalités diodoriennes, la logique temporelle est-elle devenue l'industrie que l'on sait, au lieu que la logique spatiale en est encore à ses débuts? Nous l'avons dit, la diversité des rapports qu'entretiennent entre eux les points de l'espace est la cause profonde de l'intérêt séculaire marqué à l'encontre de la géométrie euclidienne. Auprès de cette variété, la pauvreté des relations permises entre les points du temps est le motif qui semble déterminant à qui veut interpréter l'aisance apparente avec laquelle la logique temporelle s'est développée. Par suite, il paraît impossible de réaliser concrètement une logique spatiale, tant les modèles mathématiques de l'espace surpassent en complexité les modèles mathématiques du temps. Pour spécifier le langage de la logique modale propositionnelle de l'ordre linéaire idéal que nous allons présenter, il est nécessaire de fixer un ensemble dénombrable V_p de variables propositionnelles. Nous utiliserons les lettres p, q, etc, pour les variables propositionnelles. L'ensemble $\mathcal{L}_{mp}^{oli}$ des formules de la logique modale propositionnelle de l'ordre linéaire idéal est défini de la façon suivante :

- $A ::= p \mid \bot \mid A \rightarrow B \mid A\mathcal{U}B \mid A\mathcal{S}B$.

Dans une formule de Prior, le premier argument des modalités $\mathcal{U}$ et $\mathcal{S}$ est toujours égal à la constante booléenne $\top$. Un modèle se compose d'un ordre linéaire idéal $(P, <_P)$ et d'une application v_p de V_p à valeurs dans 2^P. La relation de vérité entre un modèle, un élément de P et une formule de $\mathcal{L}_{mp}^{oli}$ est définie de la façon suivante :

- $(P, <_P, v_p), t \models p$ ssi $t \in v_p(p)$;
- $(P, <_P, v_p), t \models A\mathcal{U}B$ ssi il existe $u \in P$ tel que $t <_P u$, $(P, <_P, v_p), u \models A$ et, pour tout $v \in P$, si $t <_P v$ et $v <_P u$ alors $(P, <_P, v_p), v \models B$;
- $(P, <_P, v_p), t \models A\mathcal{S}B$ ssi il existe $u \in P$ tel que $u <_P t$, $(P, <_P, v_p), u \models A$ et, pour tout $v \in P$, si $u <_P v$ et $v <_P t$ alors $(P, <_P, v_p), v \models B$.

Dans un ordre linéaire idéal, nous ne pouvons connaître que les relations des éléments qui le composent. Mais si les expressions du langage de la logique classique de l'ordre linéaire idéal renferment des occurences de certaines unités linguistiques qui évoquent ces relations et ces éléments, les expressions du langage de la logique modale de l'ordre linéaire idéal en sont dépourvues. Il n'en est pas moins vrai que, pour ce qui concerne les classes constituées d'un seul ordre comme celui des nombres entiers, celui des nombres réels, l'ensemble $\mathcal{L}_{mp}^{oli}$ des formules de la logique modale propositionnelle de l'ordre linéaire idéal est expressivement complet. C'est-à-dire qu'à chaque formule universelle A de $\mathcal{L}_{csom}^{oli}$ nous pouvons associer une formule $A^\star$ de $\mathcal{L}_{mp}^{oli}$ de telle façon que la vérité de A soit équivalente à celle de $A^\star$ dans les classes constituées d'un seul ordre comme celui des nombres entiers, celui des nombres réels, ainsi que Kamp [14] le démontre. Dans le cadre de la logique modale propositionnelle de l'ordre linéaire idéal, les différentes faces suivant lesquelles on peut considérer la question de la formalisation de la rationalité temporelle portent sur la voie qu'il faut suivre et le prix qu'il en coûte pour établir quelles formules de $\mathcal{L}_{mp}^{oli}$ sont vraies dans telle ou telle des classes de modèles que nous avons considérées. Concernant la question de la décidabilité du problème de la vérité d'une formule de $\mathcal{L}_{mp}^{oli}$, il convient de noter qu'à chaque formule A de $\mathcal{L}_{mp}^{oli}$ nous pouvons associer une formule universelle $A^\star$ de $\mathcal{L}_{csom}^{oli}$ de telle façon que la vérité de A soit équivalente à celle de $A^\star$ dans tout ordre linéaire idéal donné. Il en résulte, conformément aux résultats de décidabilité que nous avons présentés dans le cadre de la logique classique du second ordre monadique de l'ordre linéaire idéal, que le problème de la vérité d'une formule de $\mathcal{L}_{mp}^{oli}$ est décidable dans toutes les classes de modèles que nous avons considérées. Concernant la question de la

Classe de modèles	Complexité
Ordres linéaires idéaux	Co-NP-complet [24]
Ordres linéaires idéaux denses	Co-NP-complet [24]
Ordre des nombres entiers	Co-NP-complet [24]
Ordre des nombres rationnels	Co-NP-complet [24]
Ordre des nombres réels	Co-NP-complet [24]

TAB. 4 – *Complexité de l'ensemble des formules de Prior de $\mathcal{L}_{mp}^{oli}(\mathcal{U})$ vraies dans telle ou telle des classes de modèles que nous avons considérées.*

Classe de modèles	Complexité
Ordres linéaires idéaux	Co-NP-complet [24]
Ordres linéaires idéaux denses	Co-NP-complet [24]
Ordre des nombres entiers	Co-NP-complet [24]
Ordre des nombres rationnels	Co-NP-complet [24]

TAB. 5 – *Complexité de l'ensemble des formules de Prior de $\mathcal{L}_{mp}^{oli}(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ vraies dans telle ou telle des classes de modèles que nous avons considérées.*

complexité du problème de la vérité d'une formule de $\mathcal{L}_{mp}^{oli}$, des solutions ont été apportées par Ono et Nakamura [24], Sistla et Clarke [30] et Reynolds [27, 28]. Dans la classe constituée d'un seul ordre comme celui des nombres entiers, si Ono et Nakamura [24] démontrent que le problème de la vérité d'une formule de Prior de $\mathcal{L}_{mp}^{oli}(\mathcal{U})$ ainsi que le problème de la vérité d'une formule de Prior de $\mathcal{L}_{mp}^{oli}(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ sont Co-NP-complets, Sistla et Clarke [30] épuisent le sujet qui démontrent que le problème de la vérité d'une formule de $\mathcal{L}_{mp}^{oli}(\mathcal{U})$ ainsi que le problème de la vérité d'une formule de $\mathcal{L}_{mp}^{oli}(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ sont PSPACE-complets. Examinons la question de la complexité du problème de la vérité d'une formule de $\mathcal{L}_{mp}^{oli}$ dans les autres classes de modèles. Remarquons d'abord que Ono et Nakamura [24] démontrent également que le problème de la vérité d'une formule de Prior de $\mathcal{L}_{mp}^{oli}(\mathcal{U})$ ainsi que le problème de la vérité d'une formule de Prior de $\mathcal{L}_{mp}^{oli}(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ sont Co-NP-complets dans la classe de tous les ordres linéaires idéaux. Même chose pour ce qui concerne la classe de tous les ordres linéaires idéaux denses. Notons ensuite que Reynolds [27] démontre que

Classe de modèles	Complexité
Ordres linéaires idéaux	PSPACE-complet [27]
Ordre des nombres entiers	PSPACE-complet [30]

TAB. 6 – *Complexité de l'ensemble des formules de $\mathcal{L}_{mp}^{oli}(\mathcal{U})$ vraies dans telle ou telle des classes de modèles que nous avons considérées.*

Classe de modèles	Complexité
Ordre des nombres entiers	PSPACE-complet [30]
Ordre des nombres réels	PSPACE-complet [28]

TAB. 7 – *Complexité de l'ensemble des formules de $\mathcal{L}_{mp}^{oli}(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ vraies dans telle ou telle des classes de modèles que nous avons considérées.*

le problème de la vérité d'une formule de $\mathcal{L}_{mp}^{oli}(\mathcal{U})$ est PSPACE-complet dans la classe de tous les ordres linéaires idéaux. Signalons enfin que Reynolds [28] démontre également que le problème de la vérité d'une formule de $\mathcal{L}_{mp}^{oli}(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ est PSPACE-complet dans la classe constituée d'un seul ordre comme celui des nombres réels. Remarquons bien, d'une part, que l'ordre des nombres réels vérifie les mêmes formules de Prior de $\mathcal{L}_{mp}^{oli}(\mathcal{U})$ que l'ordre des nombres rationnels et, d'autre part, que l'ordre des nombres rationnels vérifie les mêmes formules de Prior de $\mathcal{L}_{mp}^{oli}(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ que la classe de tous les ordres linéaires idéaux denses, ainsi que Goldblatt [12] le démontre.

5 Problèmes de satisfaction de contraintes

Qu'elles soient définies à partir du modèle des points élaboré par Vilain et Kautz [32] ou à partir du modèle des intervalles développé par Allen [1], les méthodes de propagation de contraintes ont donné lieu à des systèmes de déduction automatique capables de solutionner rapidement le problème de la consistance des réseaux de contraintes entre certains éléments de la logique du temps, à la manière de van Beek [31] qui résoud efficacement le problème de la satisfaction des réseaux de contraintes entre points ainsi que le problème de la satisfaction des réseaux de contraintes entre intervalles. Nous montrons comment, vers des espaces à plusieurs dimensions, l'extension de l'algèbre des points ainsi que l'extension de l'algèbre des intervalles sont réalisables.

5.1 Ordre linéaire idéal

Vilain et Kautz [32] considèrent l'ensemble $\mathcal{P}$ de toutes les positions relatives entre deux points d'un ordre linéaire idéal dense $(P, <_P)$: $<$ ("précède"), $=$ ("est égal à"), $>$ ("est précédé par"). Ces positions relatives, qui sont au nombre de 3, Vilain et Kautz [32] les combinent pour former l'ensemble $2^{\mathcal{P}}$ des 2^3 éléments d'une algèbre relationnelle qu'ils appellent algèbre des points. Dès ce moment, pour Vilain et Kautz [32], un réseau de contraintes qualitatives entre points se compose d'un ensemble fini V_i^f de variables individuelles et d'une application ρ_i^f de $V_i^f \times V_i^f$ à valeurs dans $2^{\mathcal{P}}$. C'est pourquoi, dans le cadre de l'algèbre relationnelle développée par Vilain et Kautz [32], le sujet qui implique des difficultés à résoudre est celui de la consistance des réseaux de contraintes qualitatives entre points. Le réseau (V_i^f, ρ_i^f) est consistant lorsqu'il existe un modèle $(T, <_T, v_i)$ tel que, pour tout $x, y \in V_i^f$, il existe $\alpha \in \rho_i^f(x, y)$ tel que $(T, <_T, v_i) \models x\alpha y$. Le modèle $(T, <_T, v_i)$ est appelé solution de (V_i^f, ρ_i^f). Un autre sujet qui peut donner lieu à discussion est celui de la minimalité des réseaux de contraintes qualitatives entre points. Le réseau (V_i^f, ρ_i^f) est minimal lorsque, pour tout $x, y \in V_i^f$ et pour tout $\alpha \in \rho_i^f(x, y)$, il existe une solution $(T, <_T, v_i)$ de (V_i^f, ρ_i^f) tel que $(T, <_T, v_i) \models x\alpha y$. La question de la consistance et celle de la minimalité sont polynomialement réductibles l'une à l'autre : voilà pourquoi nous pouvons concentrer toute notre attention sur un seul de ces problèmes, celui de la consistance des réseaux de contraintes qualitatives entre points. Il ressort de la réflexion conduite par Vilain et Kautz [32] que le problème de la consistance des réseaux de contraintes entre points est dans la classe P ou plus précisément que l'algorithme de la chemin-consistance, qui élimine tant qu'il peut les positions relatives de la contrainte $\rho_i^f(x, y)$ qui ne sont pas dans le résultat de la composition de la contrainte $\rho_i^f(x, z)$ avec la contrainte $\rho_i^f(z, y)$, est une méthode de décision en $\bigcirc(\mid V_i^f \mid^3)$ pour le problème de la consistance des réseaux de contraintes entre points. La contribution de van Beek [31] à l'étude du problème de la consistance des réseaux de contraintes entre points consiste dans l'élaboration d'une méthode de décision en $\bigcirc(\mid V_i^f \mid^2)$ basée sur l'application de certains algorithmes comme celui qui concerne la recherche de composantes connexes dans un graphe. La question de la consistance et celle de la minimalité ont beau être polynomialement réductibles l'une à l'autre, mais l'algorithme de la chemin-consistance n'est pas, ainsi que Vilain et Kautz [32] croient le démontrer, une méthode de décision pour le problème de la minimalité des réseaux de contraintes entre points. C'est van Beek [31] qui rectifie l'erreur de Vilain et Kautz [32] en concevant un réseau chemin-consistant de contraintes entre points qui n'est pas minimal. Remarquons bien que la polynomialité du problème de la consistance des réseaux de contraintes entre points est en fait une conséquence directe d'un théorème démontré par Ligozat [20]. Afin de l'expliquer, nous

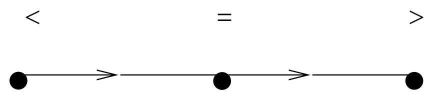

FIG. 8 – *Le treillis de l'algèbre des points.*

considérons l'ensemble $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle. Il apparaît que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout élément ρ de l'algèbre des points, la fermeture topologique de l'ensemble $\{u \colon u \in \mathbb{R} \text{ et } t\rho u\}$ est une partie convexe de $\mathbb{R}$. Dès lors, le théorème de Helly garantit sans aucune difficulté la consistance de tout réseau chemin-consistant de contraintes non vides entre points. Il s'ensuit que l'algorithme de la chemin-consistance est une méthode de décision pour le problème de la consistance des réseaux de contraintes entre points.

5.2 Ordre linéaire réaliste

Allen [1] considère l'ensemble $\mathcal{I}$ de toutes les positions relatives entre deux intervalles d'un ordre linéaire réaliste dense $(I, ||_I)$: p ("précède"), m ("rencontre"), o ("chevauche"), s ("commence"), d ("est inclus dans"), fi ("est fini par"), eq ("est égal à"), f ("finit"), di ("inclut"), si ("est commencé par"), oi ("est chevauché par"), mi ("est rencontré par"), pi ("est précédé par"). Ces positions relatives, qui sont au nombre de 13, Allen [1] les combine pour former l'ensemble $2^{\mathcal{I}}$ des 2^{13} éléments d'une algèbre relationnelle qu'il appelle algèbre des intervalles. Dès lors, pour Allen [1], un réseau de contraintes qualitatives entre intervalles se compose d'un ensemble fini V_i^f de variables individuelles et d'une application ρ_i^f de $V_i^f \times V_i^f$ à valeurs dans $2^{\mathcal{I}}$. Il ressort de la réflexion conduite par Vilain et Kautz [32] au moyen d'un codage du problème 3SAT que le problème de la consistance des réseaux de contraintes entre intervalles est NP-complet. C'est pour cette raison que l'algorithme de la chemin-consistance n'est pas une méthode de décision pour le problème de la consistance des réseaux de contraintes entre intervalles, en dépit des améliorations que Bessière [5] apporte au traitement de la chemin-consistance. Par la suite il s'est avéré que la difficulté essentielle réside en ceci : existe-t-il, dans l'algèbre des intervalles, des parties pour lesquelles le problème de la consistance des réseaux de contraintes entre intervalles est dans la classe P ? En réponse à cette question, van Beek [31] considère les éléments de l'algèbre des intervalles qui peuvent être traduits dans l'algèbre des points et que Ladkin et Maddux [17] appellent relations pointisables de l'algèbre des intervalles. Ces relations englobent les éléments de l'algèbre des intervalles qui peuvent être traduits dans la partie convexe de l'algèbre des points définie par le treillis de la figure 8 et que Nökel [23] appelle relations convexes de l'algèbre des intervalles. Remarquons bien la correspondance entre les relations convexes de l'algèbre des intervalles et la partie convexe de l'algèbre des intervalles définie par le treillis de la figure 9. L'ensemble des relations pointisables et l'ensemble des relations convexes forment des sous-classes polynomiales de l'algèbre des intervalles. Autrement dit, l'ensemble des relations pointisables et l'ensemble des relations convexes sont stables pour les opérations d'intersection, de composition et d'inversion et le problème de la consistance des réseaux de contraintes entre intervalles est dans la classe P à partir du moment où les contraintes entre intervalles des réseaux considérés appartiennent à l'ensemble des relations pointisables ou à l'ensemble des relations convexes. L'apport de van Beek [31] à l'étude du problème de la consistance des réseaux de contraintes entre intervalles consiste dans l'élaboration d'une méthode de décision en $\bigcirc(\mid V_i^f \mid^2)$ basée sur l'application à l'ensemble des relations pointisables et à l'ensemble des relations convexes de l'algorithme qu'il développe dans le cadre du problème de la consistance des réseaux de contraintes entre points. Mais parmi les sous-classes polynomiales de l'algèbre des intervalles, y en a-t-il qui sont maximales ? Autrement dit, existe-t-il des sous-classes polynomiales de l'algèbre des intervalles telles que le problème de la consistance des réseaux de contraintes entre intervalles est NP-complet à partir du moment où les contraintes entre intervalles des réseaux considérés appartiennent à un ensemble qui étend strictement la sous-classe polynomiale considérée ? En réponse à cette question, Nebel et Bürckert [22] considèrent les éléments de l'algèbre des intervalles qui peuvent être traduits dans le langage des clauses de Horn de l'algèbre des points et que Ligozat [20] appelle relations préconvexes de l'algèbre des intervalles. Ces relations englobent les relations pointisables dont nous venons de parler. L'apport de Nebel et Bürckert [22] à l'étude du problème de la consistance des réseaux de contraintes entre intervalles comprend trois points. En premier lieu, l'ensemble des relations préconvexes forme une sous-classe de l'algèbre des intervalles, un résultat que Nebel et Bürckert [22] démontrent en utilisant certaines propriétés comme celle qui concerne la recherche de parties inconsistantes minimales dans un ensemble de clauses de Horn propositionnelles. En deuxième lieu, l'ensemble des relations préconvexes forme une sous-classe polynomiale de l'algèbre des intervalles, un résultat que Nebel et Bürckert [22] démontrent en utilisant certains algorithmes comme celui qui concerne la recherche d'inconsistances dans un ensemble de clauses de Horn propositionnelles. En troisième lieu, l'ensemble des relations préconvexes forme une sous-classe polynomiale maximale de l'algèbre des intervalles, un résultat que Nebel et Bürckert [22] démontrent au moyen d'un programme. Remarquons bien que la polynomialité du problème de la consistance des réseaux de contraintes préconvexes entre intervalles est en fait une conséquence directe d'un théorème démontré par Ligozat [20]. Pour l'expliquer, nous considérons l'ensemble $E = \{(t_1, t_2) : t_1 \in \mathbb{R},$

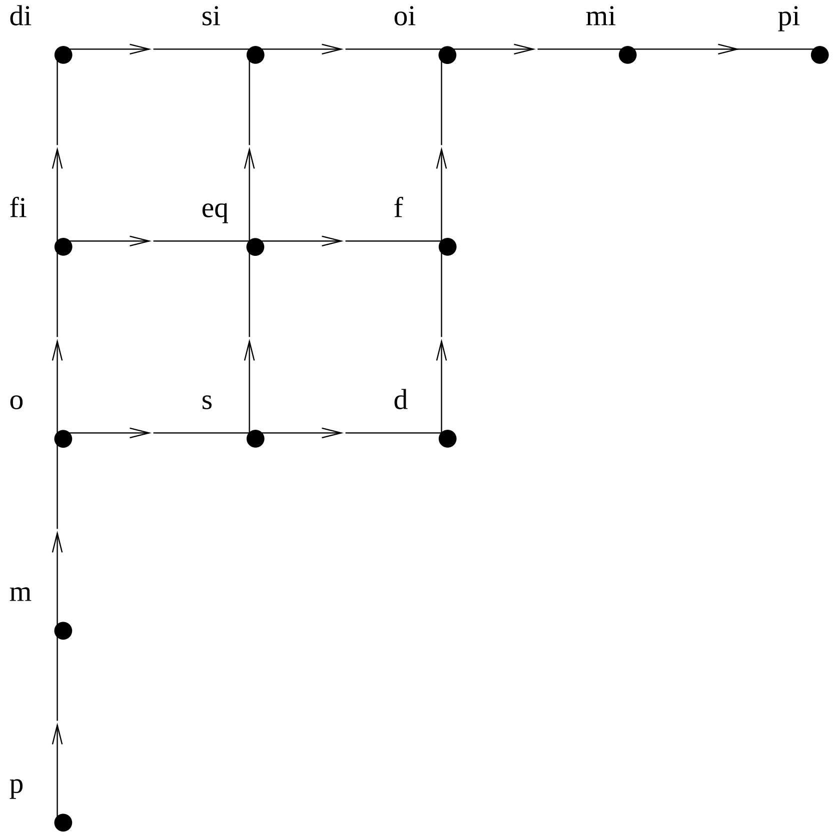

FIG. 9 – *Le treillis de l'algèbre des intervalles.*

$t_2 \in \mathbb{R}$ et $t_1 < t_2\}$ muni de la topologie usuelle. Il apparaît que, pour tout $(t_1, t_2) \in E$ et pour tout élément préconvexe ρ de l'algèbre des intervalles, la fermeture topologique de l'ensemble $\{(u_1, u_2) : (u_1, u_2) \in E$ et $(t_1, t_2)\rho(u_1, u_2)\}$ est l'intersection avec E du produit cartésien de deux parties convexes de $\mathbb{R}$. Dès lors, le théorème de Helly garantit sans aucun problème la consistance de tout réseau chemin-consistant de contraintes préconvexes non vides entre intervalles. Puisque l'ensemble des relations préconvexes forme une sous-classe de l'algèbre des intervalles, il s'ensuit que l'algorithme de la chemin-consistance est une méthode de décision pour le problème de la consistance des réseaux de contraintes préconvexes entre intervalles.

5.3 Ordre bilinéaire idéal

Ligozat [21] considère l'ensemble $\mathcal{RC}$ de toutes les positions relatives entre deux bipoints d'un ordre bilinéaire idéal dense $(P, <_P^h, <_P^v)$: $(<,<)$ ("est au sud-ouest de"), $(=,<)$ ("est au sud de"), $(>,<)$ ("est au sud-est de"), $(<,=)$ ("est à l'ouest de"), $(=,=)$ ("est égal à"), $(>,=)$ ("est à l'est de"), $(<,>)$ ("est au nord-ouest de"), $(=,>)$ ("est au nord de"), $(>,>)$ ("est au nord-est de"). Ces positions relatives, qui sont au nombre de 9, Ligozat [21] les combine pour former l'ensemble $2^{\mathcal{RC}}$ des 2^9 éléments d'une algèbre relationnelle qu'il appelle algèbre des relations cardinales. Dès lors, pour Ligozat [21], un réseau de contraintes qualitatives entre bipoints se compose d'un ensemble fini V_i^f de variables individuelles et d'une application ρ_i^f de $V_i^f \times V_i^f$ à valeurs dans $2^{\mathcal{RC}}$. Il ressort de la réflexion conduite par Ligozat [21] au moyen d'un codage du problème 3SAT que le problème de la consistance des réseaux de contraintes entre bipoints est NP-complet. Les difficultés que suscite la question de l'existence, dans l'algèbre des relations cardinales, d'une sous-classe polynomiale maximale, Ligozat [21] les a résolues. Comment ? En

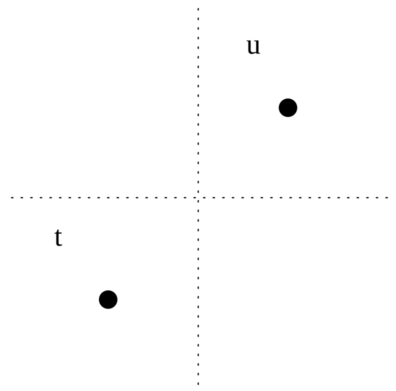

FIG. 10 – *La position relative* $(<,<)$.

définissant d'abord les relations préconvexes de l'algèbre des relations cardinales comme étant les éléments de l'algèbre des relations cardinales qui peuvent être traduits dans le langage des clauses de Horn de l'algèbre des points. En considérant ensuite l'ensemble $E' = \{(t_1,t_2) : t_1 \in \mathbb{R} \text{ et } t_2 \in \mathbb{R}\}$ muni de la topologie usuelle. En montrant enfin que, pour tout $(t_1,t_2) \in E'$ et pour tout élément préconvexe ρ de l'algèbre des relations cardinales, la fermeture topologique de l'ensemble $\{(u_1,u_2) : (u_1,u_2) \in E' \text{ et } (t_1,t_2)\rho(u_1,u_2)\}$ est le produit cartésien de deux parties convexes de $\mathbb{R}$. Dès lors, le théorème de Helly garantit sans aucune complication la consistance de tout réseau chemin-consistant de contraintes préconvexes non vides entre bipoints. Ligozat [21] a été en mesure de montrer que l'ensemble des relations préconvexes formait une sous-classe de l'algèbre des relations cardinales. Il en conclut immédiatement que l'algorithme de la chemin-consistance est une méthode de décision pour le problème de la consistance des réseaux de contraintes préconvexes entre relations cardinales.

5.4 Ordre bilinéaire réaliste

Balbiani et ali [3] considèrent l'ensemble $\mathcal{R}$ de toutes les positions relatives entre deux rectangles d'un ordre bilinéaire réaliste dense $(R, ||_R^h, ||_R^v)$: (p,p) ("précède horizontalement et précède verticalement"), (m,p) ("rencontre horizontalement et précède verticalement"), ..., (pi, pi) ("est précédé horizontalement par et est précédé verticalement par"). Ces positions relatives, qui sont au nombre de 169, Balbiani et ali [3] les combinent pour former l'ensemble $2^{\mathcal{R}}$ des 2^{169} éléments d'une algèbre relationnelle qu'ils appellent algèbre des rectangles. Dès lors, pour Balbiani et ali [3], un réseau de contraintes qualitatives entre rectangles se compose d'un ensemble fini V_i^f de variables individuelles et d'une application ρ_i^f de $V_i^f \times V_i^f$ à valeurs dans $2^{\mathcal{R}}$. Puisque l'algèbre des rectangles est l'extension, vers un espace à plusieurs dimensions, de l'algèbre des intervalles, il s'ensuit que le problème de la consistance des réseaux de contraintes entre rectangles est NP-complet. Balbiani et ali [4] ont abordé la question de l'existence, dans l'algèbre des rectangles, d'une sous-classe polynomiale maximale, et ce de la façon suivante. Ils définissent d'abord les relations pré-

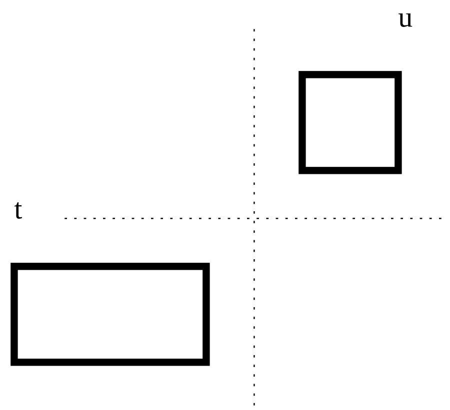

FIG. 11 – *La position relative (p,p).*

convexes de l'algèbre des rectangles comme étant les éléments de l'algèbre des rectangles qui peuvent être traduits dans le langage des clauses de Horn de l'algèbre des points. Ils considèrent ensuite l'ensemble $E'' = \{((t_{11}, t_{12}), (t_{21}, t_{22})) : t_{11} \in \mathbb{R}, t_{12} \in \mathbb{R}, t_{11} < t_{12}, t_{21} \in \mathbb{R}, t_{22} \in \mathbb{R}, t_{21} < t_{22}\}$ qu'ils munissent de la topologie usuelle. Ils montrent enfin que, pour tout $((t_{11}, t_{12}), (t_{21}, t_{22})) \in E''$ et pour tout élément préconvexe ρ de l'algèbre des rectangles, la fermeture topologique de l'ensemble $\{((u_{11}, u_{12}), (u_{21}, u_{22})) : ((u_{11}, u_{12}), (u_{21}, u_{22})) \in E''$ et $((t_{11}, t_{12}), (t_{21}, t_{22}))\rho((u_{11}, u_{12}), (u_{21}, u_{22}))\}$ est l'intersection avec E'' du produit cartésien de quatre parties convexes de $\mathbb{R}$. Dès lors, le théorème de Helly garantit sans aucune peine la consistance de tout réseau chemin-consistant de contraintes préconvexes non vides entre rectangles. Balbiani et ali [4] n'ont pas été en mesure de montrer que l'ensemble des relations préconvexes formait une sous-classe de l'algèbre des rectangles. C'est donc par un moyen détourné qu'ils prouvent que l'algorithme de la chemin-consistance est une méthode de décision pour le problème de la consistance des réseaux de contraintes préconvexes entre rectangles.

6 Conclusion

Dans le cadre du problème de la représentation logique et du traitement algorithmique de l'espace et du temps, ce n'est pas un tableau exhaustif des recherches ainsi que des résultats qu'elles ont déterminés que nous avons dressé, mais la description à grands traits de certaines avancées anciennes ou récentes et qui concernent la logique classique du premier ordre, la logique classique du second ordre monadique, la logique modale propositionnelle, les problèmes de satisfaction de contraintes. Aussi nous souhaitons attirer l'attention sur certaines questions qui peuvent donner lieu à discussion.

Il y a d'abord le problème de la vérité d'une formule de $\mathcal{L}_{cpo}^{oli}$ dans toutes les classes de modèles que nous avons considérées : sa complexité n'est pas connue. Même chose pour ce qui concerne les formules de $\mathcal{L}_{cpo}^{olr}$, les formules de $\mathcal{L}_{cpo}^{obi}$, les formules de $\mathcal{L}_{cpo}^{obr}$. Il y a ensuite le problème de la vérité d'une formule de $\mathcal{L}_{csom}^{oli}$ dans toutes les classes de modèles que nous avons considérées : sa complexité n'est pas connue. Il y a enfin le problème de la vérité d'une formule de Prior de $\mathcal{L}_{mp}^{oli}(\mathcal{U})$ dans la classe de tous les ordres linéaires idéaux discrets : sa complexité n'est pas connue. Même chose pour ce qui concerne les formules de Prior de $\mathcal{L}_{mp}^{oli}(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ et la classe de tous les ordres linéaires idéaux discrets ou la classe constituée d'un seul ordre comme celui des nombres réels, les formules de $\mathcal{L}_{mp}^{oli}(\mathcal{U})$ et la classe de tous les ordres linéaires idéaux discrets, la classe de tous les ordres linéaires idéaux denses ou les classes constituées d'un seul ordre comme celui des nombres rationnels, celui des nombres réels, les formules de $\mathcal{L}_{mp}^{oli}(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ et la classe de tous les ordres linéaires idéaux, la classe de tous les ordres linéaires idéaux discrets, la classe de tous les ordres linéaires idéaux denses ou la classe constituée d'un seul ordre comme celui des nombres rationnels.

Toutefois, plus que tout autre chose nous souhaitons attirer l'attention sur la question de l'addition aux modèles qualitatifs de raisonnement sur l'espace et sur le temps dont nous venons de parler d'un niveau de raisonnement quantitatif numérique ou d'un niveau de raisonnement quantitatif symbolique. Cette question a été attaquée par Condotta [7] qui enrichit les réseaux de contraintes qualitatives entre intervalles ou entre rectangles avec des contraintes quantitatives numériques à la Dechter et ali [9], par Drakengren et Jonsson [10] qui enrichissent les réseaux de contraintes qualitatives entre intervalles avec des contraintes quantitatives numériques à la Koubarakis [15], par Gerevini et Renz [11] qui enrichissent les réseaux de contraintes qualitatives entre régions avec des contraintes quantitatives symboliques à la Cristani [8]. L'examen systématique des conditions de polynomialité du problème de la consistance des réseaux de contraintes hybrides obtenus de la sorte est encore à entreprendre.

Remerciement

Nous remercions Valentin Goranko pour les critiques qu'il a bien voulu formuler sur les versions préliminaires de cet article.

Références

[1] **J. Allen.** *Maintaining knowledge about temporal intervals.* Communications of the ACM **26**, 832–843, 1983.

[2] **P. Balbiani, J.-F. Condotta.** *Spatial reasoning about points in a multidimensional setting.* A paraître.

[3] **P. Balbiani, J.-F. Condotta, L. Fariñas del Cerro.** *A model for reasoning about bidimensional temporal relations.* A. Cohn, L. Schubert, S. Shapiro (éditeurs), Principles of Knowledge Representation and Reasoning : Proceedings of the Sixth International Conference (KR'98), 124–130, Morgan Kaufmann, 1998.

[4] **P. Balbiani, J.-F. Condotta, L. Fariñas del Cerro.** *A new tractable subclass of the rectangle algebra.* IJCAI-99, Proceedings of the Sixteenth International Joint Conference on Artificial Intelligence, 442–447, Morgan Kaufmann, 1999.

[5] **C. Bessiere.** *A simple way to improve path consistency processing in interval algebra networks.* Proceedings of the Thirteenth National Conference on Artificial Intelligence and the Eighth Innovative Applications of Artificial Intelligence Conference, 375–380, AAAI Press/The MIT Press, 1996.

[6] **J. Burgess, Y. Gurevich.** *The decision problem for linear temporal logic.* Notre Dame Journal of Formal Logic **26,** 115–128, 1985.

[7] **J.-F. Condotta.** *The augmented interval and rectangle networks.* F. Giunchiglia, B. Selman (éditeurs), Principles of Knowledge Representation and Reasoning : Proceedings of the Seventh International Conference (KR2000), 571–579, Morgan Kaufmann, 2000.

[8] **M. Cristani.** *The complexity of reasoning about spatial congruence.* Journal of Artificial Intelligence Research **11,** 361–390, 1999.

[9] **R. Dechter, I. Meiri, J. Pearl.** *Temporal constraint networks.* Artificial Intelligence **49,** 61–95, 1991.

[10] **T. Drakengren, P. Jonsson.** *Eight maximal tractable subclasses of Allen's algebra with metric time.* Journal of Artificial Intelligence Research **7,** 25–45, 1997.

[11] **A. Gerevini, J. Renz.** *Combining topological and qualitative size constraints for spatial reasoning.* M. Maher, J.-F. Puget (éditeurs), Principles and Practice of Constraint Programming – CP98, Lecture Notes in Computer Science 1520, 220–234, Springer, 1998.

[12] **R. Goldblatt.** *Logics of Time and Computation.* CSLI Lecture Notes Number 7, Center for the Study of Language and Computation, 1987.

[13] **Y. Gurevich.** *Elementary properties of ordered Abelian groups.* Amer. Math. Soc. Trans. Ser. 2 **46,** 165–192, 1965.

[14] **H. Kamp.** *Tense logic and the theory of linear order.* Thèse de l'université de Californie à Los Angeles, Californie, 1968.

[15] **M. Koubarakis.** *Tractable disjunctions of linear constraints.* E. Freuder (éditeur), Principles and Practice of Constraint Programming – CP'96, Lecture Notes in Computer Science 1118, 297–307, Springer, 1996.

[16] **P. Ladkin.** *Models of axioms for time intervals.* Proceedings of the Sixth National Conference Artificial Intelligence, 234–239, 1987.

[17] **P. Ladkin, R. Maddux.** *On binary constraint networks.* Rapport de l'institut Kestrel, Californie, 1988.

[18] **C. Langford.** *Some theorems on deducibility.* Ann. Math. Ser. 2 **28,** 16–40, 1927.

[19] **H. Läuchli, J. Leonard.** *On the elementary theory of linear order.* Fund. Math. **59,** 109–116, 1966.

[20] **G. Ligozat.** *A new proof of tractability for ORD-Horn relations.* Proceedings of the Thirteenth National Conference on Artificial Intelligence and the Eighth Innovative Applications of Artificial Intelligence Conference, 395–401, AAAI Press/The MIT Press, 1996.

[21] **G. Ligozat.** *Reasoning about cardinal directions.* Journal of Visual Languages and Computing **9,** 23–44, 1998.

[22] **B. Nebel, H.-J. Bürckert.** *Reasoning about temporal relations : a maximal tractable subclass of Allen's interval algebra.* Journal of the ACM **42,** 43–66, 1995.

[23] **K. Nökel.** *Convex relations between time intervals.* Rapport de l'université de Kaiserslautern, Allemagne, 1988.

[24] **H. Ono, A. Nakamura.** *On the size of refutation Kripke models for some linear modal and tense logics.* Studia Logica **39,** 325–333, 1980.

[25] **M. Rabin.** *Decidability of second order theories and automata on infinite trees.* Trans. Am. Math. Soc. **141,** 1–35, 1969.

[26] **D. Randell, Z. Cui, A. Cohn.** *A spatial logic based on regions and connections.* B. Nebel, C. Rich, W. Swartout (éditeurs), Principles of Knowledge Representation and Reasoning : Proceedings of the Third International Conference (KR'92), 165–176, Morgan Kaufmann, 1992.

[27] **M. Reynolds.** *The complexity of the temporal logic with until over general linear time.* A paraître.

[28] **M. Reynolds.** *The complexity of temporal logic over the reals.* A paraître.

[29] **S. Shelah.** *The monadic theory of order.* Ann. of Math. **102,** 379–419, 1975.

[30] **A. Sistla, E. Clarke.** *The complexity of propositional linear temporal logics.* Journal of the ACM **32,** 733–749, 1985.

[31] **P. van Beek.** *Exact and approximate reasoning about qualitative temporal relations.* Thèse de l'université de Waterloo, Ontario, 1990.

[32] **M. Vilain, H. Kautz.** *Constraint propagation algorithms for temporal reasoning.* Proceedings of the Fifth National Conference on Artificial Intelligence, 377–382, 1986.