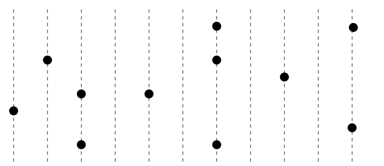
- TD 4 : Triangulations -

- Triangulation d'un ensemble de points -

- Exercice 1 -

Appliquer l'algorithme de triangulation incrémental vu en cours sur l'exemple suivant :



- Exercice 2 -

Montrer que trianguler un ensemble de n du plan doit nécessiter un temps en $\Omega(n \log n)$. Détailler la réduction utilisée.

- Triangulation de Delaunay -

- Exercice 3 -

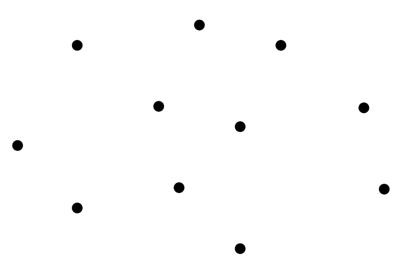
Le but de l'exercice est de savoir si un point P du plan est ou non à l'intérieur du cercle circonscrit à un triangle ABC.

1. Montrer la propriété suivante : si les points A, B et C sont sur un cercle de centre O tel que O et C soient du même côté de la droite (AB), alors $\widehat{AOB} = 2.\widehat{ACB}$.
2. Montrer alors que si D et C sont du même côté de la droite (AB) alors D appartient à l'intérieur du cercle circonscrit au triangle ABC si, et seulement si, $\widehat{ACB} \leq \widehat{ADB}$.
3. En déduire une procédure testant en temps $O(1)$ si un point D appartient ou non à l'intérieur du cercle circonscrit à un triangle ABC.
4. Plus algébriquement, on pourra montrer que la position de D par rapport au cercle circonscrit au triangle ABC dépend du signe du déterminant :

$$\det \begin{pmatrix} x_A & y_A & x_A^2 + y_A^2 & 1 \\ x_B & y_B & x_B^2 + y_B^2 & 1 \\ x_C & y_C & x_C^2 + y_C^2 & 1 \\ x_D & y_D & x_D^2 + y_D^2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Exercice 4 -

Calculer la triangulation de Delaunay et le diagramme de Voronoï de l'ensemble de points suivant :



- Exercice 5 -

Donner un ensemble de 4 points du plan dont la triangulation de Delaunay n'est pas la triangulation qui minimise le plus grand angle.

- Exercice 6 -

L'*arbre couvrant euclidien minimum* (*ACEM*) d'un ensemble P de n points du plan est un arbre connectant tous les points de P et de longueur totale minimum.

1. Montrer que dans la triangulation de Delaunay d'un ensemble de points, chaque point est adjacent à son plus proche voisin.
2. Prouver que le graphe formé par la triangulation de Delaunay de P contient un ACEM de P.
3. En déduire un algorithme en $O(n \log n)$ pour calculer un ACEM de P.

- Diagramme de Voronoï -

- Exercice 7 -

Donner une configuration de n points dont le diagramme de Voronoï contient une cellule à $n-1$ côtés. Quel est le nombre moyen de côtés d'une cellule dans un diagramme de Voronoï ?

- Exercice 8 -

On se donne V le diagramme de Voronoï d'un ensemble P de points, malheureusement, les points de P ont été effacés. Donner un procédé algorithmique pour les retrouver.

- Triangulation de polygones -

- Exercice 9 -

Donner le nombre de triangle dans la triangulation d'un polygone ayant p trous et n sommets (y compris ceux entourant les trous).

- Exercice 10 -

Le *flip* de l'arête pq dans une triangulation $\mathcal{T}$ consiste à transformer les deux triangles pqr et pqs incidents à pq en les triangles prs et qrs, les autre triangles de $\mathcal{T}$ étant inchangés.
Soit P un polygone convexe, montrer que l'on peut passer de toute triangulation de P à une autre à l'aide de flips d'arêtes.

- Exercice 11 -

Donner un exemple de triangulation de polygone dont le graphe dual :

1. est un chemin.
2. n'est pas un chemin.