- TD 5 : Extensions et applications -

- Alpha-shape et Alpha-Complexe -

- Exercice 1 - Calcul du rayon du cercle circonscrit -

Le but de l'exercice est d'obtenir une routine pour calculer le rayon du cercle circonscrit à un triangle. Bien entendu, on ne cherche pas à avoir toujours un résultat entier à cette requête.

a. Montrer (rappeler) que si AB est le diamètre d'un cercle $\mathcal{C}$ et que C est un troisième point de $\mathcal{C}$, alors ABC est rectangle en C.

b. Soit ABC un triangle quelconque. On note a, b et c la valeur des angles du triangle respectivement en les sommets A, B et C. En considérant I la base de la hauteur de ABC issue de C, montrer que $\sin(b) \cdot BC = \sin(a) \cdot AC$. En déduire que $\frac{\sin(a)}{BC} = \frac{\sin(b)}{AC} = \frac{\sin(c)}{AB}$.

c. Montrer que si ABC est un triangle et que P est un point quelconque du plan, alors on peut permuter A, B et C de telle sorte que P et C soient du même coté de la droite (AB).

d. Soit ABC un triangle, $\mathcal{C}$ son cercle circonscrit et O le centre de $\mathcal{C}$. On suppose que O et C sont du même côté de la droite (AB). On note A' le symétrique de B par rapport à O. D'après l'exercice 3 de la fiche de td 4 ('arcs capables'), on sait que les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BA'C}$ sont égaux. En déduire que $2 \cdot OB \cdot \sin(\widehat{BAC}) = BC$.

e. Conclure.

- Exercice 2 - α-shape -

Dans tout l'exercice P désigne un nuage de n points du plan.

a. Si P est fixé, et $\alpha < \min\{pq \;:\; p \in P,\; q \in P,\; p \neq q\}$, où pq désigne la distance de p à q, montrer que l'α-shape de P est vide.

b. Montrer que quelquesoit $\alpha > 0$, il est possible de trouver une configuration de points P telle que l'α-shape de P ne soit pas son enveloppe convexe.

- Diagramme de Voronoï, algorithme de Fortune -

- Exercice 3 -

Dans l'algorithme de S.Fortune :

a. Donner un exemple de déroulement de l'algorithme dans lequel une parabole contient plus d'un arc de parabole de la ligne de plage.

b. Donner un exemple de déroulement de l'algorithme dans lequel une parabole contient un nombre linéaire d'arcs de parabole de la ligne de plage.

c. Donner un exemple de 4 points sur lesquels l'algorithme ne rencontre d'abord que des évènements de site puis que des évènements de cercle.

- Binary Space Partition -

- Exercice 4 - Atelier de découpe -

Donner un exemple d'ensemble d'objets (convexes) du plan tel que n'importe quel BSP coupe au moins l'un d'entre eux.

- Exercice 5 - Taille d'un BSP -

Donner un ensemble $\mathcal{S}$ de n segments du plan pour chaque exemple ci-desous.

a. Il existe une auto-partition de $\mathcal{S}$ conduit à un BSP de taille $\Omega(n^2)$.

b. L'ensemble $\mathcal{S}$ admet un BSP de taille n et chaque auto-partition de $\mathcal{S}$ produit un BSP de taille au moins $\frac{4}{3}n$.

c. Chaque auto-partition de $\mathcal{S}$ produit un BSP de profondeur $\Omega(n)$.

- Exercice 6 - BSP d'un ensemble de disques -

On considère un ensemble $\mathcal{C}$ de n disques du plan disjoints et de même rayon (disons 1). Montrer que $\mathcal{C}$ admet un BSP de taille $O(n)$ (on pourra considérer des coupes verticales portées par les droites d'équation $x = 2i$ pour certaines valeurs de i entières).

- Exercice 7 - BSP et localisation dans une carte planaire -

Proposer un algorithme qui utilise un BSP pour répondre au problème de localisation dans une carte planaire. Analyser la taille des structures de données et les temps de réponse dans le pire des cas.