- Contrôle continu - SUJET A -

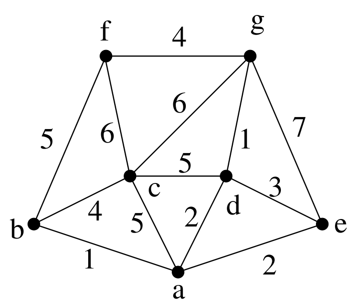
- Durée : 1 heure - Aucun document n'est autorisé -
Novembre 2016

Le barème est indicatif, la note totale sera sur 15 points (même si le barême total fait un petit peu plus...). Les exercices peuvent être traités dans un ordre quelconque. Sauf mention contraire, toutes les réponses doivent être justifiées.

- Exercice 1 - ACPM *(3.5 points)* -

a. *Question de cours.* Rappeler le pseudo-code de l'algorithme de Kruskal vu en cours pour calculer un arbre couvrant de poids minimum (ACPM) d'un graphe connexe muni d'une fonction p de poids sur ses arêtes. Préciser la complexité de l'algorithme.

b. Appliquer cet algorithme sur le graphe suivant pour en calculer un APCM. Préciser rapidement les étapes de calcul.



c. Supposons que pour un graphe G quelconque les arêtes de poids minimum de G forment un sous-graphe couvrant et connexe de G. Proposer un algorithme plus rapide que l'algorithme de Kruskal pour calculer un ACPM de G.

- Exercice 2 - Parcours en profondeur *(3 points)* -

Le graphe R_p a pour sommets l'ensemble $A \cup B$ où $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$ et $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_p\}$ et pour arêtes l'ensemble $\{a_1a_2, a_2a_3, \ldots, a_{p-1}a_p, a_pa_1\} \cup \{b_1b_2, b_2b_3, \ldots, b_{p-1}b_p, b_pb_1\} \cup \{a_1b_1, b_2a_2, \ldots, a_{p-1}b_{p-1}, a_pb_p\}$. Autrement dit, R_p est formé de deux cycles de taille p reliés par un couplage.

a. Dessiner R_5.

b. Le parcours en profondeur de *type 1* a pour racine a_1 et en cas de choix entre plusieurs sommets il choisit prioritairement un sommet de A à un sommet de B. Le parcours en profondeur de *type 2* a aussi a_1 pour racine mais choisit prioritairement un sommet de B à un sommet de A lorsqu'un choix est possible. Effectuer un parcours en profondeur de type 1 et un de type 2 sur le graphe R_5. Vous donnerez les valeurs de `pere`, `debut` et `fin` ainsi que le contenu de la pile AT.

c. Proposer un parcours en profondeur de R_5 dont l'arbre de parcours associé n'est pas un chemin hamiltonien (ne donner que le contenu de la pile AT).

- Exercice 3 - Diamètre *(4 points)* -

Le *diamètre d'un graphe connexe* $G = (V, E)$, noté $\oslash(G)$, est $\max\{dist_G(x, y) \ : \ x, y \in V\}$ où $dist_G(x, y)$ est la distance de x à y dans G, c'est-à-dire la longueur d'un plus court chemin de x à y.

a. Calculer $\oslash(G_{CC})$ où G_{CC} est le graphe donné à l'exercice suivant. Justifier votre calcul.

b. Effectuer un parcours en largeur du graphe G_{CC}. On prendra e pour racine, et on calculera les fonctions `pere`, `ordre` et `niveau` au cours du parcours.

c. Proposer un algorithme pour le calcul de $\oslash(G)$ où G est un graphe connexe quelconque fourni en entrée.

d. Préciser la complexité de votre algorithme.

- Exercice 4 - Algo mystère... *(3 points)* -

On se donne l'algorithme suivant :

Algorithme : ALGO
Données : Un graphe $G = (V, E)$ codé par listes de voisin $Vois(x)$ pour $x \in V$.
Résultat : Un ensemble X de sommets de G.

1 **début**
2 $\quad X \longleftarrow \emptyset$;
3 $\quad$ **pour tous les** $x \in V$ **faire** $c(x) \longleftarrow 0$;
4 $\quad$ **pour tous les** $x \in V$ **faire**
5 $\quad\quad$ **si** $c(x) = 0$ **alors**
6 $\quad\quad\quad c(x) \longleftarrow 1$;
7 $\quad\quad\quad X \longleftarrow X \cup \{x\}$;
8 $\quad\quad\quad$ **pour tous les** $y \in Vois(x)$ **faire** $c(y) \longleftarrow 1$;
9 $\quad\quad$ **fin**
10 $\quad$ **fin**
11 $\quad$ **retourner** X;
12 **fin**

a. Dérouler ALGO sur le graphe G_{CC} suivant en traitant les sommets ligne 4 par ordre alphabétique (indiquer rapidement quelques étapes de calcul).

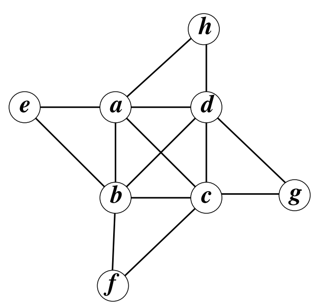


Figure 1 – Le graphe G_{CC}.

b. Quelle est la complexité de ALGO ? On notera n le nombre de sommets de G et m son nombre d'arêtes.

c. Sans preuve, dire quelle propriété possède l'ensemble X.

d. Proposer un ensemble X différent de celui fourni à la question a. et qui pourrait être retourné par ALGO sur le graphe G_{CC}.

- Exercice 5 - Composantes connexes *(2.5 points)* -

Soit G un graphe à n sommets dans lequel tous les sommets ont un degré supérieur ou égal à $n/3$ (c'est-à-dire $\forall x \in V \; deg_G(x) \geq n/3$). Montrer que G possède au plus 2 composantes connexes.