

- TD 1. Connexité. Arbres. -

- Exercice 1 -

Dérouler l'algorithme COMPOSANTES sur le graphe G ayant pour ensemble de sommets $\{1, \dots, 8\}$ et pour ensemble d'arêtes $\{12, 65, 46, 31, 23, 57\}$. On prendra l'ordre de traitement des arêtes suivant : 12, 46, 31, 57, 23, 65

- Exercice 2 -

Représenter les graphes dont les ensembles de sommets V et d'arêtes E sont codés ainsi :

- Grappe de Petersen*. L'ensemble des sommets est l'ensemble des paires d'éléments de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Deux sommets sont reliés si leurs paires respectives sont disjointes.
- Echelle de Möbius*. L'ensemble des sommets est $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Deux sommets i et j sont reliés si on a soit $j - i = 3 \pmod 8$ soit $j - i = 4 \pmod 8$ ou soit $j - i = 5 \pmod 8$.

- Exercice 3 - Graphes k -réguliers.

- Montrer qu'un graphe 1-régulier est un couplage.
- Montrer qu'un graphe 2-régulier est une union disjointe de cycles.
- Construire tous les graphes 3-réguliers à 6 sommets. Les dessiner dans le plan en minimisant les croisements d'arêtes.
- Construire tous les graphes 3-réguliers à 7 sommets.

- Exercice 4 - Nombre d'arêtes.

- Quel est le nombre maximal d'arêtes d'un graphe à n sommets ?
- Quel est le nombre maximal d'arêtes d'un graphe à n sommets et ayant 2 composantes connexes ?
- Quel est le nombre maximal d'arêtes d'un graphe à n sommets et ayant c composantes connexes ?
- Quel est le nombre maximal d'arêtes d'un graphe biparti à n sommets ?

- Exercice 5 -

On note $\delta(G)$ le degré minimum d'un sommet du graphe G . Soit G un graphe tel que $\delta(G) \geq \frac{n-1}{2}$. Montrer que G est connexe. Donner un exemple de graphe non connexe avec $\delta(G) \geq \frac{n-2}{2}$.

- Exercice 6 -

Soit G un graphe et x un sommet de G de degré impair. Montrer qu'il existe un chemin de x vers un autre sommet (donc différent de x ...) de G de degré impair.

- Exercice 7 - Arbres binaires.

Un *arbre binaire enraciné* est un arbre qui possède une racine de degré 2 (ou 0 si l'arbre est réduit à sa racine) et dont les autres sommets sont de degré 3 ou de degré 1 (ces derniers éléments sont les *feuilles* de l'arbre).

- Montrer que le nombre de sommets d'un arbre binaire est impair.
- Calculer, en fonction de n , le nombre de feuilles d'un arbre binaire à n sommets.

Algorithme : FONCTION**Données** : Un graphe $G = (V, E)$.**Résultat** : Un entier.

```

1 début
2   si  $|E| = 0$  alors
3     retourner  $|V|$ ;
4   sinon
5     Choisir un sommet  $v$  de  $G$  de degré au moins 1;
6      $n_1 \leftarrow$  FONCTION( $G \setminus v$ );
7      $n_2 \leftarrow 1 +$  FONCTION( $G \setminus (\{v\} \cup \text{Voisins}(v))$ );
8     retourner  $\max(n_1, n_2)$ ;

```

- Que retourne FONCTION(G) lorsque : G est le stable (graphe sans arêtes), le graphe complet, le chemin, et le cycle, tous sur 5 sommets ?
- Interpréter l'entier FONCTION(G). Justifier soigneusement votre réponse.
- Quelle est la complexité de cet algorithme (dans le pire des cas) ?

- Exercice 11 - En avant !

- Ecrire un algorithme CHEMINMAX(G, x) prenant en entrée un graphe G codé par listes de voisins et un sommet x de G , et retournant une liste $x = x_0, x_1, \dots, x_k$ formant un chemin maximal de G issu de x (i.e. tel que tous les voisins de x_k sont dans $\{x_0, \dots, x_{k-1}\}$).
- Proposer une instance pour laquelle votre algorithme pourrait ne pas retourner un chemin de longueur maximale issu de x .
- Montrer que deux chemins de longueur maximale dans un graphe connexe G ont au moins un sommet en commun.

- Exercice 12 - Connexité.

Montrer que :

- Un graphe dont tous les sommets sont de degré au moins 2 contient un cycle.
- Un graphe sur n sommets ayant au moins n arêtes contient un cycle.
- Un graphe connexe sur n sommets possède au moins $n - 1$ arêtes.
- Si G est un graphe connexe, il existe au moins un sommet x tel que le graphe obtenu en supprimant x est connexe.

- Exercice 13 -

Calculer le nombre d'arbres distincts sur l'ensemble de sommets $\{1, 2, \dots, n\}$, pour $n = 1, \dots, 5$. Proposer une formule générale.

- Exercice 14 - Codage de Prüfer.

Soit A un arbre avec racine sur un ensemble $X \subseteq \{1, \dots, n\}$. On associe à A une liste $L(A)$ d'éléments de X de la manière suivante :

- si A est réduit à sa racine, $L(A)$ est vide.

- sinon, on trie dans l'ordre croissant les feuilles f_1, \dots, f_k de A et on forme la liste $L' := N(f_1), \dots, N(f_k)$ où $N(f_i)$ est le voisin de f_i . En notant A' l'arbre obtenu en supprimant les feuilles de A , on pose $L(A) = L'.L(A')$ où $.$ est la concaténation.

- Calculer $L(A)$ lorsque A est l'arbre sur $\{1, \dots, 9\}$ de racine 8, et dont les arêtes sont $\{48, 38, 14, 24, 64, 93, 51, 71\}$.

- b. Quel arbre A sur $\{1, \dots, 9\}$ est codé par $9, 9, 1, 9, 9, 7, 2, 7$?
- c. Combien y a-t-il de suites possibles codant les arbres avec racine de $\{1, \dots, n\}$?
- d. En déduire que K_n possède n^{n-2} arbres couvrants.

- Exercice 15 -

Soit G le graphe sur $\{1, 2, 3, 4\}$ dont les arêtes sont $\{12, 13, 14, 23, 34\}$.

- a. Ecrire la matrice d'adjacence A_G de G .
- b. On note $D = (d_{i,j})$ la matrice 4×4 diagonale vérifiant que $d_{i,i}$ est le degré de i dans G . Ecrire la matrice $M := A_G - D$.
- c. Enlever une ligne et une colonne quelconque à M , et calculer le déterminant de la matrice 3×3 ainsi obtenue.
- d. Compter le nombre d'arbres couvrants de G .
- e. Le Théorème de Kirchhoff affirme que pour tout graphe, les deux résultats calculés précédemment sont égaux au signe près. Appliquer ce théorème afin de retrouver que K_n possède n^{n-2} arbres couvrants.

- Exercice 16 - Propriété de Helly.

Soit \mathcal{T} un ensemble de sous-arbres d'un arbre T . Montrer que si les arbres de \mathcal{T} s'intersectent deux à deux, alors il existe un sommet x appartenant à tous les arbres de \mathcal{T} .

- Exercice 17 - Grandes manœuvres.

Le nouveau président de l'Université a décidé de délocaliser certains cours de licence à Palavas, lieu plus propice à la concentration. Sachant qu'un cours peut être proposé dans plusieurs licences et qu'on ne veut pas de licence bi-localisée (i.e. sur Montpellier et Palavas), proposer un modèle et un algorithme à utiliser. Bien entendu, la solution 'tout le monde à Palavas' n'est pas acceptable si on peut l'éviter.