- TD 2. Arbres de poids minimum -

- Exercice 1 - Hypercube.

Soit d un entier positif non nul. L'hypercube Q_d est le graphe dont l'ensemble des sommets est l'ensemble des d -uplets $(x_1, \dots, x_d)$ de 0 et de 1, deux d -uplets étant adjacents s'ils diffèrent sur une seule entrée.

- Dessiner Q_d , pour $d = 1$ puis pour $d = 2$, $d = 3$ et enfin $d = 4$.
- Pour d quelconque, déterminer le nombre de sommets et d'arêtes de Q_d .
- On considère la fonction de poids p définie sur les arêtes de Q_d qui vérifie $p(e) = i$ lorsque i est l'indice de la coordonnée qui diffère entre les extrémités de e . Déterminer un arbre couvrant de poids minimum de Q_3 .

- Exercice 2 - Voyageur de commerce.

On se donne un ensemble de villes $V = \{v_1, \dots, v_8\}$ ainsi que les distances $d(v_i, v_j)$ séparant ces villes données par la matrice (symétrique) suivante :

$$(d(v_i, v_j)) = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 5 & 11 & 9 & 7 & 9 & 10 \\ . & 0 & 8 & 6 & 7 & 11 & 11 & 12 \\ . & . & 0 & 5 & 4 & 10 & 12 & 10 \\ . & . & . & 0 & 7 & 5 & 12 & 9 \\ . & . & . & . & 0 & 7 & 12 & 10 \\ . & . & . & . & . & 0 & 11 & 11 \\ . & . & . & . & . & . & 0 & 8 \\ . & . & . & . & . & . & . & 0 \end{pmatrix}$$

À un ensemble E d'arêtes sur V , on associe $d(E)$, la *distance totale* de E , définie comme la somme des distances des arêtes de E .

- Construire un arbre couvrant T sur V minimisant $d(T)$.
- On s'intéresse au problème du voyageur de commerce sur cet ensemble de ville. Donner une tournée associée à l'arbre T dans la 2-approximation du problème vue en cours.
- Proposer une meilleure tournée. Quelle borne inférieure pouvez vous proposer pour la longueur de la tournée optimale ?

- Exercice 3 - Unicité.

Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe et $\omega : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction de poids sur les arêtes. On se donne deux arbres couvrants distincts $T = (V, A)$ et $T' = (V, A')$ de poids minimum $\omega(A) = \omega(A')$. On suppose que e est une arête de poids minimum parmi les arêtes de $A \Delta A' := (A \setminus A') \cup (A' \setminus A)$, disons, par exemple que $e \in (A \setminus A')$.

- Montrer qu'il existe une arête $e' \in (A' \setminus A)$ telle que $\omega(e') = \omega(e)$.
- En déduire que si la fonction ω est injective (i.e. toutes les arêtes ont des poids différents), alors il existe un unique arbre couvrant de poids minimum.

- Exercice 4 - Vrai/Faux.

Confirmer (et prouver) ou infirmer (et donner un contre-exemple) les propriétés suivantes :

- a. L'algorithme suivant fournit un arbre couvrant de poids minimum d'un graphe connexe G :
 - Pour tout sommet x de G , noter e_x une arête de poids minimum ayant x pour extrémité.
 - Retourner l'ensemble des arêtes obtenues, en supprimant possiblement les doublons.
- b. Si e est une arête de poids minimal d'un graphe connexe G , alors e appartient à un arbre couvrant de poids minimal de G .
- c. Si e_1, e_2 et e_3 sont les trois arêtes de poids minimaux d'un graphe connexe G , alors e_1, e_2 et e_3 appartiennent à tous les arbres couvrants de poids minimal de G .
- d. Pour le problème du voyageur de commerce, l'algorithme suivant fournit une tournée optimale :
 - Trouver v_1, v_2 et v_3 les 3 villes les plus proches parmi les n villes.
 - La tournée $v_1, \dots, v_k$ étant construite, trouver la ville v , parmi les villes restantes, qui minimise $l(v_i v) + l(v v_{i+1}) - l(v_i v_{i+1})$ pour $i = 1, \dots, k$ (en comptant les indices modulo k).
 - En notant i_0 l'indice donnant ce minimum, construire la tournée $v_1, \dots, v_{i_0}, v, v_{i_0+1}, \dots, v_k$.

- Exercice 5 -

Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe et $\omega : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction de poids. Une *coupe* est une partition de V en deux sous-ensembles $(X, V \setminus X)$. Une arête $e \in E$ *traverse* la coupe $(X, V \setminus X)$ lorsque l'une des extrémités de e se trouve dans X et l'autre dans $V \setminus X$.

- a. Illustration : dans Q_3 , quelles sont les arêtes qui traversent la coupe $\{X, V \setminus X\}$, où X est l'ensemble des triples dont la première coordonnée est 0.
- b. Soit $T = (V, A)$ un arbre couvrant de poids minimum de G . Montrer que pour toute coupe C et toute arête $e \in E$ traversant C , il existe $a \in A$ traversant C telle que $\omega(a) \leq \omega(e)$.
- c. Prouver la réciproque, c'est à dire que si l'ensemble A des arêtes d'un arbre T vérifie la propriété ci-dessus, alors T est de poids minimum.

- Exercice 6 - Algorithme de Prim.

Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe et $\omega : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction de poids. On suppose que G est codé par listes de voisins : à chaque sommet v de G est associée la pile $Vois(v)$ des voisins de v . L'ensemble des sommets de V est $\{x_1, \dots, x_n\}$.

- a. L'algorithme de Prim, renvoyant un arbre couvrant de poids minimum de G , est le suivant :
 - Initialiser A à vide et poser $Atteint = \{x_1\}$.
 - Tant que $Atteint \neq V$, choisir une arête $x_a x_b$ avec $x_a \in Atteint, x_b \in V \setminus Atteint$ et de poids minimal pour cela.
 - Mettre à jour : ajouter $x_a x_b$ à A et ajouter x_b à $Atteint$.
 - Retourner A .
 Tester cet algorithme sur le graphe $Q_3 \setminus \{111\}$, pondéré comme dans l'exercice 1.
- b. Ecrire en détail cet algorithme.
- c. Comparer sa complexité avec celle de l'algorithme de Kruskal.
- d. Prouver sa correction (c-à-d, qu'il renvoie bien un arbre couvrant de poids minimum de G).

- Exercice 7 - MI6.

Un ensemble de n espions peuvent communiquer entre-eux. Pour chaque paire d'espions, on connaît la probabilité qu'un message échangé entre eux deux soit intercepté (toutes ces probabilités sont supposées indépendantes). Un des espions veut communiquer un message important à l'ensemble de ses collègues. Comment doit-il faire pour minimiser la probabilité d'interception ?