# - TD 3. Parcours -

### - Exercice 1 - Promenade dans le Petersen.

On note $G$ le graphe obtenu en supprimant une arête $ab$ du graphe de Petersen. Effectuer un parcours en largeur et un parcours en profondeur du graphe $G$ en partant du sommet $a$ (pour le parcours en profondeur, en proposer un dont l'arbre associé n'est pas un chemin). Pour chaque parcours, on précisera l'arbre associé et pour chaque sommet $v$, on donnera :

a. L'ordre et le niveau de $v$ pour le parcours en largeur.

b. Les dates de début et de fin, $d[v]$ et $f[v]$, pour le parcours en profondeur, ainsi que la liste des intervalles de prsence dans la pile.

### - Exercice 2 - Pile.

On a effectué un parcours en profondeur dans un graphe et la suite des opérations empiler (e) et dépiler (d) sur la pile $AT$ a été : eeedeededddeeededdddd. Quel est l'arbre associé ?

### - Exercice 3 - Labyrinthe.

Un labyrinthe est constitué d'un ensemble de salles reliées par des couloirs. Il possède deux salles particulières : la salle de départ et la salle contenant la porte de sortie.

a. *Question préliminaire :* écrire un algorithme MARCHE-EXHAUSTIVE$(G, r)$ qui, prenant en entrée un graphe connexe $G$ et un sommet $r$, retourne une marche pour laquelle chaque arête du graphe est parcourue dans les deux sens une seule fois. Pour cela, on pourra utiliser et compléter un des pseudo-codes de la fiche d'algo.

b. Pour sortir d'un labyrinthe, on adopte la stratégie (c-à-d l'ordre de découverte) donnée par un parcours en largeur. Pour $k$ quelconque, proposer un labyrinthe avec $k$ couloirs pour lequel la stratégie adoptée oblige à traverser $\Omega(k^2)$ couloirs.

c. Cela peut-il arriver avec un parcours en profondeur ? Justifier.

### - Exercice 4 - Orientation fortement connexe.

Un graphe orienté $D = (V, A)$ est *fortement connexe* si pour tout $x, y \in V$, il existe un chemin orienté de $x$ à $y$. Dans un graphe connexe non orienté $G$, un *pont* est une arête $e$ de $G$ telle que $G - e$ n'est pas connexe.

a. Proposer une orientation fortement connexe du cube.

b. Montrer que si un graphe non orienté $G$ admet une orientation fortement connexe, alors $G$ est connexe et sans pont.

c. Inversement, montrer que si $G$ est connexe et sans pont, il admet une orientation fortement connexe. On pourra utiliser un arbre en profondeur de $G$.

### - Exercice 5 - Vrai/Faux.

Confirmer (et prouver) ou infirmer (et donner un contre-exemple) les propriétés suivantes :

a. Tous les arbres sont bipartis.

b. Si un arbre $T$ est différent d'un chemin alors tout ordre de parcours en largeur de $T$ depuis une racine $r$ est différent de l'ordre de début d'un parcours en profondeur de $T$ depuis $r$.

c. Il est possible d'écrire une version du parcours en profondeur en une fonction de 5 lignes et un appel principal de 2 lignes. On ne fournira que la fonction *père* et on n'écrira qu'une instruction par ligne (!).

### - Exercice 6 - Arêtes séparatrices.

Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe, une arête $e$ de $G$ telle que $G - e$ n'est pas connexe est dite *arête séparatrice* (ou *pont*) de $G$.

a. Montrer qu'un arbre couvrant de $G$ contient toutes les arêtes séparatrices de $G$.

b. Proposer un algorithme qui calcule toutes les arêtes séparatrices de $G$.

c. Essayer de trouver un tel algorithme avec un temps d'exécution en $O(m)$, où $m$ est le nombre d'arêtes de $G$. Pour cela, on effectuera un parcours en profondeur de $G$ dans lequel on calculera la fonction $bas[v]$, égale au minimum de $début[v]$ et de $début[w]$ pour toutes les arêtes $uw$ avec $u$ descendant de $v$ et $w$ ancêtre de $v$.

### - Exercice 7 - Sommets séparateurs.

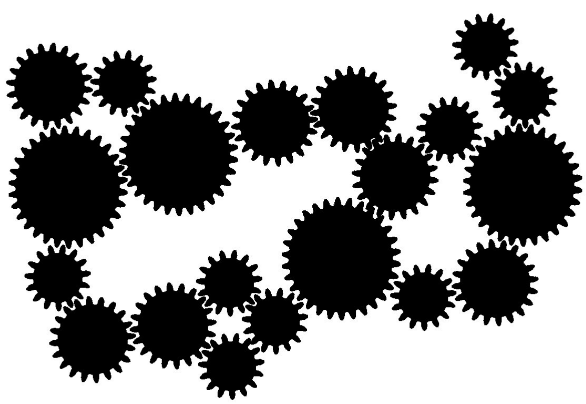
Soit $G$ un graphe connexe. Un sommet $v$ est *séparateur* si $G \setminus v$ n'est pas connexe. Soit $r$ un sommet de $G$ et $T$ un arbre en profondeur de $G$ de racine $r$.

a. Montrer que $r$ est un sommet séparateur si et seulement si il possède au moins deux fils dans $T$.

b. Montrer qu'un sommet $x \neq r$ est séparateur si et seulement si $x$ possède un fils dont aucun descendant n'a pour voisin dans $G$ un ancêtre strict de $x$.

c. Ecrire un algorithme $SEPARATEURS(G)$ qui retourne l'ensemble des sommets séparateurs de $G$ et prend un temps $O(m)$.

### - Exercice 8 - Engrenages.



Ça tourne ?
Proposer un modèle et un algorithme pour résoudre le cas général.