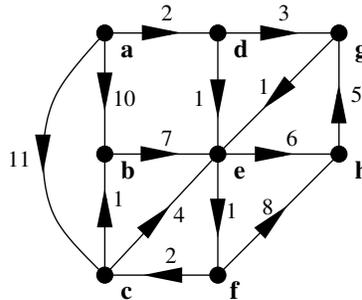


- TD 5. Plus courts chemins -

- Exercice 1 -

On considère le graphe orienté et pondéré suivant :



1. Utiliser l'algo de Dijkstra pour calculer une arborescence des plus courts chemins issue de a .
2. La longueur de l'arc ge est en fait -8. Refaire la question précédente. Que constatez vous ?
3. Utiliser cette fois l'algorithme de Bellman-Ford pour trouver une arborescence des plus courts chemins issue de a . On traitera les arcs selon l'ordre alphabétique.
4. Une seconde modification a lieu, la longueur de l'arc fh est maintenant de 1 (la longueur de ge est toujours -8). Relancer l'algorithme de Bellman-Ford. Que constatez vous ?

- Exercice 2 - PCC pour DAG.

On considère l'algorithme suivant :

Algorithme : ALGO

Données : Un graphe orienté acyclique $D = (V, E)$ donné par listes de voisins entrants,
 $l : E \rightarrow \mathbb{R}$ et r un sommet de D .

Résultat : Deux fonctions : $d : V \rightarrow \mathbb{R}$ et $pere : V \rightarrow V$.

```

1 début
2   Calculer un tri topologique  $v_1, \dots, v_n$  de  $D$ ;
3   pour tous les  $x \in V$  faire
4      $d[x] \leftarrow +\infty$ ;
5      $pere[x] \leftarrow x$ ;
6    $d[r] \leftarrow 0$ ;
7   pour tous les  $i = 1, \dots, n$  faire
8     pour tous les  $y \in Vois^-(v_i)$  faire
9       si  $d[y] + l(yv_i) < d[v_i]$  alors
10         $d[v_i] \leftarrow d[y] + l(yv_i)$ ;
11         $pere[v_i] \leftarrow y$ ;

```

1. Appliquer l'algorithme précédent sur le graphe $D = (V, A)$ où $V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, A est donné ci-dessous avec les longueurs associées et $r = a$.

	ab	ac	be	bf	bg	cb	ce	cf	dc	eg
$l(\cdot)$	-3	5	1	4	5	2	1	1	6	6

2. Que calcule ALGO ?
3. Préciser la complexité de cet algorithme.
4. Prouver la validité de ALGO.

- Exercice 3 - Cycles orientés de poids négatif.

Soit $D = (V, A)$ un graphe orienté et $\omega : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de poids.

- a. Appliquer l'algorithme de Floyd-Warshall au graphe orienté D ayant pour ensemble de sommets $V = \{a, b, c, d\}$, d'arcs $A = \{ba, ac, cd, cb, bd\}$ et fonction de poids $\omega(ba) = -1$, $\omega(ac) = 3$, $\omega(cd) = 1$, $\omega(cb) = 8$, $\omega(bd) = -8$. Vous donnerez les plus courts chemins et leur longueur.
- b. Même question que précédemment mais après avoir inversé la direction de l'arc bd (qui devient donc db), tout en conservant son poids.
- c. Comment peut-on détecter la présence d'un cycle orienté de poids négatif après l'exécution de Floyd-Warshall ?

- Exercice 4 - Vrai/Faux.

Confirmer (et prouver) ou infirmer (et donner un contre-exemple) les propriétés suivantes :

- a. Un sous-chemin d'un plus court chemin est un plus court chemin.
- b. Si r est un sommet d'un graphe orienté D pondéré par des longueurs positives toutes distinctes, alors D possède une unique arborescence des plus courts chemins issue de r .
- c. Dans tout graphe G non orienté, connexe et valué positivement sur ses arêtes, il existe un arbre des plus courts chemins de G qui est aussi un arbre couvrant de poids min de G de même racine.
- d. Si un graphe orienté et valué sur ses arêtes possède certaines longueurs négatives, pour calculer un arbre des plus courts chemins, il suffit d'ajouter $-\min\{l(xy) : xy \in E\}$ sur chaque arête puis d'utiliser l'algorithme de Dijkstra.
- e. Pour tout graphe G non orienté, connexe et valué sur ses arêtes, et pour tout sommet r de G , il existe un arbre des plus courts chemins issu de r .

- Exercice 5 - Coupes.

Soient x et y deux sommets d'un graphe orienté $D = (V, A)$ tel qu'il existe un chemin orienté de x à y . Un ensemble $C \subseteq A$ est une xy -coupe si tous les chemins de x à y contiennent un arc de C

- a. Montrer que si C est une xy -coupe, il existe un ensemble X de sommets tel que C contient tous les arcs de X à $V \setminus X$.
- b. Montrer que le nombre maximum de xy -coupes disjointes est égal à la longueur minimum d'un xy -chemin.

- Exercice 6 - Arbitrage.

L'*arbitrage* est l'utilisation du décalage entre les taux de change d'une monnaie pour transformer une unité de monnaie en plus d'une unité de la même monnaie. Par exemple, si $1\text{€} = 1,51\ \$\text{ U.S.}$, $1\ \$\text{ U.S.} = 0,62\ \text{£}$ et $1\ \text{£} = 1,11\text{€}$, un spéculateur peut, avec un euro, acheter $1,51 \times 0,62 \times 1,11 = 1,039$ euros.

Comment devenir riche ? Et avec quelle complexité ?