Exam Math du Web 2014.

Exercice 3.

1) Directement avec $At_{ij} = |N^-(i) \cap N^-(j)|$

$$At = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2) . On cherche les vp de At : $\det(At - \lambda Id) = (1-\lambda)(-\lambda) \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$

$= (1-\lambda)(-\lambda)((2-\lambda)^2 - 1) = (1-\lambda)^2(-\lambda)(3-\lambda)$.

la + gde vp est 3, sa $\vec{vp}$ associé est : $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$

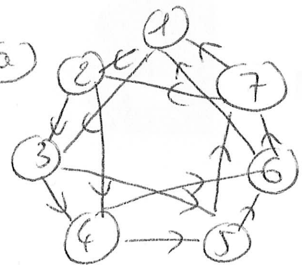
$At \cdot X = 3 \cdot X \Leftrightarrow \begin{cases} c = d = 0 \\ 2a + b = 3a \\ a + 2b = 3b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = d = 0 \\ a = b \end{cases}$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}.$$

Exercice 4 -

1) a)

D_7:

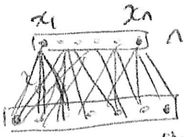


D_7 est fortement connexe. Tous les sommets sont équivalents (le graphe est globalement stable par rotation). Si on supprime un sommet quelconque (1 par exemple) le graphe restant reste fortement connexe donc $K(D_7) \geq 2$.

Par contre si on supprime 1 et 2, le graphe restant n'est plus fortement connexe car 7 n'a plus de voisins sortants. Donc $K(D_7) < 3$ finalement $\boxed{K(D_7) = 2}$

b) .

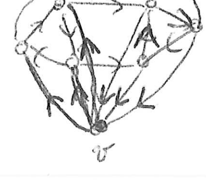
$K_{n,m}$



Lorsque l'on supprime des sommets, si il reste au moins un sommet en haut et un sommet en bas, le graphe reste fortement connexe. Pour déconnecter $K_{n,m}$ il supprimer au moins toute une partie. Comme $\min(n,m) = n$, on a $K(K_{n,m}) \geq n$. Si on élève la partie à n sommet le graphe n'est effectivement plus fortement connexe donc $\boxed{K(K_{n,m}) = n}$

2) Soit x un sommet de degré sortant $\delta^+(D)$. Si on supprime tous les voisins sortant de x (ensemble de taille $\delta^+(D)$), le graphe restant n'est plus fortement connexe car x n'a plus de voisin sortant. Donc, $\boxed{K(\ldots}$

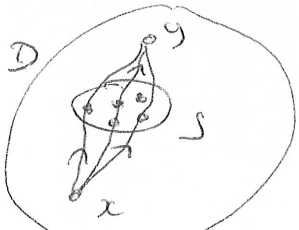
3)



tous les sommets vérifient $d^+ \geq 2$ donc $\delta^+(D) \geq 2$.

Mais si on supprime v le graphe n'est plus fortement conn donc $K(D) = 1$ Ainsi $\boxed{K(D) \leq \delta^+(D)}$

(4). Par définition de $K(D)$, D n'est pas $K(D)+1$-fortement connexe, donc il existe une partie S des sommets de D de taille $K(D)$ telle que $D \setminus S$ n'est plus fortement connexe. Ce qui signifie qu'il existe x et y dans $D \setminus S$ tels qu'il n'y a pas de chemin orienté de x à y dans $D \setminus S$.



Si on considère ~~une~~ un ensemble maximum de chemins orientés intérieurement disjoint de x à y, S intersecte tous ces chemins. Comme ces chemins sont intérieurement disjoint, un sommet de S appartient à au plus un de ces chemins donc $\boxed{\lambda(x,y) \leq |S| = K(D)}$.

(5). Lorsqu'il y a beaucoup de clients (ou noeuds machines) sur le réseau logique, celui tend vers le modèle sous-jacent et donc a une connectivité orientée importante (en supposant que le graphe modèle ait une connectivité importante). Ainsi même en cas de défaillance de nombreuses machines le réseau logique restera fortement connexe.