- Examen de Mathématiques du Web -

- Durée : 2 heures -

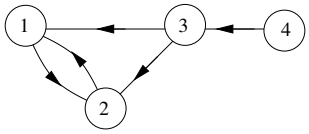
Aucun document autorisé, barême indicatif.
Veuillez rédiger les deux parties sur des feuilles séparées *à l'intérieur de votre copie.*
Toutes vos réponses doivent être soignées et, sauf mention contraire, justifiées.

- Partie de P. Azerad -

- Partie de S. Bessy -

- Exercice 1 - Hits - *(4 points)*

Au cours de cet exercice, on considère le graphe G suivant, extrait du graphe du Web.



Une recherche utilisant l'algorithme de Hits est lancée.

1. Calculer la matrice 'authority' de G.
2. Calculer le score 'authority' pour la requête effectuée. On donnera ce score sous forme d'un vecteur normé dont les coordonnées sont les scores des pages impliquées.

- Exercice 2 - Connectivité orientée - *(6 points)*

On rapelle qu'un graphe orienté $D = (V, A)$ est *fortement connexe* si quelques soient les sommets x et y de D, il existe un chemin orienté de x à y. On rappelle aussi que D est *k-fortement connexe* si pour toute partie $S \subset V$ de taille strictement inférieure à k, $D \setminus S$ est fortement connexe. La *connectivité* (orientée) de D est alors $\kappa(D) = \max\{k \ : \ D \text{ est } k\text{-fortement connexe}\}$.

1. Calculer la connectivité orientée des graphes suivant, en justifiant vos calculs :
   (a) Le graphe $D_7 : V(D_7) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ et ij est un arc de D_7 si $j - i = 1$ [7] ou $j - i = 2$ [7].
   (b) Le biparti complet double orienté à $n + m$ éléments : $V(K_{n,m}) = \{x_1, \dots x_n\} \cup \{y_1, \dots y_m\}$ et $A(K_{n,m}) = \{x_i y_j, y_j x_i \ : \ 1 \leq i \leq n; \ 1 \leq j \leq m\}$ (on supposera $n \leq m$).
2. On note $\delta^+(D) = \min\{d^+(x) \ : \ x \in V\}$. Justifier que $\kappa(D) \leq \delta^+(D)$.
3. Donner un exemple de graphe D fortement connexe avec $\kappa(D) < \delta^+(D)$.
4. Dans un graphe orienté D, deux chemins orientés de x à y sont dits *intérieurement disjoints* si leurs seuls sommets en commun sont x et y. On note alors $\lambda(x, y)$ le nombre maximal de chemins deux-à-deux intérieurement disjoints de x à y. Montrer qu'il existe un couple de sommets (x, y) de D avec $\lambda(x, y) \leq \kappa(D)$.
5. Expliquer pourquoi il est intéressant d'avoir une connectivité orientée importante sur le réseau logique d'une table de hachage distribuée.