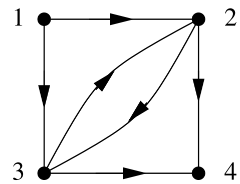
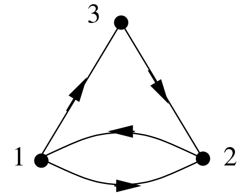
Maths du Web, GLMA605 Année 2013-2014
TD 2.
L3 Maths, L3 Math-Info.

- TD2 : Moteur de recherche HITS -

- HITS -

- Exercice 1 - Vecteurs de hub et authority -
Calculer les vecteurs de hub et d'authority des graphes suivants :

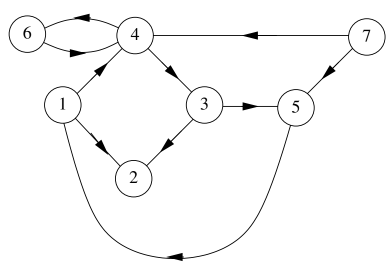
1. 

2. 

3. Le graphe biparti complet équilibré orienté d'une partition à l'autre : $V(K_{n,n}) = \{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n\}$ et $A(K_{n,n}) = \{x_i y_j \ : \ 1 \leq i, j \leq n\}$.

4. Le circuit dominé par un sommet : $V(C_n^\star) = \{x, x_1, \ldots, x_n\}$ et $A(C_n^\star) = \{x_i x_{i+1} \ : \ i = 1, \ldots, n-1\} \cup \{x_n x_1\} \cup \{x x_i \ : \ i = 1, \ldots, n\}$.

- Exercice 2 -
Au cours de cet exercice, on considère la portion suivante du graphe du Web.



Une recherche utilisant l'algorithme de Hits est lancée. Elle concerne des termes contenus dans les pages 1 et 3 seulement.

1. Préciser le graphe utilisé pour la recherche. On note G ce graphe.
2. Il est rappelé que si A désigne la matrice d'adjacence de G, la matrice 'authority' de G est ${}^tA.A$.
Rappeler l'interprétation graphique des cœfficients de la matrice 'authority' et calculer cette matrice pour le graphe G.
3. Calculer le score 'authority' pour la requête effectuée. On donnera ce score sous forme d'un vecteur x normalisé pour la norme 1.

4. Prouver que $A.x$ est alors un vecteur de score 'hub' correspond à la requête effectuée.
5. En déduire, en un seul calcul vectoriel, le score 'hub' de la requête sous forme d'un vecteur normalisé pour la norme 1.

- Théorème de Perron-Frœbinius -

- Exercice 3 - Primitivité d'un graphe orienté -

Un graphe orienté est dit *primitif* si il existe un entier $d > 1$ tel que chaque cycle orienté de D ait une longueur divisible par d.

1. Quelques rappels d'arithmétique :
   (a) Rappeler la preuve du lemme de Bezout : $\gcd(a,b) = 1 \iff \exists u, v \in \mathbb{Z} \,:\, au+bv = 1$ (utilisez une récurrence et la division euclidienne).
   (b) En déduire l'équivalence : $\gcd(a,b) = 1 \iff \exists n_0 \; \forall n \geq n_0 \; \exists u', v' \in \mathbb{N} \,:\, au' + bv' = n$ (on pourra choisir $n_0 = -b^2 v$ où v est donné par le lemme de Bezout et supposé négatif).
2. En admettant la généralisation du résultat précédent à plusieurs entiers (pour $a_1, \ldots, a_k$, $\gcd(a_i) = 1 \iff \exists n_0 \; \forall n \geq n_0 \; \exists u_1, \ldots, u_k \in \mathbb{N} \,:\, a_1u_1 + \cdots + a_ku_k = n$), montrer qu'un digraphe D f.c. est imprimitif si, et seulement si, pour tout couple de sommets (x, y), il existe un entier l_0 tel que pour tout entier $l \geq l_0$ il existe une marche de x à y de longueur l.
3. Une *k-coloration cyclique* d'un graphe orienté f.c. est une coloration $c : V(D) \to \{1, \ldots, k\}$ telle que pour tout arc xy de D, $c(y) - c(x) = 1$ ou $c(x) = k$ et $c(y) = 1$.
   (a) Comment s'organisent les classes de couleurs d'une coloration cyclique.
   (b) Monter que D, f.c. est primitif si, et seulement si, D admet une k-coloration cyclique pour un entier $k \geq 2$.
   (c) Proposer un algorithme linéaire pour tester si un graphe orienté f.c. admet une k-coloration cyclique pour un entier $k \geq 2$ fixé.
   (d) En déduire un algorithme quadratique pour tester la primitivité d'un graphe orienté. Proposez en un linéaire.
4. Le *produit catégorique* de deux digraphes H et G est le graphe $H \times G$ de sommets $V(H) \times V(G)$ et d'arcs $\{(x_H, x_G)(y_H, y_G) \,:\, x_Hy_H \in E(H) \; x_Gy_G \in E(G)\}$.
   (a) Représenter $C_2 \times C_3$ et $C_3 \times C_3$.
   (b) Prouver que G est imprimitif si, et seulement si, $G \times G$ est fortement connexe.