- TD 3 : Modèles pair-à-pair -

- Connectivité orienté -

- Exercice 1 -

Calculer la connectivité orientés des graphes suivants :

1. Le tournoi rotatif à 5 éléments : $V(R_5) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $ij \in E(R_5)$ si $j - i = 1$ [5] ou $j - i = 2$ [5].
2. Le tournoi de Paley à 7 éléments : $V(P_7) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ et $ij \in E(P_7)$ si $j - i = 1, 2$ ou 4 [7].
3. Le biparti complet double orienté à $n+m$ éléments : $V(K_{n,m}) = \{x_1, \dots, x_n\} \cup \{y_1, \dots, y_m\}$ et $E(K_{n,m}) = \{x_i y_j, y_j x_i : 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ (on supposera $n \leq m$).

- Exercice 2 - Théorème de Menger (1927) -

Soient $D = (V, E)$ un graphe orienté et x et y deux sommets distincts de D . On note $s(x, y)$ le nombre minimal d'arcs qu'il faut enlever à D pour qu'il n'existe plus de chemin de x à y . On note aussi $\lambda(x, y)$ le nombre maximal de chemins arc-disjoints de x à y . Le but de l'exercice est de prouver le Théorème de Menger qui affirme que $s(x, y) = \lambda(x, y)$.

1. Montrer que $\lambda(x, y) \leq s(x, y)$.
2. Soit $P_1, \dots, P_k$ un ensemble de k chemins arc-disjoints de x à y dans D . On note P_i^* le chemin obtenu en inversant le sens de chaque arc du chemin P_i , et D^* le graphe orienté obtenu en inversant le sens de chaque arc des chemins $P_1, \dots, P_k$.
 - (a) Montrer que, pour $k = 1$, si il existe un chemin Q de x à y dans D^* , alors il existe deux chemins arc-disjoints de x à y dans D (considérer la différence symétrique des arcs de P_1^* et de Q et montrer que dans cette différence symétrique, chaque sommet z vérifie $d^+(z) = d^-(z) = 1$ ou 2).
 - (b) Généraliser le résultat précédent pour k quelconque.
3. On considère un ensemble $P_1, \dots, P_k$ de k chemins arc-disjoints de x à y avec k maximum.
 - (a) Montrer que D^* ne contient pas de chemin de x à y .
 - (b) On note X l'ensemble des sommets de D^* atteignable par un chemin depuis x . Montrer que, dans D , il sort exactement k arcs de X .
 - (c) En déduire que $s(x, y) \leq k$ puis que $\lambda(x, y) = s(x, y)$.
4. Déduire de la preuve précédente un algorithme en $O(nm)$ qui calcule un ensemble maximum de chemins arc-disjoints de x à y .
5. (version sommet) On construit le graphe D' à partir de D auquel on applique la transformation suivante :
pour chaque sommet v , différent de x et y , on note $u_1, \dots, u_e$ les voisins entrants de v et $w_1, \dots, w_s$ ses voisins sortants ; on remplace alors v par deux sommets v^- et v^+ reliés par un arc de v^- à v^+ et on ajoute les arcs $u_i v^-$ pour $1 \leq i \leq e$ et $v^+ w_j$ pour $1 \leq j \leq s$.
En appliquant les résultats précédents sur D' , proposer une 'version sommet' du Théorème de Menger pour D .

6. (version sommet globale) Montrer que D est k -fortement connexe si, et seulement si, D a au moins $k + 1$ sommets et pour tout couple de sommets (x, y) de D , il existe k chemins sommet-disjoints (sauf en leurs extrémités) de x à y .

- Modèles pour les DHT -

- Exercice 3 - Graphe de Cayley -

Le graphe C_d est le graphe de Cayley dont les sommets sont $\mathbb{Z}/(2^d - 1)\mathbb{Z}$ et les arcs sont $\{i(i+k) : k = 2^j \text{ pour } j = 0, \dots, d-1\}$.

1. Construire C_2 , C_3 et C_4 .
2. Calculer $\Delta^+(C_d)$.
3. Donner un algorithme de routage 'rapide' dans C_d qui route selon des plus courts chemins.
4. En déduire le diamètre orienté de C_d .

- Exercice 4 - Graphe de De Bruijn -

Le graphe de De Bruijn d'ordre l, k , noté $DB_{(l,k)}$, est le graphe dont l'ensemble de sommets est $V(DB_{(l,k)}) = \{0, \dots, l-1\}^k$, et dans lequel les sommets $(a_1, \dots, a_k)$ et $(b_1, \dots, b_k)$ sont reliés si $b_i = a_{i+1}$ pour $i = 1, \dots, k-1$.

1. Construire $DB(2, 2)$, $DB(3, 2)$ et $DB(2, 3)$.
2. Calculer $\Delta^+(DB_{(l,k)})$ (sans tenir compte des boucles).
3. Donner un algorithme de routage dans $DB_{(l,k)}$. En déduire $\text{diam}(DB_{(l,k)})$.
4. Si ce n'était pas le cas, proposer un algorithme de routage qui utilise des plus courts chemins.
5. Calcul de $\kappa(DB_{(l,k)})$:
 - (a) Construire $l-1$ chemins disjoints de $(0, \dots, 0)$ à $(1, \dots, 1)$.
 - (b) Construire $l-1$ chemins disjoints de x à y , où x et y sont deux sommets quelconques de $DB_{(l,k)}$.
 - (c) Conclure.