

- Contrôle continu de programmation linéaire -

- Sujet A -

Durée : 1h30

Tous documents interdits.

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque. Le barème est indicatif.

Toutes vos réponses doivent être soignées et, sauf mention contraire, justifiées.

- Exercice 1 - Médicaments - (6 points)

Une entreprise pharmaceutique fabrique trois types de médicaments : des euphorisants, des analgésiques et des somnifères, dont les bénéfices de production escomptés sont respectivement de 25, 60 et 30 milliers d'euros par kilo. Pour fabriquer chacun de ces médicaments, trois matières premières sont utilisées : morphine, caféïne et aspirine. Les quantités nécessaires de ces produits pour fabriquer un kilo de médicaments sont résumées dans le tableau suivant :

	euphorisant	analgésique	somnifère
Morphine	2	4	4
Caféïne	1	2	0
Aspirine	2	5	4

Par ailleurs les quantités de morphine, caféïne et aspirine sont limitées par leur production à respectivement 20, 6 et 14 unités par jour.

Le but de l'exercice est de planifier les quantités de médicaments à produire afin de maximiser le bénéfice quotidien.

- Modéliser le problème sous forme d'un programme linéaire.
- Résoudre celui-ci avec l'algorithme du simplexe (utiliser les règles de Bland).
- Justifier l'optimalité de la solution obtenue.

- Exercice 2 - Entrepôts - (4 points)

Une société possède deux entrepôts ainsi que deux boutiques de vente. Les entrepôts stockent respectivement 500 et 800 cartons. Le but est d'acheminer ces cartons aux boutiques à moindre coûts. Le coût d'acheminement des entrepôts aux boutiques est donné par le tableau suivant :

	Boutique 1	Boutique 2
Entrepôt 1	20	15
Entrepôt 2	10	30

On a, de plus, les contraintes suivantes. La boutique 1 peut accueillir au plus 700 cartons et doit en recevoir au moins 600, ce qui correspond aux ventes prévisionnelles. La boutique 2, quant à elle, n'a pas de réserve et doit recevoir exactement ce qu'elle a prévu de vendre, c'est-à-dire 550 cartons.

- a. Écrire le problème sous forme d'un programme linéaire (P).
- b. Écrire (P) sous forme canonique (sans chercher à le résoudre).

- Exercice 3 - Résolution graphique - (4 points)

On considère (P) le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{llll} \text{Maximiser} & x_1 & +x_2 & \\ \text{Sous} & x_1 & -x_2 & \leq 2 \\ & -x_1 & +3x_2 & \leq 3 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

- 1. Résoudre (P) graphiquement.
- 2. Résoudre (P) avec la contrainte supplémentaire : on veut x_1 et x_2 entiers.

- Exercice 4 - Dualité - (6 points)

On considère (P) le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{llll} \text{Maximiser} & -4x_1 & -3x_2 & \\ \text{Sous} & -x_1 & +x_2 & \leq -1 \\ & -x_1 & -x_2 & \leq -3 \\ & x_1 & +2x_2 & \leq 2 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

- 1. Résoudre (P) par le simplexe en deux phases (en cas de choix, utiliser la règle de Bland). Justifier votre solution.
- 2. Écrire (D) le programme dual de (P).
- 3. Que peut on attendre comme solution pour (D) ?
- 4. Écrire (D) sous forme canonique.
- 5. Résoudre (D) par la méthode du simplexe (faire entrer la variable de plus grand indice en cas de choix).