

- Examen du 20 mai 2009. -

- Durée 2h. Seul document autorisé : Une feuille manuscrite recto/verso. Pas de calculatrices. -

- Une large part de la notation prendra en compte la clarté de la rédaction et la rigueur des justifications. -

- Exercice 1 - Extrait de Fiche TD1 Licence Info Paris 6

Une personne soucieuse de sa forme physique souhaite absorber chaque jour 36 unités de Vitamine A, 28 unités de Vitamine C et 32 unités de Vitamine D. Deux marques sont susceptibles de fournir ces apports. La marque 1 coûte 3 euros et procure 2 unités de Vitamine A, 2 unités de Vitamine C et 8 unités de Vitamine D. La marque 2 coûte 4 euros et procure 3 unités de Vitamine A, 2 unités de Vitamine C et 2 unités de Vitamine D.

Il s'agit de trouver la combinaison respectant les exigences d'absorption quotidienne au moindre coût.

- Enoncer ce problème sous forme d'un programme linéaire (P).
- Ecrire le dual (D) de (P).
- Résoudre (D) par la méthode du simplexe.
- Déduire une solution de (P) à partir du dictionnaire final de (D).
- Certifier l'optimalité de la solution de (P) à l'aide de combinaisons de contraintes.
- Résoudre (P) graphiquement.

- Exercice 2 - Résoudre le programme linéaire suivant avec l'algorithme du simplexe en deux phases. Certifier l'optimalité de la solution trouvée.

$$\begin{array}{llll}
 \text{Maximiser} & 3x_1 & +x_2 & \\
 \text{Sous} & x_1 & -x_2 & \leq -1 \\
 & -x_1 & -x_2 & \leq -3 \\
 & 2x_1 & +x_2 & \leq 4 \\
 & x_1, & x_2 & \geq 0
 \end{array}$$

- Exercice 3 -

Montrer que le programme linéaire suivant admet comme solution optimale $x_1 = \frac{1}{5}$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = \frac{7}{5}$.

$$\begin{array}{rccccrc}
 \text{Maximiser} & x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & & \\
 \text{Sous} & 3x_1 & +6x_2 & +3x_3 & +x_4 & \leq & 2 \\
 & 2x_1 & +3x_2 & +3x_3 & +x_4 & \leq & 4 \\
 & x_1 & +2x_2 & +5x_3 & +2x_4 & \leq & 3 \\
 & 4x_1 & +3x_2 & +4x_3 & +x_4 & \leq & 5 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq & 0
 \end{array}$$

- Exercice 4 -

On considère deux centrales électriques, chacune de capacité de production 800 megawatt. Ces centrales desservent trois villes dont les besoins en électricité sont respectivement de 700, 400 et 500 megawatt. Chaque centrale peut fournir tout ou partie de sa production à chacune des villes.

Les coûts d'acheminement (par megawatt) dans le réseau électrique sont donnés par le tableau suivant :

	Centrale 1	Centrale 2
Ville 1	20	25
Ville 2	15	10
Ville 3	10	15

Le problème est de subvenir aux besoins des villes à moindre coût.

- Modéliser sous forme d'un programme linéaire.
- Proposer une solution de ce problème "à la main".
- (Hors barème) Montrer l'optimalité de votre solution en proposant un certificat dual.