

- Examen du 30 avril 2008. -

- Durée 2h. Pas de documents. -

- Une large part de la notation prendra en compte la clarté de la rédaction et la rigueur des justifications. -

- Exercice 1 -

On se donne le programme linéaire (P) suivant :

$$\begin{array}{rccccrc}
 \text{Maximiser} & 3x_1 & -2x_2 & +2x_3 & -x_4 & & & \\
 \text{Sous} & 4x_1 & -x_2 & +2x_3 & -x_4 & \leq & -2 & \\
 & -x_1 & -x_2 & -x_3 & & \leq & -2 & \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq & 0 &
 \end{array}$$

- Résoudre (P) avec l'algorithme du simplexe en deux phases.
- Ecrire le dual (D) du programme (P). Donner une solution de (D).
- Résoudre (D) géométriquement.

- Exercice 2 - Un cambrioleur disposant d'un sac à dos d'une capacité de 60 litres est confronté au douloureux problème de sélectionner des objets à dérober parmi sept disponibles. Les volumes (en litres) et prix respectifs à la revente des différents objets sont donnés par le tableau suivant :

	objet 1	objet 2	objet 3	objet 4	objet 5	objet 6	objet 7
volume	20	16	7	10	42	4	12
prix	11	9	5	6	25	2	7

- Résoudre le problème "à la main".
- Modéliser le problème sous forme d'un programme linéaire en nombres entiers.
- Résoudre la relaxation linéaire de ce problème en utilisant un algorithme glouton.

- Exercice 3 - On considère deux centrales électriques dont les capacités de production respectives sont de 700 et 400 megawatt. Ces centrales desservent deux villes dont les besoins en électricité sont respectivement de 500 et 600 megawatt. Chaque centrale peut fournir tout ou partie de sa production à chacune des villes.

Les coûts d'acheminement (par megawatt) dans le réseau électrique sont donnés par le tableau suivant :

	Ville 1	Ville 2
Centrale 1	20	25
Centrale 2	15	10

- a. Le problème est de subvenir aux besoins des villes à moindre coût. Modéliser sous forme d'un programme linéaire. (On ne cherchera pas à résoudre le problème.)
- b. En plus du réseau électrique existe un relais, reliés aux centrales et aux villes et permettant de collecter une partie de la production des centrales et de la répartir entre les villes. Ce relais a une capacité maximale de 500 megawatt et les coûts d'acheminement (par megawatt) entre les différents sites et le relais sont donnés par le tableau suivant :

	Ville 1	Ville 2	Centrale 1	Centrale 2
Relais	9	8	10	12

Modéliser le problème avec ce relais en plus sous forme d'un programme linéaire. (On ne cherchera pas à résoudre le problème.)

- **Exercice 4** - L'algorithme du simplexe manipule des dictionnaires de la forme :

$$\begin{array}{r}
 x_3 = 2 + x_4 - x_2 + 5/2x_5 \\
 x_1 = 3 - 2/3x_2 - 1/3x_5 \\
 \hline
 z = 4 - x_4 - 2x_2 + 3x_5
 \end{array}$$

Ils sont représentés par un tableau de rationnels dico[m + 1][n + 1], où m est le nombre de contraintes et n le nombre de variables. Dans l'exemple proposé, l'entrée dico[0][3]=5/2 et dico[2][0]=4.

- a. Ecrire un algorithme pivotentrant qui admet en entrée dico[m + 1][n + 1] et retourne le numéro de colonne (entre 1 et n) d'une variable entrante, ou -1 si le dictionnaire n'admet pas de variable entrante.
- b. Ecrire un algorithme pivotsortant qui admet en entrée dico[m + 1][n + 1] et le numéro de colonne j d'une variable entrante et retourne le numéro de ligne, entre 0 et m - 1, de la variable sortante, ou -1 si le dictionnaire n'admet pas de variable sortante.