- Examen de programmation linéaire -

Mai 2012
Durée : 2h00

Tous documents interdits.
Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque. Le barême est indicatif.
Toutes vos réponses doivent être soignées et, sauf mention contraire, justifiées.

- Exercice 1 - Arnaque au tri - *(6 points)* **-**

Le but de cet exercice est de modifier les entrées d'un tableau T afin que le nouveau tableau obtenu T' soit trié par ordre croissant. Par exemple lorsque $T = [3, 1, 2, 5]$, on peut augmenter de 2 la deuxième valeur et augmenter de 1 la troisième valeur, pour obtenir $T'_1 = [3, 3, 3, 5]$. On peut aussi diminuer de 3/2 la premième valeur et augmenter de 1/2 la deuxième valeur pour obtenir $T'_2 = [1.5, 1.5, 2, 5]$. Le but est que la somme totale des modifications soit la plus petite possible, ainsi passer de T à T'_1 coûte 3 (augmentation de 2 et de 1) alors que passer de T à T'_2 coûte 2 (augmentation de 1/2 et diminution de 3/2).

a. Calculer une solution optimale T'_1 lorsque $T_1 = [2, 1, 4, 3]$ et une solution optimale T'_2 lorsque $T_2 = [4, 3, 2, 1]$. Justifier rapidement vos solutions.
b. Modéliser ce problème par un programme (P) en supposant que T possède cinq entrées $[a_1, a_2, a_3, a_4, a_5]$. Dans un premier temps votre fonction objectif pourra utiliser des valeurs absolues. Essayer de limiter le nombre de contraintes.
c. Modifier (P) pour en faire un programme linéaire, i.e. sans valeurs absolues dans la fonction objectif.
d. L'algorithme du simplexe appliqué au programme linéaire (P) associé au tableau $[3, 1, 2, 5, 6]$ peut-il retourner la solution optimale $[1.5, 1.5, 2, 5, 6]$? Justifier.

- Exercice 2 - Problème d'affectation - *(6 points)* **-**

Un bureau d'étude doit affecter certains de ses ingénieurs sur des projets. Suivant les compétences de chacun et les projets concernés, le tableau suivant donne le bénéfice escompté de chaque affectation :

GAIN	projet 1	projet 2	projet 3
ingénieur 1	3	6	4
ingénieur 2	6	4	5
ingénieur 3	6	5	4

a. Résoudre le problème 'à la main'.
b. Modéliser le problème sous forme d'un programme linéaire sous forme canonique (P).

c. Le dictionnaire final obtenu lors de la résolution de (P) est :

$$\begin{array}{rcccccccccc}
x_{12} = & 1 & -1\,i_1 & -1\,x_{11} & -1\,x_{13} & -0\,i_2 & -0\,p_2 & -0\,x_{21} & -0\,p_1 & -0\,x_{22} & -0\,i_3 \\
x_{23} = & 1 & -0\,i_1 & -0\,x_{11} & -0\,x_{13} & -1\,i_2 & -0\,p_2 & -1\,x_{21} & -0\,p_1 & -1\,x_{22} & -0\,i_3 \\
x_{33} = & 0 & -1\,i_1 & -0\,x_{11} & -1\,x_{13} & -0\,i_2 & +1\,p_2 & +1\,x_{21} & +1\,p_1 & +1\,x_{22} & -1\,i_3 \\
x_{31} = & 1 & -0\,i_1 & -1\,x_{11} & -0\,x_{13} & -0\,i_2 & -0\,p_2 & -1\,x_{21} & -1\,p_1 & -0\,x_{22} & -0\,i_3 \\
x_{32} = & 0 & +1\,i_1 & +1\,x_{11} & +1\,x_{13} & -0\,i_2 & -1\,p_2 & -0\,x_{21} & -0\,p_1 & -1\,x_{22} & -0\,i_3 \\
p_3 = & 0 & +1\,i_1 & -0\,x_{11} & -0\,x_{13} & +1\,i_2 & -1\,p_2 & -0\,x_{21} & -1\,p_1 & -0\,x_{22} & +1\,i_3 \\
\hline
z = & 17 & -5\,i_1 & -4\,x_{11} & -1\,x_{13} & -5\,i_2 & -1\,p_2 & -1\,x_{21} & -2\,p_1 & -2\,x_{22} & -4\,i_3
\end{array}$$

En déduire une solution optimale pour (P).

d. Écrire (D), le dual de (P).

e. En imaginant que l'on associe à chaque ingénieur et chaque projet une valeur, donner une interprétation du dual.

f. À l'aide du dictionnaire final de (P), donner une solution de (D).

- Exercice 3 - Modélisation - *(8 points)* **-**

Une boulangerie industrielle produit du pain, de la brioche et des croissants. Pour cela, elle utilise du beurre, de la farine et de la levure, dont les quantités sont précisées ci-dessous :

	Farine	Beurre	Levure
Pain	2	0	2
Brioche	2	2	3
Croissant	4	6	6

Les quantités de farine, beurre et levure journalières sont respectivement de 22, 20 et 34 unités. Enfin, les bénéfices journaliers de la vente d'une unité de pain, brioche et croissant sont respectivement de 30, 40 et 40 euros.
On souhaite établir un planning de production maximisant le bénéfice.

a. Traduire le problème sous la forme d'un programme linéaire (P).
b. Résoudre (P) par la méthode du simplexe (appliquer les règles de Bland).
c. Écrire (D) le dual de (P).
d. Déduire une solution de (D) à partir du dictionnaire final de (P).
e. Interpréter cette solution en termes de combinaisons de contraintes pour justifier la solution de (P).
f. Il est possible de vendre une partie du stock de farine à 17 euros l'unité. Est-ce intéressant ? Justifier votre réponse.
g. Combien d'unités de farine faut-il vendre pour avoir un bénéfice maximal ? Justifier.