Cours n°5

VIII | Problèmes d'initialisation

Exemple : (PL) $\max \; x_1 - x_2 + x_3$

$$\text{sous} \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 \leq -5 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 \leq -1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Dico initial : (D_0)

$$\begin{aligned} x_4 &= 4 - 2x_1 + x_2 - 2x_3 \\ x_5 &= -5 - 2x_1 + 3x_2 - x_3 \\ x_6 &= -1 + x_1 - x_2 + 2x_3 \\ \hline z &= \quad x_1 - x_2 + x_3 \end{aligned}$$

Si on annule les variables non-basiques, on n'a pas une solution admissible ($x_5 < 0$ et $x_6 < 0$). On dit que le dictionnaire est <u>non-faisable</u>.

On cherche à savoir si :

- soit le problème n'a pas solution car le domaine est vide
- soit on peut trouver une solution admissible à partir de laquelle on peut décaler classiquement le simplexe.

Pour cela, on introduit le programme auxiliaire suivant :

$$\text{Max } -x_0 \quad (\text{i.e. } \min x_0)$$

$$(PL') \quad \text{sous} \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_0 \leq 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_0 \leq -5 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 - x_0 \leq -1 \\ x_1, x_2, x_3, x_0 \geq 0. \end{cases}$$

(PL') a des solutions admissibles : en prenant par exemple $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ et x_0 assez grand : $x_0 = 5$ par exemple.

Si (PL') a 0 comme valeur optimale alors on aura une solution admissible pour (PL), sinon (PL) est vide.

On a le dico initial suivant:

$$(D_0')\quad \begin{array}{l} x_4 = 4 - 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_0 \\ x_5 = -5 - 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_0 \\ x_6 = -1 + x_1 - x_2 + 2x_3 + x_0 \\ \hline w = \qquad\qquad\qquad\qquad - x_0 \end{array}$$

Problème: (D_0') est aussi non-faisable ! On s'autorise alors un pivot illégal:

- On choisit x_0 comme variable entrante
- On choisit comme variable sortante celle ayant la variable la plus petite : $x_4 \to 4$, $x_5 \to -5$, $x_6 \to -1$ | on choisit x_5.

$$(D_1')\quad \begin{array}{l} x_4 = 9 \qquad\qquad - 2x_2 - x_3 + x_5 \\ x_0 = 5 + 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_5 \\ x_6 = 4 + 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_5 \\ \hline w = -5 - 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_5 \end{array}$$

le choix du pivot illégal implique que ce dico est faisable. Tout va bien, on peut continuer, le but étant de faire revenir x_0 comme variable non-basique.

Ici x_2 entre et x_6 sort

$$(D_2')\quad \begin{array}{l} x_4 = 7 - \frac{3}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_6 - \frac{5}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_5 \\ x_0 = 2 - \frac{1}{4}x_1 + \frac{3}{4}x_6 - \frac{5}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_5 \\ x_2 = 1 + \frac{3}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_6 + \frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{6}x_5 \\ \hline w = -2 + \frac{1}{4}x_1 - \frac{3}{4}x_6 + \frac{5}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_5 \end{array}$$

Enfin x_3 entre et x_0 sort. (Si x_1 entre, c'est x_4 qui sort...)

$$(D_3')\quad \begin{aligned} x_4 &= 3 - x_1 - x_6 + 2x_0 \\ x_3 &= \frac{8}{5} - \frac{1}{5}x_1 + \frac{3}{5}x_6 - \frac{4}{5}x_0 + \frac{1}{5}x_5 \\ x_2 &= \frac{11}{5} + \frac{3}{5}x_1 + \frac{1}{6}x_6 - \frac{3}{5}x_0 + \frac{2}{5}x_5 \\ \hline w &= \qquad\qquad -x_0 \end{aligned}$$

On a fini, w ne peut plus $\nearrow$.

La solution associée est:

$$x_6 = 0,\ x_1 = 0,\ x_2 = \frac{11}{5},\ x_3 = \frac{8}{5},\ x_4 = 3,\ x_5 = 0,\ x_0 = 0.$$

Comme la valeur optimale de (PL') est 0, (PL) admet une solution admissible: $(0, \frac{11}{5}, \frac{8}{5})$.

De plus, on a un dictionnaire initial pour (PL): On annule x_0 dans (D_3').

$$(D_0)\quad \begin{aligned} x_4 &= 3 - x_1 - x_6 \\ x_3 &= \frac{8}{5} - \frac{1}{5}x_1 + \frac{3}{5}x_6 + \frac{1}{5}x_5 \\ x_2 &= \frac{11}{5} + \frac{3}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_6 + \frac{2}{5}x_5 \\ \hline z &= -\frac{3}{5} + \frac{1}{5}x_1 + \frac{2}{5}x_6 - \frac{1}{5}x_5 \end{aligned}$$

(on a calculé z en fonction des variables non basiques:

$$z = x_1 - x_2 + x_3 = x_1 - \left(\frac{11}{5} + \frac{3}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_6 + \frac{2}{5}x_5\right) + \left(\frac{8}{5} - \frac{1}{5}x_1 + \frac{3}{5}x_6 + \frac{1}{5}x_5\right)\Bigg).$$

$\Rightarrow$ (D_0) est faisable, il suffit d'appliquer le simplexe pour finir.

Etude de cas n°5: Jeux Matriciels

ⓐ <u>le jeu papier-ciseaux-caillou.</u>

Un joueur Ligne, un joueur Colonne

Chaque joueur choisit un objet et le dévoile à son adversaire

- papier gagne contre caillou
- caillou ———————— ciseaux
- ciseaux ———————— papier.

Matriciellement, on note le gain du joueur colonne :

$$\begin{array}{c|ccc} & \text{caillou} & \text{papier} & \text{ciseaux} \\ \hline \text{caillou} & & & \\ \text{papier} & & & \\ \text{ciseaux} & & & \end{array} \qquad \begin{array}{r} \text{caillou} \\ \text{papier} \\ \text{ciseaux} \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si on veut une stratégie basée sur le hasard (dit <u>stratégie mixte</u>), on choisit caillou avec proba $\frac{1}{3}$, papier avec proba $\frac{1}{3}$ et ciseaux avec proba $\frac{1}{3}$.

(b) <u>le jeu pcc modifié</u>.

On change les règles:

| papier gagne contre caillou rapporte 2 points.
| caillou ———— ciseaux ———— 1 point.
| ciseaux ———— papier ———— 3 points.

On veut aussi une stratégie mixte,
on joue caillou avec proba x_1, papier avec proba x_2 et ciseau avec proba x_3.

↘ Matrice.

$$\begin{array}{r} \\ \text{cail} \\ \text{pap} \\ \text{cis} \end{array} \begin{array}{c} \text{cail} \quad \text{pap} \quad \text{cis} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ainsi, si l'adversaire joue par exemple caillou, l'espérance de gain est
$2x_2 - x_3$.

La stratégie qu'on choisit ici est celle qui consiste à maximiser l'espérance des gains dans le cas où l'adversaire (le joueur ligne) joue le meilleur coût pour lui, c'est-à-dire celui qui donne le gain minimum pour le joueur Colonne.

Ainsi, on veut trouver x_1, x_2, x_3 réalisant :

$$\max_{x_1,x_2,x_3} \left(\min \{ 2x_2 - x_3 \, ; \, -2x_1 + 3x_3 \, ; \, x_1 - 3x_2 \} \right).$$

Si on note x_4 le min, on veut résoudre alors le PL suivant :

$$\max \; x_4$$
$$\text{s.c.} \begin{cases} 2x_2 - x_3 \geq x_4 \\ -2x_1 + 3x_3 \geq x_4 \\ x_1 - 3x_2 \geq x_4 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1, x_2, x_3 \quad \geq 0 \end{cases}$$

On obtient comme résultat : $x_1 = \frac{1}{6}$, $x_2 = \frac{1}{3}$, $x_3 = \frac{1}{2}$, $x_4 = 0$.

Rq : - le gain espéré est 0, normal le joueur colonne peut jouer avec la même stratégie.

- le coup a priori le plus rentable (papier) n'est pas le plus fréquent...