Le problème du régime alimentaire de l'étude de cas numéro 1 conduit au programme sous forme canonique suivant:

Le programme primal (P) est :

$$
\begin{array}{rrrrrcr}
\text{Maximiser} & -4x_1 & -5x_2 & -2x_3 & -3x_4 & & \\
\text{Sous} & -x_1 & -x_2 & -2x_3 & -x_4 & \leq & -10 \\
 & -2x_1 & -3x_2 & +0x_3 & -x_4 & \leq & -15 \\
 & 0x_1 & -x_2 & -x_3 & -x_4 & \leq & -6 \\
 & x_1 & +0x_2 & +0x_3 & +0x_4 & \leq & 4 \\
 & 0x_1 & +0x_2 & +0x_3 & +x_4 & \leq & 5 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq & 0
\end{array}
$$

Le programme (P) ne contient pas l'origine. On va donc effectuer deux phases de l'algorithme du simplexe.

********** Début de la première phase. ***************

Le dictionnaire initial de la première phase est :

$$
\begin{array}{rcrrrrrr}
x_5 & = & -10 & +x_1 & +x_2 & +2x_3 & +x_4 & +x_0 \\
x_6 & = & -15 & +2x_1 & +3x_2 & +0x_3 & +x_4 & +x_0 \\
x_7 & = & -6 & +0x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_0 \\
x_8 & = & 4 & -x_1 & +0x_2 & +0x_3 & +0x_4 & +x_0 \\
x_9 & = & 5 & +0x_1 & +0x_2 & +0x_3 & -x_4 & +x_0 \\
\hline
w & = & 0 & +0x_1 & +0x_2 & +0x_3 & +0x_4 & -x_0
\end{array}
$$

On effectue le premier pivot illegal.

La variable entrante est x_0. La variable sortante est x_6.

$$
\begin{array}{rcrrrrrr}
x_5 & = & 5 & -x_1 & -2x_2 & +2x_3 & +0x_4 & +x_6 \\
x_0 & = & 15 & -2x_1 & -3x_2 & +0x_3 & -x_4 & +x_6 \\
x_7 & = & 9 & -2x_1 & -2x_2 & +x_3 & +0x_4 & +x_6 \\
x_8 & = & 19 & -3x_1 & -3x_2 & +0x_3 & -x_4 & +x_6 \\
x_9 & = & 20 & -2x_1 & -3x_2 & +0x_3 & -2x_4 & +x_6 \\
\hline
w & = & -15 & +2x_1 & +3x_2 & +0x_3 & +x_4 & -x_6
\end{array}
$$

La variable entrante est x_1. La variable sortante est x_7.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
x_5 & = & \frac{1}{2} & +\frac{1}{2}x_7 & -x_2 & +\frac{3}{2}x_3 & +0x_4 & +\frac{1}{2}x_6 \\
x_0 & = & 6 & +x_7 & -x_2 & -x_3 & -x_4 & +0x_6 \\
x_1 & = & \frac{9}{2} & -\frac{1}{2}x_7 & -x_2 & +\frac{1}{2}x_3 & +0x_4 & +\frac{1}{2}x_6 \\
x_8 & = & \frac{11}{2} & +\frac{3}{2}x_7 & +0x_2 & -\frac{3}{2}x_3 & -x_4 & -\frac{1}{2}x_6 \\
x_9 & = & 11 & +x_7 & -x_2 & -x_3 & -2x_4 & +0x_6 \\
\hline
w & = & -6 & -x_7 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +0x_6
\end{array}
$$

La variable entrante est x_2. La variable sortante est x_5.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
x_2 & = & \frac{1}{2} & +\frac{1}{2}x_7 & -x_5 & +\frac{3}{2}x_3 & +0x_4 & +\frac{1}{2}x_6 \\
x_0 & = & \frac{11}{2} & +\frac{1}{2}x_7 & +x_5 & -\frac{5}{2}x_3 & -x_4 & -\frac{1}{2}x_6 \\
x_1 & = & 4 & -x_7 & +x_5 & -x_3 & +0x_4 & +0x_6 \\
x_8 & = & \frac{11}{2} & +\frac{3}{2}x_7 & +0x_5 & -\frac{3}{2}x_3 & -x_4 & -\frac{1}{2}x_6 \\
x_9 & = & \frac{21}{2} & +\frac{1}{2}x_7 & +x_5 & -\frac{5}{2}x_3 & -2x_4 & -\frac{1}{2}x_6 \\
\hline
w & = & -\frac{11}{2} & -\frac{1}{2}x_7 & -x_5 & +\frac{5}{2}x_3 & +x_4 & +\frac{1}{2}x_6
\end{array}
$$

La variable entrante est x_3. La variable sortante est x_0.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
x_2 & = & \frac{19}{5} & +\frac{4}{5}x_7 & -\frac{2}{5}x_5 & -\frac{3}{5}x_0 & -\frac{3}{5}x_4 & +\frac{1}{5}x_6 \\
x_3 & = & \frac{11}{5} & +\frac{1}{5}x_7 & +\frac{2}{5}x_5 & -\frac{2}{5}x_0 & -\frac{2}{5}x_4 & -\frac{1}{5}x_6 \\
x_1 & = & \frac{9}{5} & -\frac{6}{5}x_7 & +\frac{3}{5}x_5 & +\frac{2}{5}x_0 & +\frac{2}{5}x_4 & +\frac{1}{5}x_6 \\
x_8 & = & \frac{11}{5} & +\frac{6}{5}x_7 & -\frac{3}{5}x_5 & +\frac{3}{5}x_0 & -\frac{2}{5}x_4 & -\frac{1}{5}x_6 \\
x_9 & = & 5 & +0x_7 & +0x_5 & +x_0 & -x_4 & +0x_6 \\
\hline
w & = & 0 & +0x_7 & +0x_5 & -x_0 & +0x_4 & +0x_6
\end{array}
$$

La valeur de la première phase du simplexe est 0. Le programme (P) admet donc des solutions.

********** Début de la deuxième phase. ***************

Le dictionnaire initial est :

$$
\begin{array}{rcrrrrr}
x_2 & = & \frac{19}{5} & +\frac{4}{5}x_7 & -\frac{2}{5}x_5 & -\frac{3}{5}x_4 & +\frac{1}{5}x_6 \\
x_3 & = & \frac{11}{5} & +\frac{1}{5}x_7 & +\frac{2}{5}x_5 & -\frac{2}{5}x_4 & -\frac{1}{5}x_6 \\
x_1 & = & \frac{9}{5} & -\frac{6}{5}x_7 & +\frac{3}{5}x_5 & +\frac{2}{5}x_4 & +\frac{1}{5}x_6 \\
x_8 & = & \frac{11}{5} & +\frac{6}{5}x_7 & -\frac{3}{5}x_5 & -\frac{2}{5}x_4 & -\frac{1}{5}x_6 \\
x_9 & = & 5 & +0x_7 & +0x_5 & -x_4 & +0x_6 \\
\hline
z & = & -\frac{153}{5} & +\frac{2}{5}x_7 & -\frac{6}{5}x_5 & -\frac{4}{5}x_4 & -\frac{7}{5}x_6
\end{array}
$$

La variable entrante est x_7. La variable sortante est x_1.

$$
\begin{array}{rcrrrrr}
x_2 & = & 5 & -\frac{2}{3}x_1 & +0x_5 & -\frac{1}{3}x_4 & +\frac{1}{3}x_6 \\
x_3 & = & \frac{5}{2} & -\frac{1}{6}x_1 & +\frac{1}{2}x_5 & -\frac{1}{3}x_4 & -\frac{1}{6}x_6 \\
x_7 & = & \frac{3}{2} & -\frac{5}{6}x_1 & +\frac{1}{2}x_5 & +\frac{1}{3}x_4 & +\frac{1}{6}x_6 \\
x_8 & = & 4 & -x_1 & +0x_5 & +0x_4 & +0x_6 \\
x_9 & = & 5 & +0x_1 & +0x_5 & -x_4 & +0x_6 \\
\hline
z & = & -30 & -\frac{1}{3}x_1 & -x_5 & -\frac{2}{3}x_4 & -\frac{4}{3}x_6
\end{array}
$$

Une solution optimale de (P) est : $x_1 = 0$, $x_2 = 5$, $x_3 = \frac{5}{2}$, $x_4 = 0$,
La valeur de la fonction objectif en cette solution est : -30.
Le nombre de pivots effectués est : 1

La solution au problème du régime alimentaire est donc de manger 5 oeufs et 2 baguettes et demi. L'apport energétique est de 30.

Cette solution est optimale. On peut le **certifier** en faisant la somme de la première contrainte et de la deuxième contrainte elle-même multipliée par un coefficient 4/3. L'inégalité obtenue majore la fonction objectif, ce qui montre que cette dernière est bornée supérieurement par -30.