Le problème de l'entreprise de transport peut, on l'a vu, être modélisé par le programme linéaire suivant, sous forme canonique.

Le programme primal (P) est :

$$
\begin{array}{rrrrrrrrcr}
\text{Maximiser} & -x_1 & -x_2 & -x_3 & -x_4 & -x_5 & -x_6 & -x_7 & & \\
\text{Sous} & -x_1 & -x_2 & -x_3 & -x_4 & -x_5 & +0x_6 & +0x_7 & \leq & -13 \\
 & -x_1 & -x_2 & -x_3 & -x_4 & +0x_5 & +0x_6 & -x_7 & \leq & -18 \\
 & -x_1 & -x_2 & -x_3 & +0x_4 & +0x_5 & -x_6 & -x_7 & \leq & -21 \\
 & -x_1 & -x_2 & +0x_3 & +0x_4 & -x_5 & -x_6 & -x_7 & \leq & -16 \\
 & -x_1 & +0x_2 & +0x_3 & -x_4 & -x_5 & -x_6 & -x_7 & \leq & -12 \\
 & 0x_1 & +0x_2 & -x_3 & -x_4 & -x_5 & -x_6 & -x_7 & \leq & -25 \\
 & 0x_1 & -x_2 & -x_3 & -x_4 & -x_5 & -x_6 & +0x_7 & \leq & -9 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6, & x_7 & \geq & 0
\end{array}
$$

Le programme (P) ne contient pas l'origine. On va donc effectuer deux phases de l'algorithme du simplexe.

********** Début de la première phase. ***************

Le dictionnaire initial de la première phase est :

$$
\begin{array}{rcrrrrrrrrr}
x_8 & = & -13 & +x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & +0x_6 & +0x_7 & +x_0 \\
x_9 & = & -18 & +x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +0x_5 & +0x_6 & +x_7 & +x_0 \\
x_{10} & = & -21 & +x_1 & +x_2 & +x_3 & +0x_4 & +0x_5 & +x_6 & +x_7 & +x_0 \\
x_{11} & = & -16 & +x_1 & +x_2 & +0x_3 & +0x_4 & +x_5 & +x_6 & +x_7 & +x_0 \\
x_{12} & = & -12 & +x_1 & +0x_2 & +0x_3 & +x_4 & +x_5 & +x_6 & +x_7 & +x_0 \\
x_{13} & = & -25 & +0x_1 & +0x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & +x_6 & +x_7 & +x_0 \\
x_{14} & = & -9 & +0x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & +x_6 & +0x_7 & +x_0 \\
\hline
w & = & 0 & +0x_1 & +0x_2 & +0x_3 & +0x_4 & +0x_5 & +0x_6 & +0x_7 & -x_0
\end{array}
$$

On effectue le premier pivot illegal.

La variable entrante est x_0. La variable sortante est x_{13}.

$$
\begin{array}{rcrrrrrrrrr}
x_8 & = & 12 & +x_1 & +x_2 & +0x_3 & +0x_4 & +0x_5 & -x_6 & -x_7 & +x_{13} \\
x_9 & = & 7 & +x_1 & +x_2 & +0x_3 & +0x_4 & -x_5 & -x_6 & +0x_7 & +x_{13} \\
x_{10} & = & 4 & +x_1 & +x_2 & +0x_3 & -x_4 & -x_5 & +0x_6 & +0x_7 & +x_{13} \\
x_{11} & = & 9 & +x_1 & +x_2 & -x_3 & -x_4 & +0x_5 & +0x_6 & +0x_7 & +x_{13} \\
x_{12} & = & 13 & +x_1 & +0x_2 & -x_3 & +0x_4 & +0x_5 & +0x_6 & +0x_7 & +x_{13} \\
x_0 & = & 25 & +0x_1 & +0x_2 & -x_3 & -x_4 & -x_5 & -x_6 & -x_7 & +x_{13} \\
x_{14} & = & 16 & +0x_1 & +x_2 & +0x_3 & +0x_4 & +0x_5 & +0x_6 & -x_7 & +x_{13} \\
\hline
w & = & -25 & +0x_1 & +0x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & +x_6 & +x_7 & -x_{13}
\end{array}
$$

La variable entrante est x_3. La variable sortante est x_{11}.

$$
\begin{array}{rcrrrrrrrrr}
x_8 & = & 12 & +x_1 & +x_2 & +0x_{11} & +0x_4 & +0x_5 & -x_6 & -x_7 & +x_{13} \\
x_9 & = & 7 & +x_1 & +x_2 & +0x_{11} & +0x_4 & -x_5 & -x_6 & +0x_7 & +x_{13} \\
x_{10} & = & 4 & +x_1 & +x_2 & +0x_{11} & -x_4 & -x_5 & +0x_6 & +0x_7 & +x_{13} \\
x_3 & = & 9 & +x_1 & +x_2 & -x_{11} & -x_4 & +0x_5 & +0x_6 & +0x_7 & +x_{13} \\
x_{12} & = & 4 & +0x_1 & -x_2 & +x_{11} & +x_4 & +0x_5 & +0x_6 & +0x_7 & +0x_{13} \\
x_0 & = & 16 & -x_1 & -x_2 & +x_{11} & +0x_4 & -x_5 & -x_6 & -x_7 & +0x_{13} \\
x_{14} & = & 16 & +0x_1 & +x_2 & +0x_{11} & +0x_4 & +0x_5 & +0x_6 & -x_7 & +x_{13} \\
\hline
w & = & -16 & +x_1 & +x_2 & -x_{11} & +0x_4 & +x_5 & +x_6 & +x_7 & +0x_{13}
\end{array}
$$

La variable entrante est x_1. La variable sortante est x_0.

$$
\begin{array}{rcrrrrrrrrr}
x_8 & = & 28 & -x_0 & +0x_2 & +x_{11} & +0x_4 & -x_5 & -2x_6 & -2x_7 & +x_{13} \\
x_9 & = & 23 & -x_0 & +0x_2 & +x_{11} & +0x_4 & -2x_5 & -2x_6 & -x_7 & +x_{13} \\
x_{10} & = & 20 & -x_0 & +0x_2 & +x_{11} & -x_4 & -2x_5 & -x_6 & -x_7 & +x_{13} \\
x_3 & = & 25 & -x_0 & +0x_2 & +0x_{11} & -x_4 & -x_5 & -x_6 & -x_7 & +x_{13} \\
x_{12} & = & 4 & +0x_0 & -x_2 & +x_{11} & +x_4 & +0x_5 & +0x_6 & +0x_7 & +0x_{13} \\
x_1 & = & 16 & -x_0 & -x_2 & +x_{11} & +0x_4 & -x_5 & -x_6 & -x_7 & +0x_{13} \\
x_{14} & = & 16 & +0x_0 & +x_2 & +0x_{11} & +0x_4 & +0x_5 & +0x_6 & -x_7 & +x_{13} \\
\hline
w & = & 0 & -x_0 & +0x_2 & +0x_{11} & +0x_4 & +0x_5 & +0x_6 & +0x_7 & +0x_{13}
\end{array}
$$

La valeur de la première phase du simplexe est 0. Le programme (P) admet donc des solutions.

********** Début de la deuxième phase. ***************

Le dictionnaire initial est :

$$
\begin{array}{ccrrrrrrrr}
x_8 & = & 28 & +0x_2 & +x_{11} & +0x_4 & -x_5 & -2x_6 & -2x_7 & +x_{13} \\
x_9 & = & 23 & +0x_2 & +x_{11} & +0x_4 & -2x_5 & -2x_6 & -x_7 & +x_{13} \\
x_{10} & = & 20 & +0x_2 & +x_{11} & -x_4 & -2x_5 & -x_6 & -x_7 & +x_{13} \\
x_3 & = & 25 & +0x_2 & +0x_{11} & -x_4 & -x_5 & -x_6 & -x_7 & +x_{13} \\
x_{12} & = & 4 & -x_2 & +x_{11} & +x_4 & +0x_5 & +0x_6 & +0x_7 & +0x_{13} \\
x_1 & = & 16 & -x_2 & +x_{11} & +0x_4 & -x_5 & -x_6 & -x_7 & +0x_{13} \\
x_{14} & = & 16 & +x_2 & +0x_{11} & +0x_4 & +0x_5 & +0x_6 & -x_7 & +x_{13} \\
\hline
z & = & -41 & +0x_2 & -x_{11} & +0x_4 & +x_5 & +x_6 & +x_7 & -x_{13}
\end{array}
$$

La variable entrante est x_5. La variable sortante est x_{10}.

$$
\begin{array}{ccrrrrrrrr}
x_8 & = & 18 & +0x_2 & +\frac{1}{2}x_{11} & +\frac{1}{2}x_4 & +\frac{1}{2}x_{10} & -\frac{3}{2}x_6 & -\frac{3}{2}x_7 & +\frac{1}{2}x_{13} \\
x_9 & = & 3 & +0x_2 & +0x_{11} & +x_4 & +x_{10} & -x_6 & +0x_7 & +0x_{13} \\
x_5 & = & 10 & +0x_2 & +\frac{1}{2}x_{11} & -\frac{1}{2}x_4 & -\frac{1}{2}x_{10} & -\frac{1}{2}x_6 & -\frac{1}{2}x_7 & +\frac{1}{2}x_{13} \\
x_3 & = & 15 & +0x_2 & -\frac{1}{2}x_{11} & -\frac{1}{2}x_4 & +\frac{1}{2}x_{10} & -\frac{1}{2}x_6 & -\frac{1}{2}x_7 & +\frac{1}{2}x_{13} \\
x_{12} & = & 4 & -x_2 & +x_{11} & +x_4 & +0x_{10} & +0x_6 & +0x_7 & +0x_{13} \\
x_1 & = & 6 & -x_2 & +\frac{1}{2}x_{11} & +\frac{1}{2}x_4 & +\frac{1}{2}x_{10} & -\frac{1}{2}x_6 & -\frac{1}{2}x_7 & -\frac{1}{2}x_{13} \\
x_{14} & = & 16 & +x_2 & +0x_{11} & +0x_4 & +0x_{10} & +0x_6 & -x_7 & +x_{13} \\
\hline
z & = & -31 & +0x_2 & -\frac{1}{2}x_{11} & -\frac{1}{2}x_4 & -\frac{1}{2}x_{10} & +\frac{1}{2}x_6 & +\frac{1}{2}x_7 & -\frac{1}{2}x_{13}
\end{array}
$$

La variable entrante est x_6. La variable sortante est x_9.

$$
\begin{array}{ccrrrrrrrr}
x_8 & = & \frac{27}{2} & +0x_2 & +\frac{1}{2}x_{11} & -x_4 & -x_{10} & +\frac{3}{2}x_9 & -\frac{3}{2}x_7 & +\frac{1}{2}x_{13} \\
x_6 & = & 3 & +0x_2 & +0x_{11} & +x_4 & +x_{10} & -x_9 & +0x_7 & +0x_{13} \\
x_5 & = & \frac{17}{2} & +0x_2 & +\frac{1}{2}x_{11} & -x_4 & -x_{10} & +\frac{1}{2}x_9 & -\frac{1}{2}x_7 & +\frac{1}{2}x_{13} \\
x_3 & = & \frac{27}{2} & +0x_2 & -\frac{1}{2}x_{11} & -x_4 & +0x_{10} & +\frac{1}{2}x_9 & -\frac{1}{2}x_7 & +\frac{1}{2}x_{13} \\
x_{12} & = & 4 & -x_2 & +x_{11} & +x_4 & +0x_{10} & +0x_9 & +0x_7 & +0x_{13} \\
x_1 & = & \frac{9}{2} & -x_2 & +\frac{1}{2}x_{11} & +0x_4 & +0x_{10} & +\frac{1}{2}x_9 & -\frac{1}{2}x_7 & -\frac{1}{2}x_{13} \\
x_{14} & = & 16 & +x_2 & +0x_{11} & +0x_4 & +0x_{10} & +0x_9 & -x_7 & +x_{13} \\
\hline
z & = & -\frac{59}{2} & +0x_2 & -\frac{1}{2}x_{11} & +0x_4 & +0x_{10} & -\frac{1}{2}x_9 & +\frac{1}{2}x_7 & -\frac{1}{2}x_{13}
\end{array}
$$

La variable entrante est x_7. La variable sortante est x_8.

$$
\begin{array}{rclcccccccc}
x_7 & = & 9 & +0x_2 & +\frac{1}{3}x_{11} & -\frac{2}{3}x_4 & -\frac{2}{3}x_{10} & +x_9 & -\frac{2}{3}x_8 & +\frac{1}{3}x_{13} \\
x_6 & = & 3 & +0x_2 & +0x_{11} & +x_4 & +x_{10} & -x_9 & +0x_8 & +0x_{13} \\
x_5 & = & 4 & +0x_2 & +\frac{1}{3}x_{11} & -\frac{2}{3}x_4 & -\frac{2}{3}x_{10} & +0x_9 & +\frac{1}{3}x_8 & +\frac{1}{3}x_{13} \\
x_3 & = & 9 & +0x_2 & -\frac{2}{3}x_{11} & -\frac{2}{3}x_4 & +\frac{1}{3}x_{10} & +0x_9 & +\frac{1}{3}x_8 & +\frac{1}{3}x_{13} \\
x_{12} & = & 4 & -x_2 & +x_{11} & +x_4 & +0x_{10} & +0x_9 & +0x_8 & +0x_{13} \\
x_1 & = & 0 & -x_2 & +\frac{1}{3}x_{11} & +\frac{1}{3}x_4 & +\frac{1}{3}x_{10} & +0x_9 & +\frac{1}{3}x_8 & -\frac{2}{3}x_{13} \\
x_{14} & = & 7 & +x_2 & -\frac{1}{3}x_{11} & +\frac{2}{3}x_4 & +\frac{2}{3}x_{10} & -x_9 & +\frac{2}{3}x_8 & +\frac{2}{3}x_{13} \\
\hline
z & = & -25 & +0x_2 & -\frac{1}{3}x_{11} & -\frac{1}{3}x_4 & -\frac{1}{3}x_{10} & +0x_9 & -\frac{1}{3}x_8 & -\frac{1}{3}x_{13}
\end{array}
$$

Une solution optimale de (P) est : $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 9$, $x_4 = 0$, $x_5 = 4$, $x_6 = 3$, $x_7 = 9$,

La valeur de la fonction objectif en cette solution est : -25.

Le nombre de pivots effectués est : 3

Il faut donc engager 25 chauffeurs, répartis entre quatre équipes (selon leurs jours de congés) de respectivement 9, 4, 3 et 9 chauffeurs. Noter que la solution est entière. Si la solution avait été fractionnaire, il aurait fallu d'autres calculs afin de justifier son optimalité.