

Pour le calcul de la stratégie mixte de cette variante du jeu papier/ciseaux/caillou, on va résoudre le problème suivant:

Le programme primal (P) est :

$$\begin{array}{llllll}
 \text{Maximiser} & 0x_1 & +0x_2 & +0x_3 & -x_4 & \\
 \text{Sous} & 0x_1 & -3x_2 & +2x_3 & +x_4 & \leq 0 \\
 & 3x_1 & +0x_2 & -x_3 & +x_4 & \leq 0 \\
 & -2x_1 & +x_2 & +0x_3 & +x_4 & \leq 0 \\
 & x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & \leq 1 \\
 & -x_1 & -x_2 & -x_3 & -x_4 & \leq -1 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0
 \end{array}$$

Le programme (P) ne contient pas l'origine. On va donc effectuer deux phases de l'algorithme du simplexe.

***** Début de la première phase. *****

Le dictionnaire initial de la première phase est :

$$\begin{array}{rclllll}
 x_5 & = & 0 & +0x_1 & +3x_2 & -2x_3 & -x_4 & +x_0 \\
 x_6 & = & 0 & -3x_1 & +0x_2 & +x_3 & -x_4 & +x_0 \\
 x_7 & = & 0 & +2x_1 & -x_2 & +0x_3 & -x_4 & +x_0 \\
 x_8 & = & 1 & -x_1 & -x_2 & -x_3 & -x_4 & +x_0 \\
 x_9 & = & -1 & +x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_0 \\
 \hline
 w & = & 0 & +0x_1 & +0x_2 & +0x_3 & +0x_4 & -x_0
 \end{array}$$

On effectue le premier pivot illegal.

La variable entrante est x_0 . La variable sortante est x_9 .

$$\begin{array}{rclllll}
 x_5 & = & 1 & -x_1 & +2x_2 & -3x_3 & -2x_4 & +x_9 \\
 x_6 & = & 1 & -4x_1 & -x_2 & +0x_3 & -2x_4 & +x_9 \\
 x_7 & = & 1 & +x_1 & -2x_2 & -x_3 & -2x_4 & +x_9 \\
 x_8 & = & 2 & -2x_1 & -2x_2 & -2x_3 & -2x_4 & +x_9 \\
 x_0 & = & 1 & -x_1 & -x_2 & -x_3 & -x_4 & +x_9 \\
 \hline
 w & = & - & +x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & -x_9
 \end{array}$$

La variable entrante est x_1 . La variable sortante est x_6 .

$$\begin{array}{rcllclcl}
x_5 & = & \frac{3}{4} & +\frac{1}{4}x_6 & +\frac{9}{4}x_2 & -3x_3 & -\frac{3}{2}x_4 & +\frac{3}{4}x_9 \\
x_1 & = & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4}x_6 & -\frac{1}{4}x_2 & +0x_3 & -\frac{1}{2}x_4 & +\frac{1}{4}x_9 \\
x_7 & = & \frac{5}{4} & -\frac{1}{4}x_6 & -\frac{9}{4}x_2 & -x_3 & -\frac{5}{2}x_4 & +\frac{5}{4}x_9 \\
x_8 & = & \frac{3}{2} & +\frac{1}{2}x_6 & -\frac{3}{2}x_2 & -2x_3 & -x_4 & +\frac{1}{2}x_9 \\
x_0 & = & \frac{3}{4} & +\frac{1}{4}x_6 & -\frac{3}{4}x_2 & -x_3 & -\frac{1}{2}x_4 & +\frac{3}{4}x_9 \\
\hline
w & = & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4}x_6 & +\frac{3}{4}x_2 & +x_3 & +\frac{1}{2}x_4 & -\frac{3}{4}x_9
\end{array}$$

La variable entrante est x_2 . La variable sortante est x_7 .

$$\begin{array}{rcllclcl}
x_5 & = & 2 & +0x_6 & -x_7 & -4x_3 & -4x_4 & +2x_9 \\
x_1 & = & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9}x_6 & +\frac{1}{9}x_7 & +\frac{1}{9}x_3 & -\frac{2}{9}x_4 & +\frac{1}{9}x_9 \\
x_2 & = & \frac{5}{9} & -\frac{1}{9}x_6 & -\frac{4}{9}x_7 & -\frac{4}{9}x_3 & -\frac{10}{9}x_4 & +\frac{5}{9}x_9 \\
x_8 & = & \frac{2}{3} & +\frac{2}{3}x_6 & +\frac{2}{3}x_7 & -\frac{4}{3}x_3 & +\frac{2}{3}x_4 & -\frac{1}{3}x_9 \\
x_0 & = & \frac{1}{3} & +\frac{1}{3}x_6 & +\frac{1}{3}x_7 & -\frac{2}{3}x_3 & +\frac{1}{3}x_4 & +\frac{1}{3}x_9 \\
\hline
w & = & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}x_6 & -\frac{1}{3}x_7 & +\frac{2}{3}x_3 & -\frac{1}{3}x_4 & -\frac{1}{3}x_9
\end{array}$$

La variable entrante est x_3 . La variable sortante est x_0 .

$$\begin{array}{rcllclcl}
x_5 & = & 0 & -2x_6 & -3x_7 & +6x_0 & -6x_4 & +0x_9 \\
x_1 & = & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6}x_6 & +\frac{1}{6}x_7 & -\frac{1}{6}x_0 & -\frac{1}{6}x_4 & +\frac{1}{6}x_9 \\
x_2 & = & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}x_6 & -\frac{2}{3}x_7 & +\frac{2}{3}x_0 & -\frac{4}{3}x_4 & +\frac{1}{3}x_9 \\
x_8 & = & 0 & +0x_6 & +0x_7 & +2x_0 & +0x_4 & -x_9 \\
x_3 & = & \frac{1}{2} & +\frac{1}{2}x_6 & +\frac{1}{2}x_7 & -\frac{3}{2}x_0 & +\frac{1}{2}x_4 & +\frac{1}{2}x_9 \\
\hline
w & = & 0 & +0x_6 & +0x_7 & -x_0 & +0x_4 & +0x_9
\end{array}$$

La valeur de la première phase du simplexe est 0. Le programme (P) admet donc des solutions.

***** Début de la deuxième phase. *****

Le dictionnaire initial est :

$$\begin{array}{rclcl}
x_5 & = & 0 & -2x_6 & -3x_7 & -6x_4 & +0x_9 \\
x_1 & = & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6}x_6 & +\frac{1}{6}x_7 & -\frac{1}{6}x_4 & +\frac{1}{6}x_9 \\
x_2 & = & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}x_6 & -\frac{2}{3}x_7 & -\frac{4}{3}x_4 & +\frac{1}{3}x_9 \\
x_8 & = & 0 & +0x_6 & +0x_7 & +0x_4 & -x_9 \\
x_3 & = & \frac{1}{2} & +\frac{1}{2}x_6 & +\frac{1}{2}x_7 & +\frac{1}{2}x_4 & +\frac{1}{2}x_9 \\
\hline
z & = & 0 & +0x_6 & +0x_7 & -x_4 & +0x_9
\end{array}$$

Une solution optimale de (P) est : $x_1 = \frac{1}{6}$, $x_2 = \frac{1}{3}$, $x_3 = \frac{1}{2}$, $x_4 = 0$,

La valeur de la fonction objectif en cette solution est : 0.

Le nombre de pivots effectués est : 0

Ainsi la stratégie consiste à jouer papier avec probabilité $1/6$, ciseaux avec probabilité $1/3$ et caillou avec probabilité $1/2$.