# Les matroïdes et matroïdes orientés : objets combinatoires, topologiques et algébriques.

Emeric Gioan

mai 2003

séminaire Algèbre et Topologie à Nice

Première partie : matroïdes

Les matroïdes sont des structures combinatoires qui décrivent notamment les positions de points dans l'espace : on ne retient dans les relations de dépendance linéaire que le fait qu'un coefficient soit nul ou non. Il y a des applications en géométrie et topologie algébrique, en particulier via l'algèbre d'Orlik-Solomon et sa base des $\mathcal{NBC}$, qui sont présentés ici en faisant ressortir la liaison avec le polynôme de Tutte et la dualité.

Seconde partie : matroïdes orientés

Les matroïdes orientés prennent en compte, en plus, les positions relatives des points (les signes dans les relations) et permettent ainsi de décrire le complexe cellulaire des faces (régions, sommets...) formé par un ensemble fini d'hyperplans réels. Ils sont représentables en général par des arrangements de pseudosphères et leurs espaces de réalisation sont birationnellement équivalents aux variétés semi-algébriques réelles.

Une seconde interprétation du polynôme de Tutte conduit (c'est l'objet de ma thèse) à une correspondance entre les bases et les réorientations d'un matroïde orienté, et à une *bijection active naturelle entre les $\mathcal{NBC}$ et les régions d'un arrangement*.

Première partie : matroïdes



Seconde partie : matroïdes orientés

# Les matroïdes et matroïdes orientés : objets combinatoires, topologiques et algébriques.

## Première partie : matroïdes

Un *matroïde* est une structure combinatoire sur un ensemble fini $E$ déterminée par diverses axiomatiques équivalentes (Whitney 1935).

• Axiomatique des bases

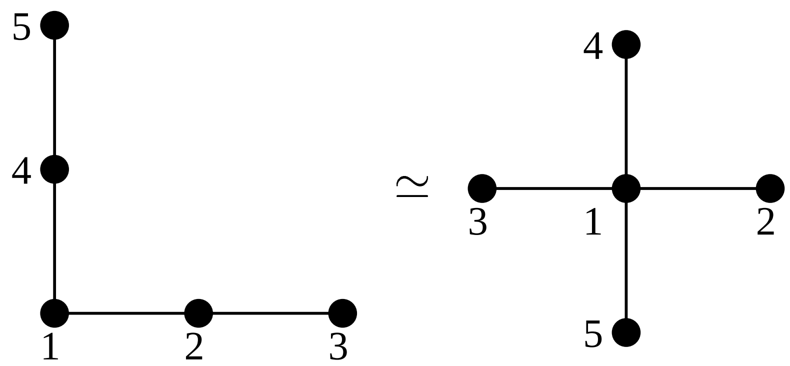
L'ensemble $\mathcal{B}$ des *bases* d'un matroïde $M$ vérifie :

(i) $\mathcal{B} \neq \emptyset$

(ii) *pour tous* $B$ *et* $B'$ *dans* $\mathcal{B}$ *et* $e \in B \setminus B'$ *il existe* $f \in B' \setminus B$, *tel que* $B \setminus e \cup f \in \mathcal{B}$.

Toutes les bases ont même cardinal $r(M)$, *rang* du matroïde.

ex




$$\mathcal{B} = \{124, 125, 134, 135, 234, 235, 245, 345\}$$

• Dualité

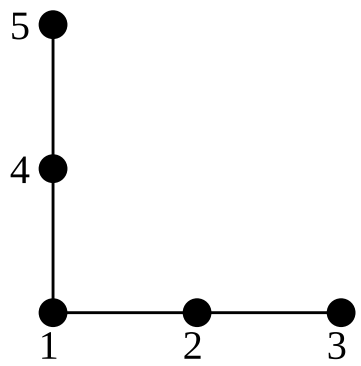
Le *matroïde dual* de $M$ noté $M^*$ a pour ensemble de bases

$$\mathcal{B}^* = \{E \setminus B \mid B \in \mathcal{B}\}$$

• Configuration de points
Soit $E$ est un ensemble fini dans un espace vectoriel sur $K$.

On lui associe un matroïde $M$ dont les bases sont les bases au sens de l'algèbre linéaire contenues dans $E$.

$M$ est dit *réalisable* dans $K$.
$M^*$ est alors aussi réalisable dans $K$.




- les *indépendants* sont les parties des bases

- les *dépendants* sont les non-indépendants (dépendants au sens de l'algèbre linéaire)

- les *circuits* sont les dépendants minimaux

ex : 123, 145, et toutes les parties a 4 éléments ne contenant ni 123 ni 145

- les *fermés* sont les parties $F$ vérifiant $C - e \subseteq F \Rightarrow C \subseteq F$ pour tout circuit $C$ (intersections de $E$ avec les sous-espaces vectoriels)

ex : 123, 145, 24, 25, 34, 35, 1, 2, 3, 4, 5

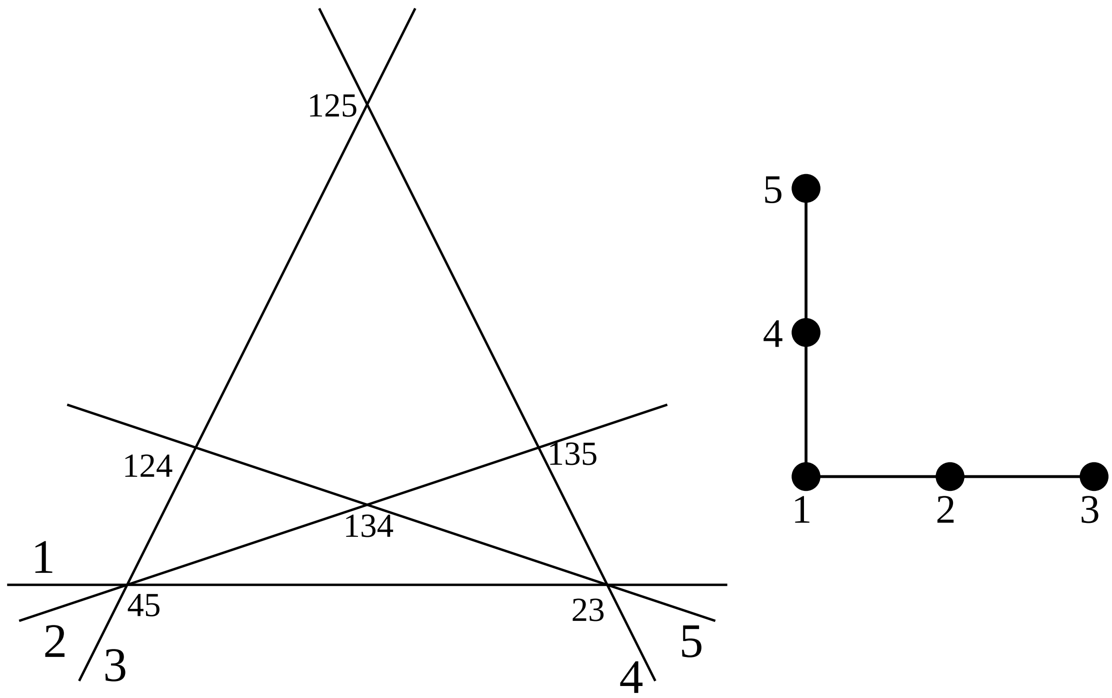
- le *rang* d'une partie $A \subseteq E$ est le cardinal d'un indépendant maximal dans $A$ (dimension du sous-espace engendré par $A$)

- les *cocircuits* sont les complémentaires des fermés de rang $r-1$

ex : 45, 23, 135, 134, 125, 124

• Arrangement d'hyperplans

Soit $E$ un ensemble fini d'hyperplans d'un espace vectoriel sur $K$. Le matroïde associé est défini par la configuration des formes linéaires correspondantes.




Les cocircuits correspondent aux faces de dimension 1 (intersections des fermés de rang $r-1$)

• Dualité entre les circuits et les cocircuits

$$\boxed{\text{Les cocircuits de } M \text{ sont les circuits de } M^*}$$

• Représentation d'un matroïde vectoriel par une matrice

$M$ est le matroïde des dépendances linéaires des colonnes

(circuits de $M$ = dépendants minimaux des colonnes)

si et seulement si

$M^*$ est le matroïde des supports des lignes

(circuits de $M^*$ = supports minimaux de l'espace engendré par les lignes).

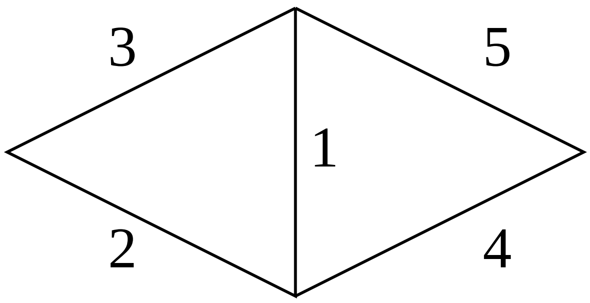
• Graphes

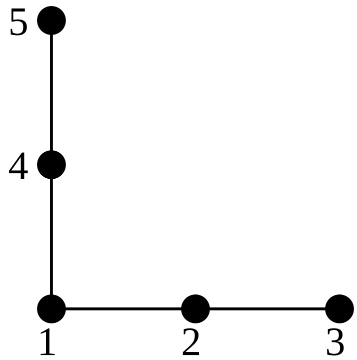
Soit $E$ l'ensemble des arêtes d'un graphe $G = (V, E)$.

Le matroïde *graphique* correspondant est associé à l'arrangement d'hyperplans d'équations

$x_i - x_j = 0$ pour $(i, j) \in E$

avec $x_i, 1 \le i \le \mid V \mid$ une base de $K^V$.




- les bases sont les arêtes des forêts maximales
- les circuits sont les cycles minimaux
- les cocircuits sont les coupes minimales

• Autres exemples

- matroïde uniforme $U_{r,n}$ = matroïde de rang $r$ à $n$ éléments où toute partie à $r$ éléments est une base (position générale)

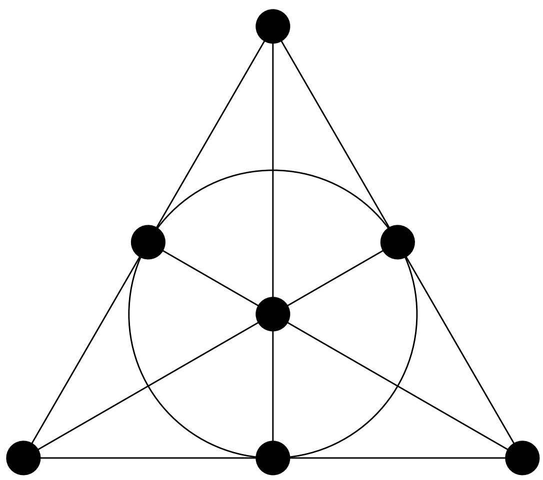
- matroïdes binaires = matroïdes réalisables dans $GF(2)$

- matroïdes réguliers = matroïdes réalisables sur tout corps = matroïdes réalisables dans $GF(2)$ et $\mathcal{R}$
$\sim$ matrices totalement unimodulaires (tous sous-déterminant $\in \{+1, -1, 0\}$)

Rq. La notion de mineurs des graphes s'étend aux matroïdes (suppression et contraction), et $U_{2,4}$ est mineur exclu des matroïdes binaires (et donc des réguliers et des graphiques).

- matroïdes algébriques = matroïde des dépendances algébriques dans un corps, très peu connus (on ne connait pas l'ensemble de leur duaux).

• Il existe des matroïdes non réalisables



Le matroïde de Fano (cf. figure) est réalisable dans $GF(2)$ (corps à 2 éléments) mais pas dans $\mathcal{R}$ (corps des réels). Le matroïde de Vamos n'est réalisable dans aucun corps

• Axiomatique des circuits (ou des cocircuits)

Un ensemble de parties $\mathcal{C}$ d'un ensemble fini est l'ensemble des circuits (ou des cocircuits) d'un matroïde si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées.

(i) $\emptyset \notin \mathcal{C}$ ;

(ii) pour tout $X, Y \in \mathcal{C}$ si $X \subseteq Y$ alors $X = Y$ ;

(incomparabilité)

(iii) pour tout $X, Y \in \mathcal{C}$, $e \in X \cap Y$ et $f \in (X \setminus Y)$, il existe $Z \in \mathcal{C}$ tel que
$Z \subseteq (X \cup Y) - e$
et $f \in Z$.

(élimination forte)

• Indépendants et algorithme glouton

Soit $E$ un ensemble fini et $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(E)$ un ensemble de parties de $E$ vérifiant "si $A \subset B$ et $B \in \mathcal{I}$ alors $A \in \mathcal{I}$".

$\mathcal{I}$ est l'ensemble des indépendants d'un matroïde

**si et seulement si**

l'algorithme suivant donne, pour tout ordre total sur $E$ (poids), le plus petit élément $I$ de $\mathcal{I}$ pour l'ordre lexicographique (poids minimal) avec $I$ maximal pour l'inclusion.

<u>départ</u> : $I = \emptyset$

<u>pas</u> : on ajoute à $I$ le plus petit $e \in E$ tel que $I \cup e \in \mathcal{I}$

<u>fin</u> : $I = B_{min}$ est la plus petite base pour l'ordre lexicographique

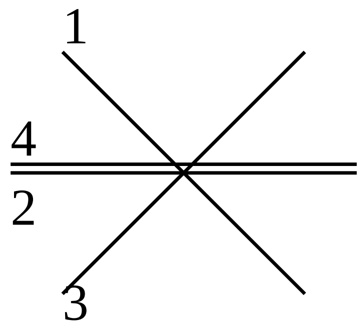
• Polyèdre des bases

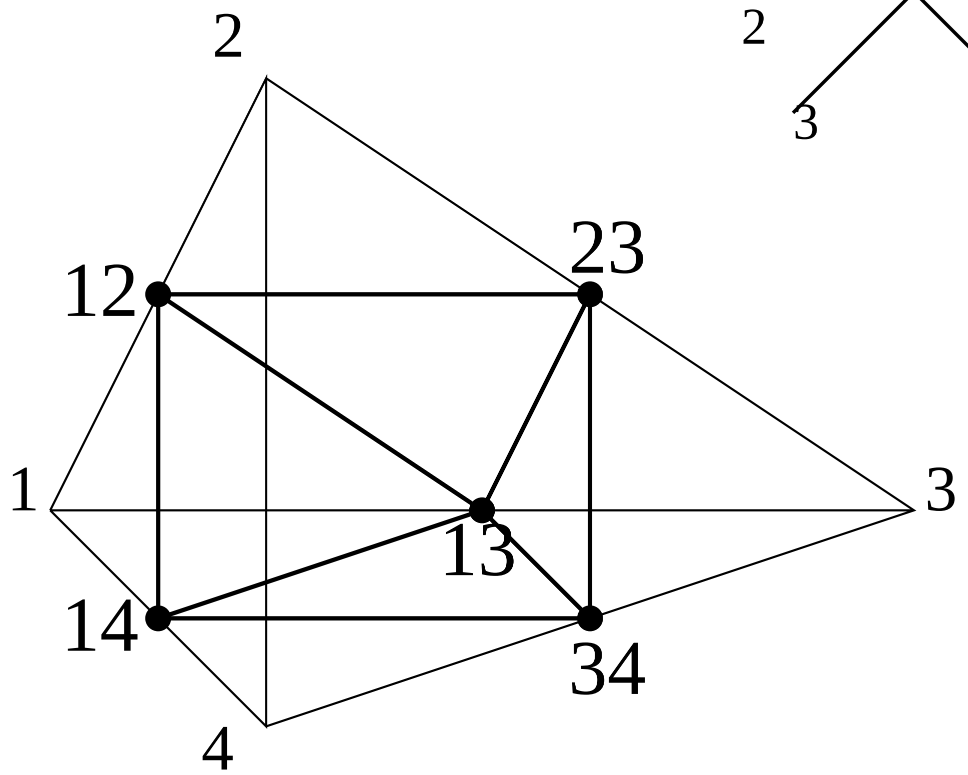
Les sommets d'une subdivision barycentrique d'ordre $r$ du simplexe de dimension $n-1$ sont en bijection canonique avec les parties de cardinal $r$ de l'ensemble des $n$ sommets du simplexe.

**Théorème** (Gelfand et Cie)
Un ensemble de parties à $r$ éléments est l'ensemble des bases d'un matroïde

**si et seulement si**

les arêtes de l'enveloppe convexe des points correspondant dans le simplexe sont parallèles aux arêtes du simplexe



Généralisation aux matroïdes de Coxeter :

$\mathcal{B} \subseteq W/P$ avec $W$ groupe de Coxeter, $P$ sous groupe parabolique maximal et une condition d'optimalité adaptée de l'algorithme glouton. Les matroïdes sont le cas où $W$ est le groupe des permutations.

Application en géométrie algébrique :

dans sa "chirurgie des grassmanniennes", Laurent Lafforgue, associe, à une cellule de Schubert mince donnée, le polyèdre des bases d'un matroïde.

**Proposition** (Lafforgue)
Si le polyèdre des bases associé n'est pas *pavable* par des polyèdres de bases, alors la cellule est compactifiable.

**Question ouverte purement géométrique.** A quelles conditions un polyèdre de bases est-il pavable par des polyèdres de bases?

• Algèbre d'Orlik-Solomon

Soit un arrangement d'hyperplans définissant un matroïde $M$ sur $E$ de cardinal $n$.

Soit

$$\bar{\mathcal{A}} = \bigoplus_{0 \leq p \leq n} \bar{\mathcal{A}}_p$$

avec

$$\bar{\mathcal{A}}_p = < u_1 \wedge ... \wedge u_p \mid u_i \in E, 1 \leq i \leq p >$$

$u \wedge v = -v \wedge u$ et $u \wedge u = 0$.
$\bar{\mathcal{A}}$ est une algèbre anti-commutative.

Pour un $p$-uple $e_S = (e_1, ..., e_p)$ de $E$, soit

$$\partial(e_S) = \sum_{1 \leq k \leq p} (-1)^{k-1} e_1 \wedge ... \wedge \hat{e_k} \wedge ... \wedge e_p$$

(avec $\hat{e}$ signifiant $e$ est omis).

Soit $I$ l'idéal de $\bar{\mathcal{A}}$ engendré par les $\partial(e_S)$ pour $e_S$ dépendant de $M$.

L'algèbre d'Orlik-Solomon est

$$\mathcal{A} = \bar{\mathcal{A}}/I = \bigoplus_{0 \leq p \leq \mathbf{r}} A_p$$

**Théorème.** $\mathcal{A}$ est isomorphe à la cohomologie du complémentaire de l'arrangement d'hyperplans complexifié (qui est ainsi décrite en termes de générateurs et relations).

Soit $<$ un ordre total quelconque sur $E$.

Si $C = e_1 < ... < e_p$, est un circuit de $M$, on a dans $\mathcal{A}$ :

$$e_2 \wedge ... \wedge e_p = e_1 \wedge e_3 \wedge ... \wedge e_p \\ -e_1 \wedge e_2 \wedge e_4 \wedge ... \wedge e_p + ... + (-1)^p e_1 \wedge ... \wedge e_{p-1}$$

On appelle *circuit brisé* de $M$ une partie de $E$ égale à $C \setminus min(C)$ pour un circuit $C$ de $M$.

Soit $\mathcal{NBC}$ l'ensemble des parties de $E$ qui ne contiennent pas de circuit brisé ('no broken circuit').

**Théorème.** L'ensemble des $p$-uples croissants correspondant aux éléments de $\mathcal{NBC}$ est une base de $\mathcal{A}$.

$\mathcal{NBC}$ est l'ensemble des parties des bases sans circuit brisé. Plus précisément, on a en fait

$$\mathcal{NBC} = \biguplus_{B \in \mathcal{B} \cap \mathcal{NBC}} [B \setminus Int(B), B]$$

où $Int(B)$ est l'ensemble des éléments intérieurement actifs de $B$ (voir plus loin).

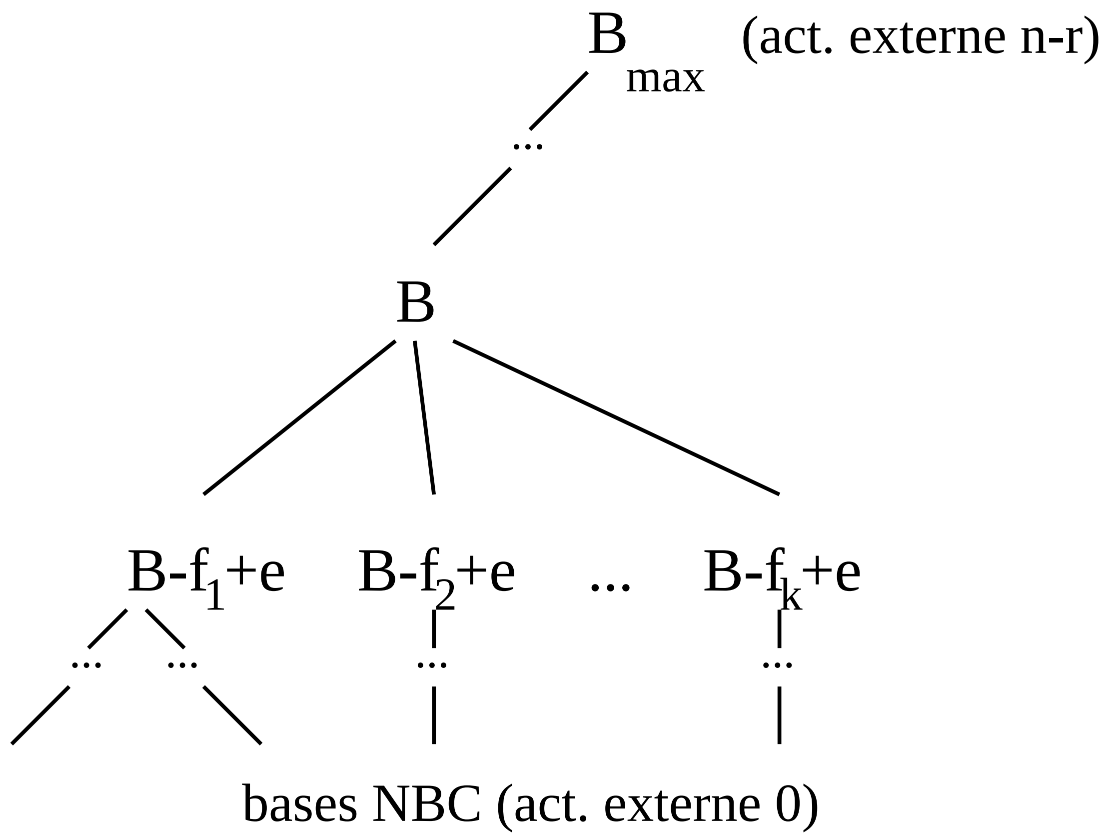
- Ordre externe des bases

Soit un ordre total sur $E$.
Soit $B$ une base de $M$ et $e \in E \setminus B$.
Il existe un unique circuit $C(B; e)$ contenu dans $B \cup e$.
$C(B; e) \setminus e$ est l'ensemble des éléments $f$ qui peuvent être échangés avec $e$ de sorte que $B \setminus f \cup e \in \mathcal{B}$.

Lorsque $e = min(C)$, on dit que $e$ est *extérieurement actif* pour $B$. L'*activité externe* de $B$ est le nombre d'élémnents extérieurement actifs pour $B$.

Avec $C = e < f_1 < ... < f_k$, tous les $B \setminus f_i \cup e$, $1 \leq i \leq k$ sont des bases, et les $p$-uples croissants correspondant vérifient dans $\mathcal{A}$ :

$$B = (B \setminus f_1 \cup e) - (B \setminus f_2 \cup e) + ... + (-1)^k (B \setminus f_k \cup e)$$




La relation $B \rightarrow B \setminus f_i \cup e$ définit un ordre gradué par l'activité externe des bases (treillis externe, Las Vergnas 2000).

La plus grande base pour cet ordre est la plus grande base pour l'ordre lexicographique $B_{max}$. Elle a pour activité externe $n - r$ : tous les éléments de son complémentaires sont extérieurement actifs.

Les bases minimales pour cet ordre sont les bases $\mathcal{NBC}$, ou d'activité externe nulle.

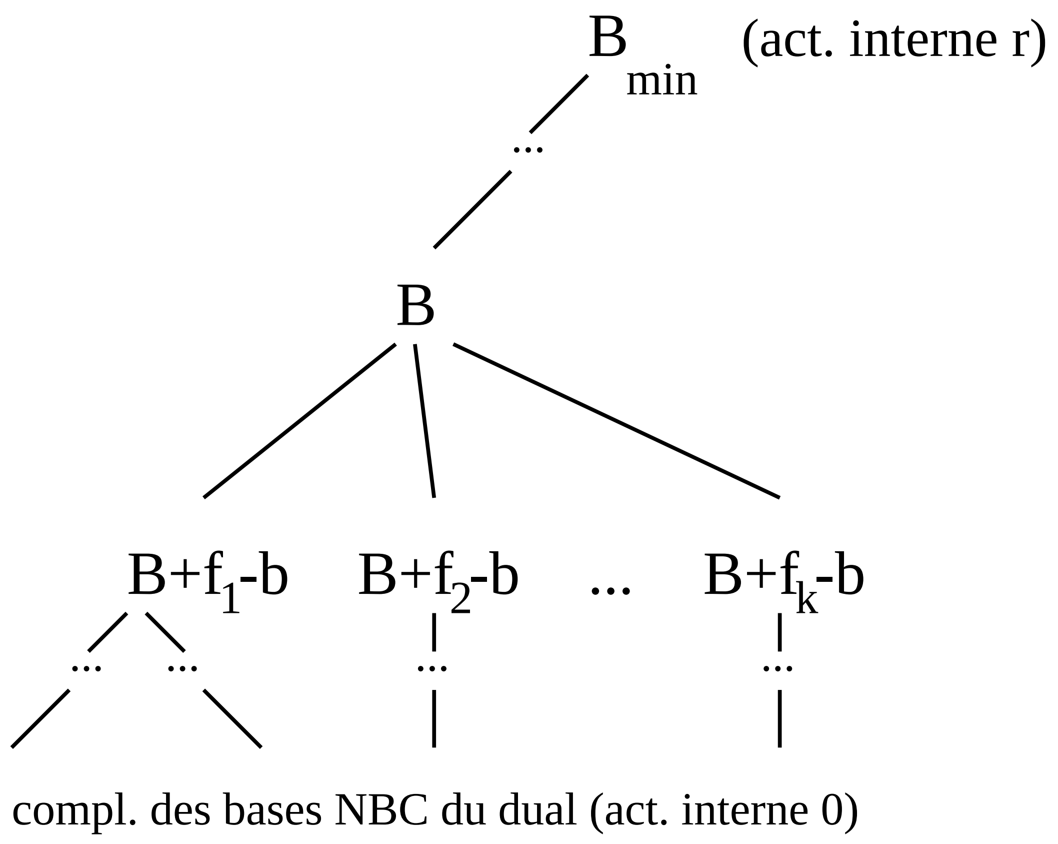
• Ordre interne des bases

En passant au dual (bases complémentaires), on a un autre ordre actif pour $M$, gradué par l'*activité interne* (activité externe dans le dual), de plus petit élément $B_{min}$, et d'éléments maximaux les bases d'activité interne nulle (complémentaires des bases $\mathcal{NBC}$ de $M^*$).

Soit $B$ une base de $M$, et $b \in B$.

$b$ est *intérieurement actif* dans $B$ si $b = minC^*(B; b)$

où $C^*(B; b)$ est l'unique cocircuit contenu dans $(E \setminus B) \cup b$, complémentaire du fermé de rang $r - 1$ engendré par $B \setminus b$, etc.

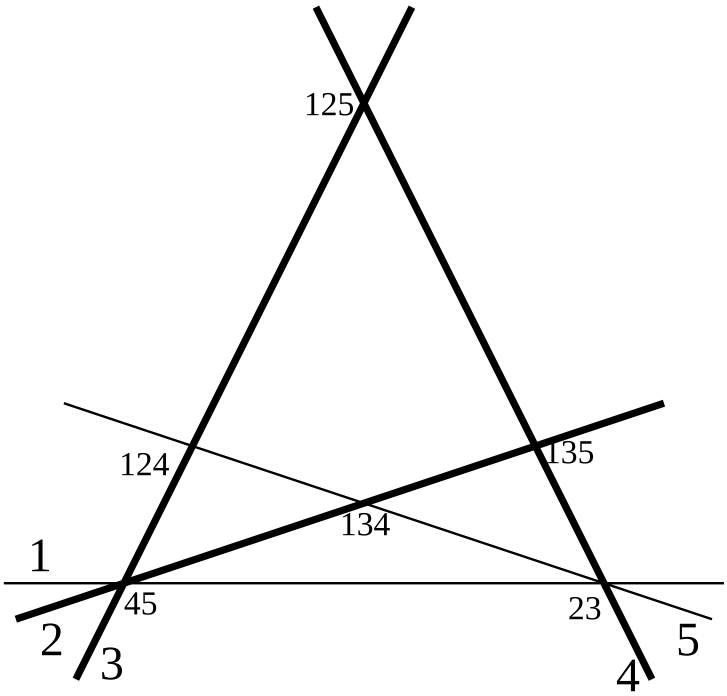


• Activités des bases

A chaque base $B$ sont associés deux paramètres $\iota(B)$ et $\varepsilon(B)$, l'activité interne et l'activité externe.
<u>ex</u> : $B = 234$, $\iota(B) = 1$ et $\varepsilon(B) = 1$ car

$C(B;1) = 123$, 1 est extérieurement actif ;
$C(B;5) = 2345$

$C^*(B;2) = 125$ ; $C^*(B;3) = 135$ ;
$C^*(B;4) = 45$, 4 est intérieurement actif




| 234 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | x | x | x | | |
| 2 | | x | | | |
| 3 | | | x | | |
| 4 | | | | x | |
| 5 | | x | x | x | x |

Représentation sous forme de tableau fondamental :
lignes = circuits fondamentaux
colonnes = cocircuits fondamentaux
C'est une information 'locale' en $B$ sur le poyèdre des bases.

• Polynôme de Tutte (Tutte 1954)

$$t(M;x,y)=\sum_{B\in\mathcal{B}} x^{\iota(B)}y^{\varepsilon(B)}=\sum_{i,j} b_{i,j}x^iy^j$$

$b_{i,j} = \#$ bases d'act. $(i,j)$ <u>ne dépend pas de l'ordre choisi</u>

- equivalent à la série génératrice du cardinal et du rang des parties :

$$t(M;x,y)=\sum_{A\subseteq E}(x-1)^{r-r(A)}(y-1)^{|A|-r(A)}$$

- dualité :

$$t(M;x,y)=t(M^*;y,x)$$

- généralisation du polynôme chromatique des graphes à deux variables duales

- interventions variées (noeuds : le polynôme de Jones en est une particularisation ; codes ; modèles physiques : tas de sable, percolations...)

- nombreuses évaluations significatives

$t(M;1,0) = \#$ bases d'act. ext. 0 (bases $\mathcal{NBC}$)

$t(M;2,0) = \# \mathcal{NBC}$

$t(G;2,0) = \#$ orientations acycliques du graphe $G$

(Stanley 1973)

$t(M;2,0) = \#$ régions de l'arrangement $M$

(Zaslavski, Las Vergnas 1975)

• Décomposition de l'ensemble des bases en bases $\mathcal{NBC}$

Formule de 'convolution' du polynôme de Tutte :

$$t(M;x,y) = \sum_{\substack{F \subseteq E \\ F \text{ fermé de } M \\ E \setminus F \text{ fermé de } M^*}} t(M/F;x,0)\ t(M(F);0,y)$$

**Théorème** (Etienne, Las Vergnas 1998).

Soit $M$ un matroïde sur un ensemble totalement ordonné ayant pour ensemble de bases $\mathcal{B}$.

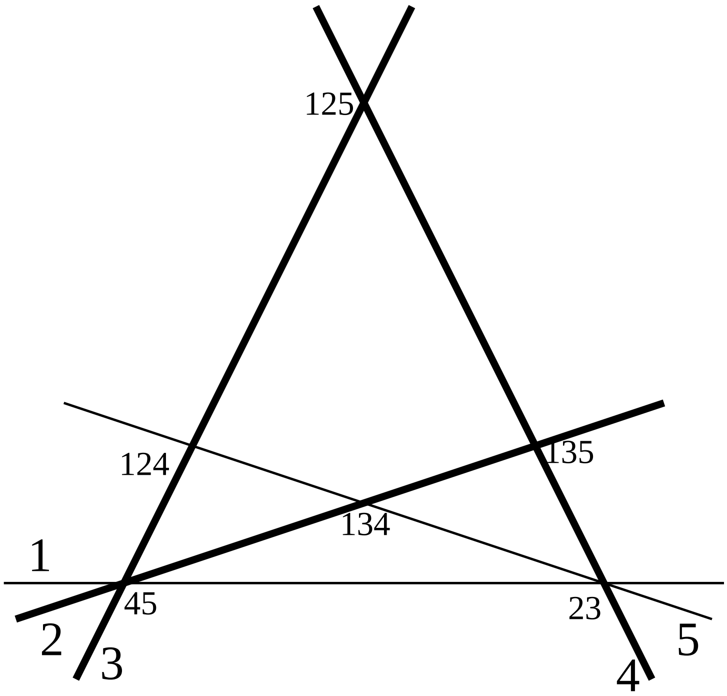
$$\mathcal{B} = \biguplus_{\substack{F \subseteq E \\ F \text{ fermé de } M \\ E \setminus F \text{ fermé de } M^*}} \{B^* \uplus B \mid F \setminus B^* \text{ base } \mathcal{NBC} \text{ de } (M(F))^*, \quad B \text{ base } \mathcal{NBC} \text{ de } M/F\}$$

où $M(F)$, restriction à $F$, est obtenu en supprimmant les éléments de $E \setminus F$, et $M/F$, contraction de $F$, est défini par l'arrangement induit sur l'intersection des hyperplans de $F$.

*Idée de la preuve :*

on décompose le tableau fondamental de la base en deux tableaux fondamentaux, l'un d'une base interne, et l'autre d'une base externe. Pour que cela ait un sens, il faut utiliser la fermeture dans le matroïde et son dual. Et supprimer une ligne (resp. une colonne) non réduite à un élément revient à supprimer (resp. contracter) cet élément.

<u>ex</u>




Base $234 = 23 \cup 4$

Base 23 de $M(123)$ :
act. interne 0

Base 4 de $M/123$ :
act. externe 0

| 234 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | x | x | x | | |
| 2 | | x | | | |
| 3 | | | x | | |
| 4 | | | | x | |
| 5 | | x | x | x | x |

| 23 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | x | x | x |
| 2 | | x | |
| 3 | | | x |

| 4 | 4 | 5 |
|---|---|---|
| 4 | x | |
| 5 | x | x |

• Raffinement (Gioan, Las Vergnas 2002)

on généralise en une suite de parties le fermé associé à une base, et la décomposition en bases $\mathcal{NBC}$ d'activités $(i,0)$ devient alors une décomposition en bases d'activités (1,0).

$t(M;x,y) =$

$$\sum_{\substack{\emptyset=F^*_\varepsilon\subset\ldots\subset F^*_0=F_c \\ F_c=F_0\subset\ldots\subset F_\iota=E \\ \text{décomposante}}} \left(\prod_{1\leq k\leq \iota}\beta(M(F_k)/F_{k-1})\right)$$

$$\left(\prod_{1\leq k\leq \varepsilon}\beta(M(F^*_{k-1})/F^*_k)\right)\; x^\iota y^\varepsilon$$

où $\beta(M) = b_{1,0}(M)$

$\beta(M)$ est le nombre de régions ne touchant pas un hyperplan donné (d'un côté donné de cet hyperplan).

• Seconde partie : matroïdes orientés

$t(M;2,0) = \#\ \mathcal{NBC}$

$t(M;2,0) = \#$ régions de l'arrangement

Bijection 'active' naturelle entre $\mathcal{NBC}$ et les régions.