

TD 4 – Systèmes linéaires

Exercice 1.

Vrai ou faux ?

Déterminer si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse, et **justifier** les réponses.

1. Un système linéaire ayant plus d'équations que d'inconnues possède une infinité de solutions.
2. Un système linéaire ayant plus d'inconnues que d'équations possède 0 ou 1 solution.
3. Un système linéaire homogène possède au moins une solution.
4. Si la forme échelonnée réduite d'un système linéaire possède une ligne de zéros, le système a une infinité de solutions.

Exercice 2.

En pleine forme !

1. Déterminer si chacune des matrices suivantes est sous forme échelonnée, sous forme échelonnée réduite, ou ni l'un ni l'autre :

$$\begin{bmatrix} 1 & -7 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Calculer les formes échelonnées, puis échelonnées réduites, des matrices suivantes (sur \mathbb{Q}) :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & 8 \\ -1 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

3. Calculer les formes échelonnées et échelonnées réduites des deux premières matrices de la question précédente, en les considérant maintenant dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

Exercice 3.

Système à résoudre

1. Résoudre les systèmes suivants dans \mathbb{Q} :

$$\begin{cases} x - y + 2z - w & = -1 \\ 2x + y - 2z - 2w & = -2 \\ -x + 2y - 4z + w & = 1 \\ 3x - 3w & = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 1 \\ 3x + 4y + 2z = 1 \\ 4x + 2y + 3z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 0 \\ 3x + 4y + 2z = 1 \\ 4x + 2y + 3z = 2 \end{cases}$$

2. Résoudre les mêmes systèmes dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.
3. Trouver des valeurs conditions sur a , b et c pour que le système suivant admette une ou des solutions :

$$\begin{cases} x + 3y - z = a \\ x + y + 2z = b \\ 2y - 3z = c \end{cases}$$

4. Résoudre le système (non linéaire !) suivant :

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} - \frac{4}{z} = 1, \\ \frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{8}{z} = 0, \\ -\frac{1}{x} + \frac{9}{y} + \frac{10}{z} = 5. \end{cases}$$

5.
 - i. Démontrer que si a , b , c et d vérifient $ad - bc \neq 0$, alors la forme échelon réduite de $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ est $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
 - ii. En déduire que si $ad - bc \neq 0$, alors pour tout k, ℓ , le système

$$\begin{cases} ax + by = k \\ cy + dy = \ell \end{cases}$$

a une unique solution.