TD 5 – Algèbre matricielle

Exercice 1. *Calculs*

On considère les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & 8 \\ -1 & 9 & 10 \end{bmatrix}.$$

Pour chacune des quatres matrices, vue d'abord comme matrice sur $\mathbb{Q}$, puis comme matrice sur $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, effectuer les calculs suivants :

1. Calculer une décomposition $P \cdot L \cdot E$ de la matrice.
2. Calculer une décomposition $C \cdot R$ de la matrice.
3. Déterminer le rang de la matrice.
4. Déterminer si la matrice est inversible, et le cas échéant calculer son inverse.
5. Calculer le noyau de la matrice.

Exercice 2. *Inversion de matrice*

1. Soit P une matrice de permutation, c'est-à-dire une matrice qui contient exactement un 1 par ligne et par colonne, et des 0 ailleurs.
   - **i.** Justifier que P est une matrice inversible.
   - **ii.** Montrer que l'inverse de P est $P^\top$.
2. Soit L une matrice carrée, triangulaire inférieure.
   - **i.** Trouver une condition nécessaire et suffisante sur la diagonale que L pour qu'elle soit inversible.
   - **ii.** Montrer que son inverse, si elle existe, est triangulaire inférieure.
   - **iii.** Calculer les éléments diagonaux de son inverse, si elle existe.
   - **iv.** Adapter les résultats à une matrice triangulaire supérieure.
3. - **i.** Écrire un algorithme qui prend en entrée une matrice triangulaire inférieure et renvoie son inverse.
   - **ii.** Analyser sa complexité.
   - **iii.** Connaissez-vous un algorithme plus rapide ?
4. Soit A une matrice carrée dont on connaît une décomposition $P \cdot L \cdot E$.
   - **i.** Comment déterminer si A est inversible ?
   - **ii.** Comment calculer son inverse ?