TD 6 – Déterminant

Exercice 1. *Calculs*

1. Calculer les déterminants des matrices suivantes, sur $\mathbb{Z}$ puis sur $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$, avec deux méthodes : élimination de Gauss, et application directe de la définition :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 6 \\ 8 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

   Lesquelles sont inversibles ?

2. Montrer que le déterminant de la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}$$

   est égal à $(a-b)(b-c)(c-a)$.

3. Soit $A \in \mathbb{K}^{k\times k}$ et $B \in \mathbb{K}^{\ell\times\ell}$. Soit $E = \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$, $F = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I_\ell \end{bmatrix}$ et $C = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ trois matrices de $\mathbb{K}^{n\times n}$ où $n = k + \ell$ (E, F et C sont définies *par blocs*).

   i. Montrer que $\det(E) = \det(B)$.
   ii. Montrer que $\det(F) = \det(A)$.
   iii. En déduire que $\det(C) = \det(A)\det(B)$.

Exercice 2. *Règle de Cramer*

Soit $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ une matrice inversible et $b \in \mathbb{K}^n$. On note A_i la matrice obtenue en remplaçant la $i^{\text{ème}}$ colonne de A par b. On cherche à calculer l'unique solution s du système $A \cdot x = b$.

1. Calculer (explicitement) la matrice $X_i = A^{-1} \cdot A_i$ pour tout i.
2. Calculer le déterminant de X_i.
3. En déduire que $s_i = \det(A_i)/\det(A)$ pour tout i.
4. Utiliser la règle précédente pour trouver la solution du système suivant :

$$\begin{cases} 2x + 5y + 5z & = 2 \\ -x - y & = 3 \\ 2x + 4y + 3z & = 5 \end{cases}$$