TD 4 – Groupes, anneaux, corps (suite)

Exercice 1. *Appliquer la définition : anneaux et corps*

1. Montrer que $(\mathbb{Z}, +, \times)$, $(\mathbb{R}, +, \times)$, $(\mathbb{Q}, +, \times)$ et $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ sont des anneaux.
2. Montrer que $(\mathbb{R}, +, \times)$ et $(\mathbb{Q}, +, \times)$ sont des corps, mais pas $(\mathbb{Z}, +, \times)$.
3. Montrer que $(n\mathbb{Z}, +, \times)$ n'est pas un anneau.
4. Montrer que $((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times, +, \times)$ n'est pas un anneau.

Exercice 2. *Sous-groupes*

1. Quel est l'ordre de $[1]_n$ dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$? Et son ordre dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^\times, \times)$?
2. Calculer l'ordre de $[2]_7$ et de $[3]_7$ dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}^\times$. Lequel des deux est générateur ?
3. Soit $G = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.
   - **i.** Montrer que $H = \{[0]_6, [3]_6\}$ est un sous-groupe de G.
   - **ii.** Décrire G/H.

Exercice 3. *Un anneau complexe*

Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. On définit l'opération $z_1 \otimes z_2 = z_1 z_2 + \Im(z_1)\Im(z_2)$ où $\Im(z)$ désigne la partie imaginaire de z.

1. Montrer que $(\mathbb{C}, +, \otimes)$ est un anneau (préciser les neutres des deux opérations).
2. Montrer que les éléments inversibles (pour $\otimes$) de $(\mathbb{C}, +, \otimes)$ sont les éléments de partie réelle non nulle, et exprimer l'inverse d'un élément $z = a + ib$ où a, $b \in \mathbb{R}$ et $i^2 = -1$.

Exercice 4. *Idéaux*

1. Montrer que pour tout m et $n > 0$, $m \cdot \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un idéal de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
2. Décrire $4 \cdot \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, puis $5 \cdot \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.
3. Démontrer que pour tout m et $n > 0$, $m \cdot \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = d \cdot \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ où $d = \textsc{pgcd}(m, n)$.
4. Décrire, pour m et $n > 0$, le quotient $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/(m \cdot \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.